

LEMNISCATAS 3D^{*}

RAFAEL ORTEGA^{**}

MARCO PALUSZNY^{***}

Recibido: 1 Nov 2001

Resumen

Una lemniscata 3D es una superficie que consiste en los puntos cuyo producto de distancias a un conjunto (finito) de puntos fijos ó focos es constante. En este trabajo se introducen las lemniscatas 3D en el contexto de la modelación geométrica, se explora en particular, el caso de tres focos, especialmente en lo relativo a la deformación controlada.

Palabras clave: lemniscata, modelación implícita, superficie cerrada, superficie algebraica, deformación interactiva.

Abstract

A 3D lemniscate is a surface consisting of all points whose product of distances to a (finite) set of points or foci is constant. We introduce 3D lemniscates in the context of geometric modelling and consider its deformation, paying attention to disconnect-edness issues. We deal mainly with lemniscates of three foci.

Keywords: lemniscate, implicit modelling, closed surface, algebraic surface, interactive deformation.

Mathematics Subject Classification: 68U05, 65D17, 65D18

1. Introducción

El problema de modelaje de objetos tridimensionales, tanto por medio del ajuste a conjuntos de datos prefijados, como también a través de técnicas de “mano alzada” deformando interactivamente la superficie, se puede abordar esencialmente con dos técnicas; parches paramétricos y por medio de superficies implícitas. En este trabajo tratamos el problema de modelar superficies cerradas.

^{*}Los autores agradecen el apoyo del Conicit (proyecto G97-000651) a la presente investigación.

^{**}Departamento de Matemáticas. Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela. E-mail: jortega@thor.uc.edu.ve

^{***}Laboratorio de Computación Gráfica y Geometría Aplicada. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela. E-mail: marco@ciens.ucv.ve

La modelación de una superficie cerrada por medio de parches paramétricos obliga a hacer un seguimiento de las condiciones de conexión continua (y usualmente también de la continuidad de los planos tangentes) entre parches adyacentes.

Lo que proponemos es una técnica de modelación implícita con superficies de grado 4, 6 y 8, definidas por varios puntos (estos puntos se denominan focos) y consideramos familias de superficies definidas por 2, 3 ó 4 focos. Estas superficies, introducidas por Erdős [2], las denominaremos lemniscatas tridimensionales, pues generalizan las lemniscatas clásicas en el plano. Las lemniscatas tridimensionales dependen en forma natural de parámetros con significado geométrico, lo que facilita el control interactivo de la componente con la que se modela. (En general una lemniscata 3D es una superficie que tiene varias componentes conexas).

La modelación con la familia completa de superficies implícitas de un grado fijo n depende de $2\binom{n+2}{3}$ parámetros (por ejemplo para grado 4 la superficie depende de 40 parámetros, para grado 6 de 112 parámetros, etc), esto hace que el problema, en general, sea inmanejable. Las lemniscatas tridimensionales que proponemos de grados 4 y 6, dependen solamente de 7 y 13 parámetros, respectivamente.

2. Lemniscatas

Dados n puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^3$ el conjunto de puntos $\mathbf{x} = (x, y, z)$ tales que el producto de las distancias $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ es un valor fijo, se denomina *lemniscata* 3D. En coordenadas, la ecuación de la lemniscata dada por los puntos $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ y un valor ρ es:

$$F(x, y, z) = \prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2] = \rho \quad (1)$$

Los puntos \mathbf{x}_i se denominan *focos* de la lemniscata. Un conjunto dado de focos determina una familia de lemniscatas y cada miembro de la familia corresponde a un valor del parámetro $\rho > 0$. Si $\rho = 0$ la superficie se reduce a los focos únicamente. Denotamos mediante F_ρ al elemento de la familia cuya ecuación es $F(x, y, z) - \rho = 0$.

Cuando los *focos* yacen en un plano, digamos $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, 0)$ para cada i , entonces es natural considerar las curvas lemniscáticas o lemniscatas 2D. La ecuación de una lemniscata 2D es un poco más sencilla :

$$\prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] - \rho = 0 \quad (2)$$

Las lemniscatas 2D son objetos clásicos bien conocidos en el marco de la teoría de variable compleja [3]. En particular a la lemniscata de dos focos se le asocia el nombre de Bernoulli. La conexión de las lemniscatas 2D con ecuaciones diferenciales ha sido estudiada en [5] y una aplicación a la generación automática de mallas es considerada en [6]. La clasificación de configuraciones de lemniscatas 2D fue dada en [1]. La Figura 1 ilustra el ejemplo más sencillo de una familia de lemniscatas: dos focos situados en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Para valores de ρ pequeños la lemniscata consta de dos componentes cuasicirculares y cada una de ellas encierra un foco. Para valores de ρ grandes la lemniscata consta de una sola curva que contiene a los dos focos en su interior. De hecho para $\rho = 1$ la lemniscata se asemeja a un ocho y corresponde a la curva de la familia que es la transición



Figura 1: Lemniscatas planas con dos focos

entre lemniscatas de dos componentes conexas ($\rho < 1$) y lemniscatas de una componente ($\rho > 1$). Lo que permite esta transición es que

$$[(x-1)^2 + (y)^2][(x+1)^2 + (y)^2] - 1 = 0 \quad (3)$$

es una curva singular y por ende aproxima tanto lemniscatas de una componente conexas como de dos componentes conexas. En este ejemplo $(0,0)$ es una singularidad.

Una curva $F(x, y) - \rho = 0$ se dice singular cuando existe un punto (x_0, y_0) , en la curva, tal que:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

El punto (x_0, y_0) se llama *singularidad*.

3. Lemniscatas 3D

Las lemniscatas 3D son superficies dadas implícitamente y están determinadas por sus focos y el parámetro ρ . Si todo punto \mathbf{p} de la lemniscata satisface $(\nabla F)_{\mathbf{p}} \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita, la lemniscata es una superficie suave. Cuando la lemniscata $F(x, y, z) - \rho = 0$ contiene puntos \mathbf{p} donde $(\nabla F)_{\mathbf{p}} = 0$, se denomina lemniscata singular y los puntos donde esto ocurre se llaman *singularidades*. Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, son focos de una lemniscata 3D, podemos definir los siguientes conjuntos:

$$F_{\rho,-} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) - \rho < 0\} \quad (5)$$

$$F_{\rho,+} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) - \rho > 0\} \quad (6)$$

Los conjuntos $F_{\rho,-}$ y $F_{\rho,+}$ son el interior y el exterior, respectivamente, del conjunto F_{ρ} .

Teorema 1. *Los conjuntos $F_{\rho,-}$ y $F_{\rho,+}$ son no vacíos. Además si $\rho_1 < \rho_2$ entonces $F_{\rho_1} \subset F_{\rho_2,-}$*

Demostración: Sea \mathbf{u} uno de los focos de la lemniscata, entonces $F_{\rho}(\mathbf{u}) = -\rho < 0$, de modo que $F_{\rho,-}$ contiene a los focos y es no vacío. Para verificar que $F_{\rho,+} \neq \emptyset$, observamos que como $F(x, y, z)$ es un polinomio en tres variables se tiene que $\lim F(x, y, z) = \infty$ cuando $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$, así dado $\rho > 0$ podemos escoger $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F(\mathbf{u}) > \rho$, esto muestra que $F_{\rho,+} \neq \emptyset$.

Los focos y el parámetro ρ parecen proveer una forma para deformar la superficie que definen; por ejemplo si fijado un valor de ρ se aleja un foco, la superficie se estira en la dirección en que se movió éste. Sin embargo, si un foco se aleja más allá de un cierto umbral entonces la superficie se desconecta, esto es, cambia su número de componentes conexas. Similarmente, fijando los focos, hay rangos de ρ para los cuales la lemniscata 3D: $F(x, y, z) - \rho = 0$, tiene un número constante de componentes conexas. Por lo tanto

para que las lemniscatas 3D puedan ser útiles en modelación debe controlarse el proceso de desconexión y para ésto han de entenderse las circunstancias bajo las cuales cambia el número de componentes conexas.

Sea $F(x, y, z) - \rho = 0$ la familia de lemniscatas 3D con focos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Y sean $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_r$ los puntos, distintos de los focos, donde se anula el gradiente de F; esto es, los \mathbf{s}_i son puntos, distintos de los focos, donde se anulan simultáneamente las tres derivadas parciales de $F(x, y, z)$. Si tomamos dos valores consecutivos de los parámetros $F(\mathbf{s}_i)$ entonces para cualquier ρ entre esos dos valores el número de componentes conexas de $F(x, y, z) - \rho = 0$ es siempre el mismo. Para hallar los puntos singulares debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Como:

$$F(x, y, z) = \prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2] \quad (8)$$

Los puntos singulares son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 2 \sum_{i=1}^n (x - x_i) \Delta_i(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 2 \sum_{i=1}^n (y - y_i) \Delta_i(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 2 \sum_{i=1}^n (z - z_i) \Delta_i(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

donde $\Delta_i(x, y, z) = \prod_{j=1, j \neq i}^n [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2]$

Observación 1. *Note que cada foco es solución del sistema anterior, estas soluciones las denominamos singularidades triviales.*

Lema 1. $\Delta_i(a, b, c) = 0$ si y sólo si el punto (a, b, c) es un foco distinto del foco (x_i, y_i, z_i)

El teorema que sigue es una generalización del teorema de Gauss-Lucas [4] que dice que los ceros de la derivada de un polinomio complejo están en la cápsula convexa de las raíces del polinomio.

Teorema 2. *Si*

$$F(x, y, z) = \prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2] \quad (10)$$

entonces los puntos singulares, no triviales, de F están en el interior de la cápsula convexa generada por los focos.

Demostración: Suponga que (a_0, b_0, c_0) es un punto singular, no trivial, de $F(x, y, z)$ entonces (a_0, b_0, c_0) satisface el sistema de ecuaciones (7), así que se tiene:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (a_0 - x_i) \Delta_i(a_0, b_0, c_0) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (b_0 - y_i) \Delta_i(a_0, b_0, c_0) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (c_0 - z_i) \Delta_i(a_0, b_0, c_0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

De aquí obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{i=1}^n x_i \Delta_i(a_0, b_0, c_0) / \Delta \\ b_0 &= \sum_{i=1}^n y_i \Delta_i(a_0, b_0, c_0) / \Delta \\ c_0 &= \sum_{i=1}^n z_i \Delta_i(a_0, b_0, c_0) / \Delta \end{aligned} \quad (12)$$

Con $\Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ y $\Delta_i(a_0, b_0, c_0) \neq 0, \forall i = 1 \dots n$ ya que (a_0, b_0, c_0) no es un foco. Esto muestra que $a_0 = \sum_{i=1}^n (\Lambda_i) x_i$, con $0 < \Lambda_i < 1$ y $\sum_{i=1}^n (\Lambda_i) = 1$. Igualmente para b_0 y c_0 , esto nos permite concluir que (a_0, b_0, c_0) es una combinación convexa de los focos. y está en el interior de la cápsula convexa generada por ellos.

Observación 2. *El sistema de ecuaciones anteriores, como ya lo mencionamos, es un sistema de ecuaciones no lineales, y en general hay que utilizar técnicas de cálculo numérico para su resolución.*

4. Lemniscatas 3D con focos coplanares

Cuando los focos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son coplanares, las singularidades de la lemniscata, de acuerdo con el teorema de Gauss-Lucas, yacen en el mismo plano que contiene a los focos. En tal caso podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que los focos yacen en el plano $z = 0$ de tal manera que los puntos singulares también yacen en este plano. En este caso la ecuación de la familia de lemniscatas es:

$$F_\rho(x, y, z) = \prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2] - \rho = 0 \quad (13)$$

Si hacemos $z = 0$ en la expresión anterior obtenemos la ecuación de una familia de lemniscatas planas, que por abuso de lenguaje, continuaremos denotando por $F_\rho(x, y)$.

La lemniscata 2D:

$$F_\rho(x, y) = \prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] - \rho = 0 \quad (14)$$

se puede estudiar con técnicas de variable compleja. Si hacemos $z_i = x_i + iy_i$ el polinomio $f(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$ es tal que :

$$F(x, y) = \prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] = \prod_{i=1}^n [(z - z_i)(\overline{z - z_i})] = |f(z)|^2 \quad (15)$$

La fórmula que sigue nos muestra que las singularidades no triviales de la lemniscata 3D coinciden con las raíces de la derivada del polinomio $f(z)$:

$$|\nabla F(x, y)|^2 = 4|F(x, y)||f'(z)|^2 \quad (16)$$

En consecuencia las lemniscatas singulares de la familia $F_\rho(x, y, z) = \prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2] - \rho$ corresponden a los valores de ρ tales que: $\rho = |F(\omega_k)| = |f(\omega_k)|$, donde $f'(\omega_k) = 0$.

5. Algunos ejemplos simétricos

Si los focos forman un triángulo equilátero podemos escoger el sistema de referencia adecuadamente de tal forma que sus coordenadas sean:

$$(-a, 0), (a, 0) \text{ y } (0, \sqrt{3}a)$$

El polinomio $f(z)$ viene dado por:

$$f(z) = (z^2 - a^2)(z - i\sqrt{3}a) \quad (17)$$

y se tiene una singularidad doble en $\omega_0 = \frac{i\sqrt{3}a}{3}$. La Figura 2 ilustra lemniscatas con los mismos focos ubicados en los vértices de un triángulo equilátero y tres valores distintos de ρ . La lemniscata singular ocurre para

$$\rho_0 = |f(\omega_0)|^2 = \frac{64}{27}a^6 \quad (18)$$

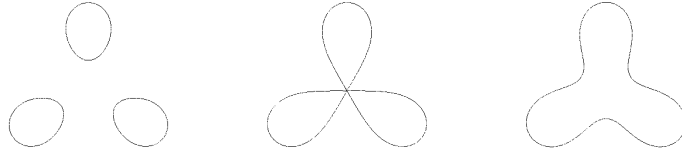


Figura 2: Lemniscatas planas con focos formando un triángulo equilátero

La Figura 3 muestra cuatro lemniscatas 3D con focos en los vértices de un triángulo equilátero; la vista es en perspectiva desde un punto en el primer octante.

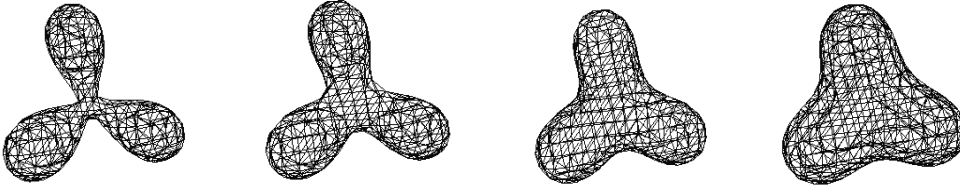


Figura 3: Miembros de la familia 3D correspondientes al caso anterior

Cuando los focos forman un triángulo isósceles escogemos el sistema de coordenadas de modo que su expresión sea:

$$(-a, 0), (a, 0) \text{ y } (0, b)$$

Entonces:

$$f(z) = (z^2 - a^2)(z - ib) \quad (19)$$

$$f'(z) = 3z^2 - 2biz - a^2 \quad (20)$$

y las raíces de la derivada son:

$$\frac{1}{3}bi \pm \frac{1}{3}\sqrt{3a^2 - b^2} \quad (21)$$

Si $b < \sqrt{3}a$, las raíces son simétricas con relación al eje OY y se tiene que hay un único valor $\rho = \rho_0$ para el cual la lemniscata es singular, ver Figura (4a).

$$\rho_0 = |f(\frac{1}{3}bi + \frac{1}{3}\sqrt{3a^2 - b^2})|^2 = |f(\frac{1}{3}bi - \frac{1}{3}\sqrt{3a^2 - b^2})|^2 \quad (22)$$

En este caso, cuando ρ varía de un valor menor que ρ_0 a otro mayor, el número de componentes conexas pasa de tres a una.

Si $b > \sqrt{3}a$ tenemos dos raíces complejas de la forma:

$$z_1 = \frac{1}{3}i(b + \sqrt{b^2 - 3a^2}) \quad (23)$$

$$z_2 = \frac{1}{3}i(b - \sqrt{b^2 - 3a^2}) \quad (24)$$

De manera que los puntos singulares, en este caso, yacen sobre el eje OY y los valores del parámetro ρ correspondientes son:

$$\rho_1 = |f(\frac{1}{3}i(b + \sqrt{b^2 - 3a^2}))|^2 \quad (25)$$

$$\rho_2 = |f(\frac{1}{3}i(b - \sqrt{b^2 - 3a^2}))|^2 \quad (26)$$

Se puede comprobar que $\rho_1 < \rho_2$ y la familia de lemniscatas 3D correspondiente tiene dos lemniscatas singulares tal como se ilustra en la Figura (4b). En este caso, las lemniscatas no singulares de esta familia son superficies que constan de tres, dos ó una componente conexas según sea $\rho < \rho_1$, $\rho_1 \leq \rho < \rho_2$ ó $\rho_2 \leq \rho$, respectivamente.

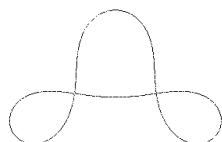


Figura 4a

La lemniscata singular, $b < \sqrt{3}a$

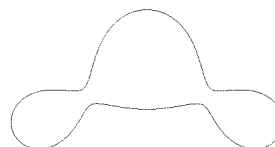


Figura 4b

Lemniscatas singulares, $b > \sqrt{3}a$

Si ubicamos los focos en tres puntos arbitrarios del espacio, entonces en la familia de lemniscatas con esos focos habrá dos lemniscatas singulares (ó una si la multiplicidad de la singularidad es dos, lo cual corresponde a que los focos forman un triángulo equilátero). Escogiendo un sistema de coordenadas adecuado, el cálculo de las singularidades se reduce a resolver una ecuación cuadrática.

Evaluando la función F (ver (1)) en las dos singularidades obtenemos dos valores que denotaremos por ρ_1 y ρ_2 . Para cualquier $\rho > \max(\rho_1, \rho_2)$ la lemniscata 3D $F(x, y, z) - \rho = 0$ tiene una única componente conexas que contiene en su interior a los tres focos. Esta superficie se puede deformar de dos maneras:

1. Modificando el valor del parámetro ρ en el rango $\max(\rho_1, \rho_2) < \rho < \infty$.
2. Cambiando la ubicación en el espacio de cualquiera de los tres focos, para lo cual es necesario recalcular ρ_1 y ρ_2 y escoger ρ mayor que estos nuevos valores de los ρ_i .

Una alternativa razonable cuando se varían los focos consiste en mantener el valor de $\rho = \frac{11}{10}\max(\rho_1, \rho_2)$. En resumen podemos deformar superficies cerradas de grado fijo (en nuestro caso de grado algebraico 6) en cualquier dirección y controlar su tensión, i.e. ajuste a la lemniscata singular $F(x, y, z) = \max(\rho_1, \rho_2)$.



Fig 5: Deformación por desplazamiento de un foco

La modelación con lemniscatas $F(x, y, z) = \rho$ tales que $\min(\rho_1, \rho_2) < \rho < \max(\rho_1, \rho_2)$ es más complicada porque hay que tomar en cuenta la confluencia de lemniscatas singulares, cuando se varía la posición de los focos. La solución para este problema será presentada en un próximo trabajo.

Referencias

- [1] Catanese, F.; Paluszny, M. (1991) “Polynomial lemniscates trees and braids”, *Topology* **30**: 623–640.
- [2] Erdős, P. (1976) “Extremal problems on polynomials”, in: G.Lorentz, C.Chui y L. Schumaker (Eds), *Approximation Theory II*, Academic Press, New York: 347–355.
- [3] Markushevich, A. (1970) *Teoría de las Funciones Analíticas*. Tomo I. Editorial Mir. Moscú.
- [4] Marden, M. (1966) *Geometry of Polynomials*. Mathematical Surveys, AMS, Providence RI.
- [5] Paluszny, M. (1984) “On periodic solutions of polynomial ODE’s in the plane”, *J. Differential Equations* **53**: 24–29.
- [6] Yáñez, E. (1999) “Deformable orthogonal grids: lemniscates”, *J. Computational and Applied Mathematics* **104**: 41–48.
- [7] Walsh, J.L. (1985) *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*. AMS Colloquium Publications, Vol XX, Providence RI.