El uso del criterio de D´Alembert en la solución de problemas en sistemas no inerciales de referencia

ISSN 1870-9095

Leonardo Julian Picos Rivers[1], José Quintín Cuador Gil[2], Carlos Rafael Martínez de Osaba Picos[3]

[1]Departamento de Física, Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de la Habana "José Antonio Echeverría", CUJAE, Calle 114, No. 11901, Marianao, La Habana, Cuba, CP 10400.
[2]Facultad de Ciencias Técnicas, Universidad de Pinar del Río, Calle Martí 300, Pinar del Río, Cuba.
[3]Departamento de Física, Universidad de Pinar del Río, Calle Los Pinos final, Pinar del Río, Cuba.

E-mail: cuador@upr.edu.cu

(Recibido el 13 de enero de 2021, aceptado el 11 de abril de 2021)

Resumen

La ecuación fundamental de la dinámica es aplicable solamente en los sistemas inerciales de referencia, pero a menudo nos encontramos con situaciones en las cuales el sistema deja de ser inercial y es necesario modificar dicha ecuación para que sea aplicable a tales sistemas. Para ello debemos introducir fuerzas adicionales llamadas fuerzas de inercia, las cuales no están condicionadas por la interacción de los cuerpos sino por las propiedades de los propios sistemas acelerados. Estas fuerzas son reales para aquellos que las experimentan y constituyen un recurso que nos permite aplicar la ecuación fundamental de la dinámica a acontecimientos que se desarrollan en sistemas acelerados. Una forma de resolver tales problemas puede ser, también, utilizando el criterio de D´Alambert que resulta ser un método muy simple y directo, en el que se combina el estado de equilibrio y la composición de movimientos. Se presenta en este trabajo varios ejemplos resueltos por el método de Newton y el criterio de D´Alembert.

Palabras clave: Sistemas inerciales, sistemas no inerciales, método de Newton, criterio de D´Alembert.

Abstract

The dynamics fundamental equation is applicable only in the inertial systems of reference, but often we meet situations in which the system are not inertial and it is necessary to modify this equation to be applicable to these systems. For these cases should be introduced additional forces called inertia forces, which are not conditioned by the interaction of the bodies if not by the properties of the own accelerated systems. These forces are real for those who experiment them and constitute a resource that allows us to apply the dynamics fundamental equation to the events which are performed in accelerated systems. Besides that, ones of the form to solving these problems can be using the criterion of D´Alambert, which is simpler and direct method, it combines the equilibrium state and the composition of movements. In this work several examples solved by the Newton method and the criterion of the D´Alembert are presented.

Keywords: Inertial systems, non-inertial systems, newton method, criterion of D´Alembert.

I. INTRODUCCIÓN

La solución de problemas en las asignaturas de física es el elemento fundamental para el desarrollo de habilidades en los estudiantes de ingeniería, este tema ha sido objeto de intensa investigación en el área de la enseñanza de la física [1]. Según Méndez-Coca [2] "la inteligencia y la metodología seguida en clase influyen de forma considerable en la resolución de los problemas de Física". Existen metodologías para la resolución de problemas de Física, con mayor o menos efectividad, por ejemplo: [3, 4, 5]. Se han propuesto clasificación de problemas de física con estructuras por niveles, que van desde situaciones simples hasta problemas de mayor complejidad [6]. El éxito de las metodologías depende en gran medida en las aplicaciones de leyes o principios físicos a situaciones problémicas de modo que garantice la búsqueda de soluciones óptimas, lo que implica razonamientos profundos, como se presenta en [7].

En el tema de dinámica de la partícula, en particular, se presentan situaciones en la que el estudiante debe reflexionar en la búsqueda de soluciones aplicando la ecuación fundamental de la dinámica, la cual se aplica sólo a los sistemas inerciales de referencia, pero es frecuente encontrar situaciones en las que el sistema no es inercial, es decir sistemas de referencia acelerados. Cuando el sistema deja de ser inercial, es necesario modificar las ecuaciones de los sistemas inerciales para que sea aplicable a los sistemas no inerciales. Para ello debemos introducir fuerzas adicionales llamadas fuerzas de inercia, las cuales no están condicionadas por la interacción de los cuerpos sino por las propiedades de los propios sistemas acelerados. Estas fuerzas son muy reales para aquellos que las experimentan y constituyen un recurso que nos permite aplicar la ecuación fundamental de la dinámica a acontecimientos que se desarrollan en sistemas acelerados.

Una forma de resolver tales problemas puede ser utilizando el criterio de D´Alembert que resulta ser un método muy simple y muy directo en el que se combina el estado de equilibrio y la composición de movimientos. Se presentan en este trabajo un conjunto de problemas resueltos donde se obtiene la solución por el método de Newton y por el criterio de D´Alembert. Los problemas tomados como ejemplos representan situaciones diferentes, los mismos permiten mostrar la forma de aplicar los métodos en situaciones donde los sistemas de referencias son no inerciales.

II. SISTEMAS INERCIALES Y NO INERCIALES DE REFERENCIAS

Los sistemas de referencias inerciales, son los sistemas de referencias que no están acelerados, es decir lo que se encuentran en reposo o en movimiento rectilineo uniforme, son los sistemas en los que las leyes del movimiento cumplen con las leyes de Newton y por tanto la variación del momento lineal del sistema, ecuación (1), es igual a la fuerza resultante que actua sobre el sistema.

$$\frac{dP}{dt} = F\ resultante. \tag{1}$$

Un sistema de referencia no inercial es el sistema que se mueve con aceleración, o en el que los ejes roten con velocidad constante o variable, por lo que requiere de la introducción de fuerzas ficticias o inerciales, de modo que se obtiene la ecuación (2).

$$\frac{dP}{dt} = F\ resultante + F\ ficticias. \tag{2}$$

El criterio de D´Alembert establece que las fuerzas aceleradoras que actúan sobre el sistema y las fuerzas de inercias son tales que serían capaces de mantener el sistema en equilibrio. Luego todo fenómeno dinámico puede ser reducido a la consideración más simple, el equlibrio. En este caso todas las aceleraciones son nulas y la ecuación se reduce a una relación entre las fuerzas aplicadas.

Este criterio se puede usar para resolver un sistema dinámico desde un punto de vista estático por medio de la introdución de una fuerza en la dirección opuesta a la del movimiento del sistema, y para ello debemos:

-Representar las fuerzas que son producto de las interacciones y que están actuando sobre el cuerpo en estudio (diagrama de cuerpo libre).

-Colocar convenientemente el observador en una posición en la que para él, dicho cuerpo permanece en equilibrio (reposo).

-Preguntarse ¿sólo con estas fuerzas se cumple con el equilibrio? ¿Qué hacer para que se cumpla las leyes del equilibrio en el sistema de referencia no inercial?

-Agregar una fuerza al diagrama de cuerpo libre en estudio que en lo adelante le llamaremos fuerza de D´Alambert para que las leyes de la mecánica se cumplan para dicho observador que se encuentra en el sistema de referencia no inercial. Mostramos a continuación un conjunto de ejemplos tomados en diferentes situaciones con el fin de mostrar la forma de aplicar dos criterios: el método de Newton y el criterio de D´Alembert.

III. EJEMPLOS RESUELTOS POR EL MÉTODO DE NEWTON Y POR EL CRITERIO DE D´ALEMBERT

Los cinco problemas resueltos, seleccionados como ejemplos, donde se muestran la aplicación de los procedimientos mencionados fueron tomados de los libros de física utilizados en las carreras de ingeniería [8] y [9].

Ejempo 1: El coche mostrado en la figura se acelera con 7.5 m/s^2. La esferita "A" de 1 kg permanece en resposo respecto al coche. Hallar "h" en función de R. No hay fricción y g = 9.8 m/s^2.

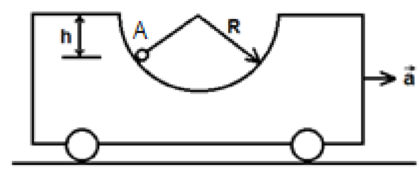

FIGURA 1. Figura del ejemplo 1.

Solución utilizando el método de Newton.

- Diagrama de cuerpo libre.
- En la dirección del movimiento acelerado $\sum F_x = ma_x$
- En la dirección perpendicular al movimiento acelerado $\sum F_y = 0$.

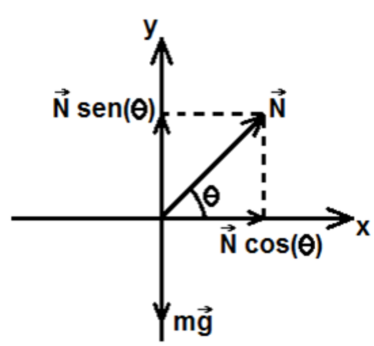

FIGURA 2. Diagrama de cuerpo libre, ejemplo 1.

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}, \qquad \sum \vec{F}_y = \vec{0}, \tag{3}$$

$$N\cos(\theta) = ma, \qquad N\,\mathrm{sen}(\theta) = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{N\,sen(\theta)}{N\cos(\theta)} = \frac{mg}{ma}, \tag{5}$$

$$\tan(\theta) = \frac{g}{a} = 1.33 \;\rightarrow\; \theta = 53^{\circ}. \tag{6}$$

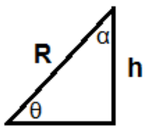

FIGURA 3. Relación entre R, h y θ.

$$\alpha = 37^{\circ},$$

$$\cos(\alpha) = \frac{H}{R}, \tag{7}$$

$$h = R\cos(\alpha)\,, \quad h = R\cos(37^{\circ}), \tag{8}$$

$$h = 0.8\,R. \tag{9}$$

Usando el principio de D´Alembert:

- Ubicamos al observador en el coche en movimiento.
- El observador desde el sistema de referencia no inercial, el coche en movimiento, verá a la esferita "*A*" en equilibrio.
- Agregamos la fuerza inercial ($F´$) en dirección opuesta al movimiento acelerado.

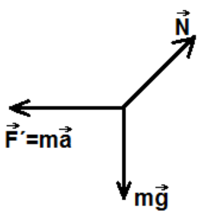

FIGURA 4. Diagrama de fuerzas de la esferita "*A*" en equilibrio para un observador en el coche.

Las tres fuerzas forman un polígono cerrado:

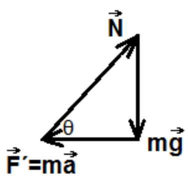

FIGURA 5. Relación entre las fuerzas en equilibrio.

$$\tan(\theta) = \frac{mg}{ma} = \frac{g}{a} = 1.33, \qquad \theta = 53^{\circ}\,. \tag{10}$$

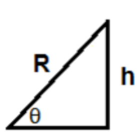

FIGURA 6. Relación entre R, h y θ, en equilibrio.

$$h = R\,\mathrm{sen}(\theta) = R\,\mathrm{sen}(53^{\circ}), \tag{11}$$

$$h = 0.8\,R. \tag{12}$$

Ejemplo 2: En la figura se pide calcular la mínima aceleración de M_2 para que M_1 no resbale sobre M_2 con coeficiente de fricción estático 0.2, considere $g = 9.8$ m/s^2.

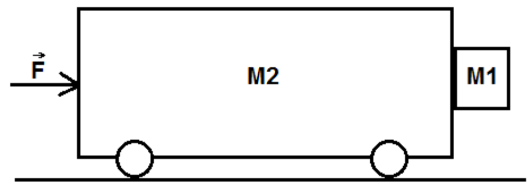

FIGURA 7. Figura del ejemplo 2.

Solución utilizando el método de Newton.

- Diagrama de cuerpo Libre.
- En la dirección del movimiento acelerado $\sum F_x = ma_x$
- En la dirección perpendicular al movimiento acelerado $\sum F_y = 0$

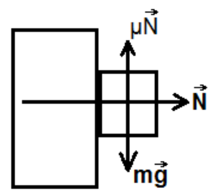

FIGURA 8. Diagrama de cuerpo libre, ejemplo 2.

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}, \quad \sum \vec{F}_y = \vec{0}, \tag{13}$$

$$N = m_1 a, \quad \mu\,N = m_1 g, \tag{14}$$

$$\frac{\mu\,N}{N} = \frac{m_1 g}{m_1 a}, \quad a = \frac{g}{a}. \tag{15}$$

$$a = \frac{g}{\mu} = \frac{9.8m/s^2}{0.2}, \tag{16}$$

$$a = 49\;m/s^2. \tag{17}$$

Usando el principio de D´Alembert

- Ubicamos el observador en M2
- Hacemos el diagrama de cuerpo libre al bloque M1
- Agregamos la fuerza de inercia. $F´ = ma$

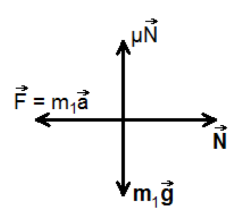

FIGURA 9. Diagrama de fuerzas en equilibrio.

$$\sum F_y = 0, \quad \mu\, N = m_1 g, \tag{18}$$

$$\sum F_x = 0, \quad N = m_1 a, \tag{19}$$

$$\frac{\mu\, N}{N} = \frac{m_1 g}{m_1 a}, \qquad \mu = \frac{g}{a}, \tag{20}$$

$$a = \frac{g}{\mu} = \frac{9.8\, m/s^2}{0.2}, \tag{21}$$

$$a = 49\ m/s^2. \tag{22}$$

Ejemplo 3: La figura muestra una caja de 10 kg sobre la plataforma de un camión de 2m del centro de ésta. Si el coeficiente de fricción entre la caja y el piso del camión es del 0.1 y el camión arranca con una aceleración de 1.14 m/s^2. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la caja salga de la plataforma?. Considere g = 9.8 m/s^2.

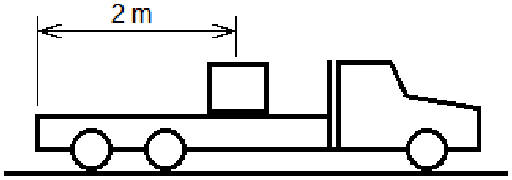

FIGURA10. Figura del ejemplo 3.

Solución utilizando el método de Newton.

- Cuando el camión arranca, la caja tiende a quedarse, luego la fuerza de rozamiento actúa hacia delante.
- Calcular la aceleración de la caja respecto a tierra.

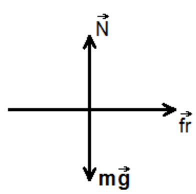

FIGURA 11. Diagrama de cuerpo libre.

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_1, \quad \sum \vec{F}_y = \vec{0}, \tag{23}$$

$$\mu\, N_1 = m a_1, \qquad N_1 = mg, \tag{24}$$

$$\mu\, m\, g = m\, a_1, \qquad a = \mu\, g\,, \tag{25}$$

$$a = 0.98\ m/s^2\ . \tag{26}$$

- Calcular el tiempo (t) en que la caja abandonaría la plataforma del camión.

- La caja se mueve hacia atrás con aceleración a_1

$$d_1 = V_o\, t + \frac{1}{2}\, a_1\, t^2 = \frac{1}{2}\, a_1\, t^2. \tag{27}$$

- El camión se mueve hacia adelante con aceleración a

$$d_2 = V_o\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2 = \frac{1}{2}\, a\, t^2. \tag{28}$$

- Ambos cuerpos demoran el mismo tiempo.

$$d_2 - d_1 = 2m = \frac{1}{2}(a - a_1)\, t^2, \tag{29}$$

$$2m = \frac{1}{2}(a - a_1)\, t^2, \tag{30}$$

$$4m = (a - a_1) t^2, \tag{31}$$

$$t = \sqrt{\frac{4m}{a - a_1}} = \sqrt{\frac{4m}{1.14 m/s^2 - 0.98 m/s^2}}, \tag{32}$$

$$t = 5.00\ m/s^2. \tag{33}$$

Usando el principio de D´Alembert

- Ubicar el observador en el camión (SRNI).
- Agregar el DCL la fuerza inercial $F´=ma$.

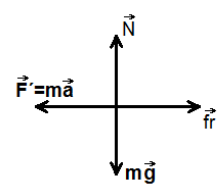

FIGURA 12. Diagrama de fuerzas en equilibrio.

- El observador desde el camión ve al bloque moviéndose con una aceleración a_1 hacia atrás.

$$\sum \vec{F}_x = m\, \vec{a}_1, \quad \sum \vec{F}_y = \vec{0}, \tag{34}$$

$$F' - fr = m a_1, \quad N = mg, \tag{35}$$

$$ma - \mu N = m a_1, \tag{36}$$

$$ma - \mu m g = m a_1, \tag{37}$$

$$a_1 = a - \mu g = 1.14\, m/s^2 - 0.1 * 9.8\, m/s^2, \tag{38}$$

$$a_1 = 0.16\, m/s^2\ . \tag{39}$$

- Calcular el tiempo t

$$d = V_o\ t + \frac{1}{2} a_1 t^2\ , \tag{40}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\, d}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 * 2m}{0.16 m/s^2}}, \tag{41}$$

$$t = 5 \text{ s.} \tag{42}$$

Ejemplo 4: Considere el péndulo cónico mostrado en la figura. Si "*h*" es la distancia del punto de suspensión al plano del movimiento, *R* el radio de la circunferencia descrita por la masa "*m*" y "*L*" es la longitud de la cuerda, entonces, calcular el período del péndulo.

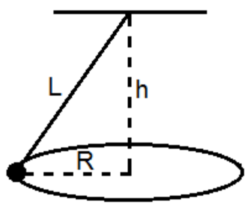

FIGURA 13. Figura del ejemplo 4.

Solución usando el principio de D´Alembert

- Ubicamos el observador sobre la esferita (SRNI), mientras ésta gira, para este observador la esferita está en reposo.
- Agregar la fuerza de inercia ($F_{cf} = m\, a_{cf}$)

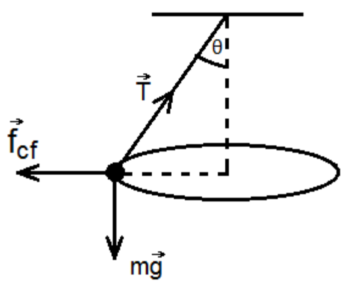

FIGURA 14. Diagrama de cuerpo libre.

- Si la esfera está en equilibrio.

$$\sum F = 0\,. \tag{43}$$

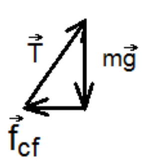

FIGURA 15. Relación geométrica entre las fuerzas.

$$\tan(\theta) = \frac{f_{cf}}{mg} = \frac{m\omega^2 R}{mg}, \tag{44}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\omega^2 R}{g}. \tag{45}$$

- Del gráfico original

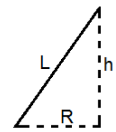

FIGURA 16. Relación entre *R*, *L* y *h*.

$$\tan(\theta) = \frac{R}{h}, \tag{46}$$

$$\frac{R}{h} = \frac{\omega^2 R}{g}, \tag{47}$$

$$\frac{R}{h} = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{R}{g}, \tag{48}$$

$$T^2 = \frac{4\pi}{R}\frac{hR}{g}, \tag{49}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}. \tag{50}$$

Ejemplo 5: Una plataforma circular giratoria se encuentra en el interior de un ascensor. Si el ascensor sube con una aceleración ($a = g$). Hallar la máxima velocidad angular "ω" con que puede girar el disco de radio 10 cm, tal que el bloque de masa m = 3 kg no salga disparado, el coeficiente estático entre el disco y el bloque es de 0.5.

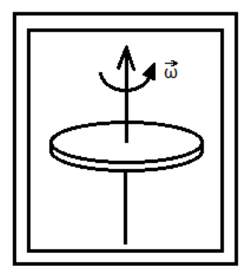

FIGURA 17. Figura del ejemplo 5.

- Solución usando el método de Newton

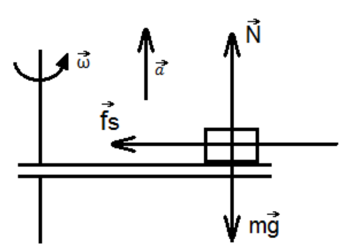

FIGURA 18. Diagrama de cuerpo libre.

$$\sum \vec{F}_y = m\,\vec{a}, \tag{51}$$

$$N - mg = ma \quad a = g, \tag{52}$$

$$N = ma + mg \quad m(2g), \tag{53}$$

$$N = 2mg, \quad (54)$$

$$\sum \vec{F}_x = m\, a_{cp}, \quad (55)$$

$$\mu_s N = m\, \omega^2\, R, \quad (56)$$

$$\mu_s\, 2\, m\, g = m\, \omega^2\, R, \quad (57)$$

$$\omega^2 = \frac{2\,\mu_s g}{R}, \quad (58)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,\mu_s\, g}{R}} = 10\ rad/s. \quad (59)$$

Solución utilizando el principio de D´Alembert.

- Si ubicamos el observador sobre la plataforma giratoria (junto al bloque)
- Adicionamos al DCL las fuerzas inerciales:
  1ro: $F_{cf} = ma_{cp}$ sería la fuerza radial que trata de sacar para afuera al bloque.
  2do: La fuerza inercial ($F´ = ma$) sería una fuerza hacia abajo que presiona al bloque sobre la plataforma.
- La máxima velocidad "ω" para cuando el bloque quiere deslizar.

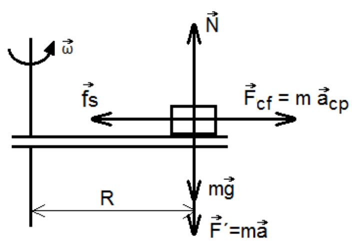

FIGURA 19. Diagrama de fuerzas en equilibrio.

- El observador ve al bloque en reposo.

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0}, \quad (60)$$

$$N = mg + ma = m(a+g) \qquad \text{(I)}, \quad (61)$$

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0}, \quad (52)$$

$$f_s = m\, a_{cp}, \quad (53)$$

$$\mu\, N = m\, \omega^2\, R \qquad \text{(II)}, \quad (54)$$

$$\text{I + II} \rightarrow \quad \mu_s = \frac{\omega^2 R}{a+g}, \quad (55)$$

$$\rightarrow \quad \omega^2 = \frac{\mu_s (a+g)}{R}, \quad (56)$$

$$\omega = 10\ rad/s. \quad (57)$$

IV. CONCLUSIONES

La busqueda de soluciones en la resolución de problemas de física en el tema de dinámica, aplicando el método de Newton y el criterio de D´Alembert, permite al estudiante desarrollar habilidades de razonamiento lógico. La solución de situaciones física en sistemas no inerciales de referencia requiere de la introducción de fuerzas de inercia, que no están condicionadas por la interacción de los cuerpos sino por las propiedades del sistema acelerado. El criterio de D´Alembert es un método más simple y directo en la solución de situaciones en sistemas no inerciales de referencia, el mismo ubica al observador en el sistema acelerado, combinando el estado de equilibrio y la composición de movimientos. Los ejemplos presentados han sido seleccionados entre un conjunto más amplio de problemas resueltos, los mismos permiten mostrar las vías de solución por los dos métodos, resultando más simple la solución obtenida por medio del criterio de D´Alembert.

REFERENCIAS

[1] Concari, S. B. y Giorgi, S. M., *Los problemas resueltos en textos universitarios de física*, Enseñanza de las Ciencias **18**, 381-390 (2000).

[2] Méndez-Coca. D., *Influencia de la inteligencia y la metodología de enseñanza en la resolución de problemas* de Física. Perfiles Educativos, Vol. XXXVI, Núm. 146, IISUE-UNAM30, (2014).

[3] Ceberio, M., *La resolución de problemas de física general en la universidad: una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de situaciones problemáticas abiertas*. Tesis doctoral. Departamento de Física Aplicada. Universidad del País Vasco. (2004).

[4] Ceberio, M., Guisasola, J. y Almudí, J.M., *¿Cuáles son las innovaciones didácticas que propone la investigación en resolución de problemas de física y qué resultados alcanzan?*, Enseñanza de las Ciencias **26**, 419–430 (2008).

[5] Gil, J., F. Solano, L.M. Tobaja, P. Monfort, *Propuesta de una herramienta didáctica basada en la V de Gowin para la resolución de problemas de física,* Revista Brasileira de Ensino de Física **35**, 2402 (2013).

[6] Mestre-Gómez, U., *La formación de habilidades en estudiantes de ingeniería a través de la resolución de problemas de Física*, Revista Pedagogía Universitaria, Vol. 7 No. 1, (1999).

[7] Becerra-Labra, C., Gras-Martí, A. y Martínez-Torregrosa, J., *¿De verdad se enseña a resolver problemas en el primer curso de física universitaria? La resolución de problemas de "lápiz y papel" en cuestión*, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 299 – 308 (2005).

[8] Tarazona, E., Física. *Problemas. (*Ediciones Cuzcano 2 006 5, La Habana, 2005),

[9] Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., Freedman, R. A., *Física Universitaria* Vol. 1 (Editorial Pearson, México, 2009).