REVISTA DE MATEMÁTICA: TEORÍA Y APLICACIONES 2008 **15**(2) : 101–107
CIMPA – UCR ISSN: 1409-2433

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE UN TEOREMA DE BENABOU DE BOOLEANIDAD DE UN TOPOS ELEMENTAL

OSVALDO ACUÑA ORTEGA*

Recibido/Received: 16 May 2008 — Aceptado/Accepted: 11 Jul 2008

Resumen

En este trabajo probamos que en un topos elemental, todo objeto A tal que $A + A$ tiene una función de elección interna, entonces todo subobjeto de A tiene complemento. También consideramos un concepto débil de función de elección y probamos que cualquier objeto $K-$finito decidible posee una función de elección de este tipo internamente.

Palabras clave: Teoría de topos, finitud, axioma de elección.

Abstract

We prove that any elementary topos any objet A such that $A + A$ has an internal choice map, then every subobject of A has complement. We also consider a weaker concept of choice map and we prove that any $K-$finite decidable objet has this kind of choice map (internally).

Keywords: Topoi, finiteness, choice.

Mathematics Subject Classification: 18B25.

1 Introducción

Jean Benabou probó en [2] que en un topos elemental es booleano si y solo si el objeto $1 + 1$ tiene una función de elección (interna). En esta nota probaremos que si A es un objeto de un topos elemental (o simplemente un topos) entonces todo subobjeto de A tiene complemento si $A + A$ tiene una función de elección interna. También introduciremos una versión más débil del concepto de función de elección y probaremos que todo objeto $K-$finito decidible tiene una función de elección (interna) de este tipo, en particular $1 + 1$ tiene una función de elección de esta clase internamente.

*CIMPA, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

2 Desarrollo

Definición 2.1. **(a)** *Sea $f : X \to Y$ un morfismo en un topos $\mathbf{E}$, denotamos por $\pi(f)$ al objeto de $\mathbf{E}$ definido por*

$$\pi(f) = \left\{g \in X^Y / f \circ g = id_Y\right\} \subseteq X^Y$$

(b) *Si X es un objeto de $\mathbf{E}$, sean*

$$\mathcal{E}_X = \left\{(X', x)/X' \subseteq X \wedge x \in X'\right\},$$

$pr_1 : \mathcal{E}_X \to \mathcal{P}(X)$ y $pr_2 : \mathcal{E}_X \to P(X)$ son las dos proyecciones y $\mathcal{P}(X) = \Omega^X$ es el "conjunto de partes de X". La imagen de pr_1 es el objeto

$$\mathcal{P}^+(X) = \left\{X' \subseteq X/ \exists_{x \in X}\, x \in X'\right\}$$

(c) *Una función de elección para X es un morfismo $f : \mathcal{P}^+(X) \to X$ tal que*

$$\models \forall_{X' \in \mathcal{P}^+(X)} f(X') \in X'.$$

(d) *Sea X un objeto de $\mathbf{E}$, decimos que X es un objeto de elección (interno) si*

$$\models\ \exists_{f \in X}\ \mathcal{P}^+(X)\ \forall_{X' \in \mathcal{P}^+(X)}\ f(X') \in X'$$

lo que es equivalente a afirmar que $C(X) \to 1$ es un epimorfismo, donde

$$C(X) = \left\{f \in X^{\mathcal{P}^+(X)}/ f \textit{ es una función de elección}\right\}$$

Nota. Si $pr_1 : \mathcal{E}_X \to \mathcal{P}^+(X)$ es tal que $pr_1(X', x) = X'$, entonces X es un objeto de elección (interno) si y solo si $\pi(pr_1) \to 1$ es un epimorfismo.

Definición 2.2. *Sea $j : A' \to A$ un monomorfismo en un topos $\mathbf{E}$ si $A \xrightarrow{i_1} A + A \xleftarrow{i_2} A$ es un diagrama coproducto. Sean*

$$R^* = \cap\{R \subseteq (A + A) \times (A + A)/R \textit{ es una relación de equivalencia} \wedge$$

$$\left\{(i_1(j(a)), i_2(j(a)))/a \in A'\right\} \subseteq R\}$$

$$B = (A + A)/R^*,\ r : A + A \to B \textit{ el morfismo cociente}, j_1 = r \circ i_1, j_2 = r \circ i_2$$

Observación. R^* es una relación de equivalencia en $A + A$ y r es un epimorfismo.

Lema 2.1. *Sea $j : A' \to A$ un monomorfismo en un topos $\mathbf{E}$, con las notaciones de la definición 2.2, se tiene que*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{j} & A \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_2} \\ A & \xrightarrow[j_1]{} & B \end{array} \tag{1}$$

es un coproducto fibrado.

PRUEBA. Como $r \circ i_1 \circ j = r \circ i_2 \circ j$ entonces $j_1 \circ j = j_2 \circ j$ y así el diagrama (1) conmuta. Suponga se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "g_1"] \\ A \arrow[r, "g_2"'] & C \end{tikzcd} \tag{2}$$

Sea $g : A + A \to C$ tal que $g \circ i_1 = g$, $g \circ i_2 = g_2$ y R_g la relación definida en $A + A$ por:

$$\models (c, c') \in R_g \iff g(c) = g(c').$$

Como $g_1 \circ j = g_2 \circ j$ se tiene $g \circ i_1 \circ j = g \circ i_2 \circ j$ y entonces

$$\begin{aligned} \models a \in A' &\Rightarrow g(i_1(j(a))) = g(i_2(j(a))) \\ &\Rightarrow (i_1(j(a)), i_2(j(a))) \in R_g \end{aligned}$$

Entonces $\models \{(i_1(j(a)), i_2(j(a)))/a \in A'\} \subseteq R_g$, por lo tanto $R^* \subseteq R_g$.

Sea $k : B \to C$ tal que $\models k([s]) = g(s)$ donde $[s]$ es la clase de equivalencia de s respecto a R^*, $s \in A + A$.

Debemos probar que k está bien definida:

$$\begin{aligned} \models [s] = [s'] &\Rightarrow (s, s') \in R^* \\ &\Rightarrow (s, s') \in R_g \\ &\Rightarrow g(s) = g(s') \end{aligned}$$

Probemos ahora que k es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "j_2"'] \arrow[ddr, "g_2"] & \\ A \arrow[r, "j_1"] \arrow[drr, "g_1"'] & B \arrow[dr, dotted, "k"] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

Por definición de k tenemos que $k \circ r = g$ y entonces

$$k \circ j_1 = k \circ r \circ i_1 = g \circ i_1 = g_1, \text{ luego } k \circ j_1 = g_1 \text{ y}$$

$$k \circ j_2 = k \circ r \circ i_2 = g \circ i_2 = g_2, \text{ así se tiene que } k \circ j_2 = g_2$$

Suponga que existe otro morfismo $k' : B \to C$ tal que $k' \circ j_1 = g_1$ y $k' \circ j_2 = g_2$, entonces $k' \circ r \circ i_1 = g_1$ y $k' \circ r \circ i_2 = g_2$. Pero sabemos que $g : A + A \to C$ es único tal que $g \circ i_1 = g_1$, $g \circ i_2 = g_2$, por lo tanto $g = k' \circ r$; también tenemos que $g = k \circ r$ y entonces $k' \circ r = k \circ r$ y como r es un epimorfismo, se debe tener que $k' = k$. ■

El siguiente lema es un resultado de Jean Benabou [2]:

Lema 2.2. *Si*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{j} & A \\ {\scriptstyle j}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j_2} \\ A & \xrightarrow[j_1]{} & B \end{array} \tag{3}$$

es un coproducto fibrado en un topos $\mathbf{E}$, $A' \xrightarrow{j} A$ *es un monomorfismo y* $r : A + A \to B$ *es tal que* $r \circ i_1 = j_1$, $r \circ i_2 = j_2$ *donde* $A \xrightarrow{i_1} A + A \xleftarrow{i_2} A$ *es un coproducto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A' *es complementado en* A.

(ii) *existe* $r' : B \to A + A$ *tal que* $r \circ r' = id_B$.

(iii) *existe un morfismo* $1 \to \pi(r)$.

(iv) $\pi(r) \to 1$ *es un epimorfismo.*

Teorema 2.1. *Sea* A *un objeto de un topos* $\mathbf{E}$. *Si* $A + A$ *es un objeto de elección interno, entonces todo* $A' \rightarrowtail A$ *subobjeto de* A *tiene complemento.*

PRUEBA. Sea $r : A + A \to B$ como arriba, para probar que A' tiene complemento es suficiente observar que la siguiente fórmula

$$\exists_{h \in B^{A+A}}\ r \circ h = id_B$$

es válida en $\mathbf{E}$, ya que esto es equivalente a decir que $\pi(r) \to 1$ es un epimorfismo y por el lema 2.2 tendríamos que A' sería complementado en A.

Como $A + A$ es un objeto de elección interno entonces existe un morfismo de elección interno $g : \mathcal{P}^{+}(A + A) \to A + A$. Como $B \subseteq \mathcal{P}^{+}(A + A)$, por el lema 2.1, sea $h = g_{|B} : B \to A + A$. Entonces se tiene que $p \circ h = id_B$ internamente, es decir, la fórmula

$$\exists_{h \in B^{A+A}}\ r \circ h = id_B$$

es válida en $\mathbf{E}$. Entonces A' es complementado en A. ■

Definición 2.3. *Un topos* $\mathbf{E}$ *es booleano si todo* $A' \rightarrowtail A$ *subobjeto de cualquier objeto* A *de* $\mathbf{E}$ *tiene complemento.*

Corolario 2.1. *Si todo objeto de un topos* $\mathbf{E}$ *tiene una función de elección interna, entonces el topos* $\mathbf{E}$ *es booleano.*

Corolario 2.2. *Sea* $\mathbf{E}$ *un topos tal que para todo epimorfismo* $f : X \to Y$, *existe un morfismo* $g : Y \to X$ *tal que* $f \circ g = id_Y$. *Entonces todo objeto de* $\mathbf{E}$ *tiene una función de elección, en particular* $\mathbf{E}$ *es booleano.*

PRUEBA. Sea X objeto de $\mathbf{E}$, $pr_1 : \mathcal{E}_X \to \mathcal{P}^+(X)$ es un epimorfismo, luego existe $h : \mathcal{P}^+(X) \to \mathcal{E}_X$ tal que $pr_1 \circ h = id_{\mathcal{P}^+(X)}$, entonces
$g = pr_2 \circ h : \mathcal{P}^+(X) \to X$ es un morfismo de elección:

$$\begin{aligned} \models X' \in \mathcal{P}^+(X) &\Rightarrow h(X') \in \mathcal{E}_X \\ &\Rightarrow (X', g(X')) \in \mathcal{E}_X \;\; (pr_1 \circ h = id_{\mathcal{P}^+(X)} \wedge pr_2 \circ h = g) \\ &\Rightarrow g(X') \in X' \end{aligned}$$

entonces

$$\models \forall_{X' \in \mathcal{P}^+(X)} \, g(X') \in X'. \; \blacksquare$$

Las hipótesis del corolario 2.2 junto con la consecuencia de que $\mathbf{E}$ es booleano, es un resultado de R. Diaconescu [3].

Definición 2.4. *Sea $\mathbf{E}$ un topos y X un objeto de $\mathbf{E}$. Denote por $K(X)$ el subobjeto más pequeño de Ω^X, que es cerrado bajo uniones binarias y que contiene*
$\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$, $\{\cdot\}_X : X \to \Omega^X$. *$K(X)$ es llamado el objeto de los subobjetos $K-$finitos de X. Decimos que X es $K-$finito si $\ulcorner X \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de $K(X) \rightarrowtail \Omega^X$. $K^+(X)$ es el subconjunto más pequeo de Ω^X cerrado bajo las uniones binarias y que contiene a $\{\cdot\}_X : X \to \Omega^X$.*

Nota: $K^+(X) \subseteq K(X) \xleftarrow{\phi} 1$ es un diagrama coproducto ([1], p.206. Lema 1.5).

Definición 2.5. **(a)** *Sea X un objeto en un topos $\mathbf{E}$, $f : K^+(X) \to X$ es una función de elección finita si*

$$\models \forall_{X' \in K^+(X)} \, f(X') \in X'$$

(b) *decimos que X es decidible si la diagonal $\Delta : X \to X \times X$ tiene complemento en $X \times X$.*

Proposición 2.1. *Sea X un objeto decidible de un topos $\mathbf{E}$. Si $X', X'' \subseteq X$ y $f : K^+(X') \to X'$, $g : K^+(X'') \to X''$ son funciones de elección finitas y $C(f,g) : K^+(X' \cup X'') \to X' \cup X''$ es tal que*

$$C(f,g)(Z) = \begin{cases} g(Z \cap X''), \text{ si } Z \cap X' = \ulcorner \phi \urcorner; \\ f(Z \cap X'), \text{ si } Z \cap X' \in K^+(X'). \end{cases}$$

Entonces $C(f,g)$ es una función de elección finita.

PRUEBA. Probemos primero que $C(f,g)$ es una función. Como X es decidible tenemos que $K(X) \subseteq 2^X$ y $K(X)$ es un ideal del álgebra booleana 2^X. (Lema 6.1 de [1]); por lo tanto $X' \cap Z \in K(X')$ y $X'' \cap Z \in K(X'')$. Por otro lado sabemos que

$$\models \forall_{O \in K(X)} \, (O \in K^+(X) \vee O = \ulcorner \phi \urcorner)$$

Entonces $K^+(X' \cup X'')$ es la unión disjunta de

$$A = \left\{ Z \in K^+(X' \cup X'')/Z \cap X' = \ulcorner \phi \urcorner \right\} \text{ y}$$

$$B = \left\{ Z \in K^+(X' \cup X'')/Z \cap X' \in K^+(X') \right\},$$

por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \models Z \in A &\Rightarrow Z \cap X' = \ulcorner \phi \urcorner \\ &\Rightarrow Z \cap X'' \neq \ulcorner \phi \urcorner \\ &\Rightarrow Z \cap X'' \in K^+(X'') \end{aligned}$$

Por lo tanto $C(f,g)$ es una función ya que

$$C(f,g)|_A(Z) = g(Z \cap X'') \text{ y}$$

$$C(f,g)|_B(Z) = f(Z \cap X')$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} \models Z \in K^+(X' \cup X'') &\Rightarrow Z \cap X'' \in K^+(X'') \vee Z \cap X' \in K^+(X') \\ &\Rightarrow C(f,g)(Z) = g(Z \cap X'') \vee C(f,g)(Z) = f(Z \cap X') \\ &\Rightarrow C(f,g)(Z) \in Z \cap X'' \vee C(f,g)(Z) \in Z \cap X' \\ &\Rightarrow C(f,g)(Z) \in Z. \end{aligned}$$

Entonces $C(f,g)$ es una función de elección finita. ■

Definición 2.6. *Sea X un objeto de un topos* **E**. *Denote por $S(X)$ el subobjeto de Ω^X dado por*

$$\left\{ X' \in \Omega^X / \ \exists_{f \in \Omega^{\Omega^X \times X}} \ (f : K^+(X') \to X' \textit{ es una función de elección finita}) \right\}$$

Teorema 2.2. *Sea* **E** *un topos, X objeto de* **E**. *Si X es decidible entonces $K(X) \subseteq S(X)$.*

PRUEBA. Es suficiente demostrar que $\{\cdot\}_X : X \to \Omega^X$, $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factorizan a través de $K(X)$ y que $S(X)$ es cerrado bajo uniones binarias.

(i) $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de $S(X)$ ya que $K^+(\phi) = \phi$ y
$[|X' \subseteq \phi \ \wedge \ X' \in K^+(\phi)|] = \phi$.
Por lo tanto la fórmula $X' \subseteq \phi \ \wedge \ X' \in K^+(\phi) \Rightarrow id_\phi(X') \in X'$ es válida y entonces $id_\phi : \phi = k^+(\phi) \to \phi$ es una función de elección finita y entonces $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de $S(X)$.

(ii) $\{\cdot\}_X : X \to \Omega^X$ se factoriza a través de $S(X)$ ya que si $h : K^+(\{x\}) \to \{x\}$ está dado por $h(y) = x, \forall y \in K^+(\{x\})$, entonces h es una función de elección finita ya que:

$$\begin{aligned} \models y \in K^+(\{x\}) &\Rightarrow \ \exists_{z \in X} z \in y \wedge y \subseteq \{x\} \\ &\Rightarrow \ \exists_{z \in X} z \in y \wedge z = x \\ &\Rightarrow x \in y \\ &\Rightarrow h(y) \in y \end{aligned}$$

(iii) $S(X)$ es cerrado bajo uniones binarias.

$$\begin{aligned}\models X', X'' \in S(X) \Rightarrow \exists_{f,g\in\Omega^{\Omega^X\times X}} (f : K^+(X') \to X' \;\wedge g : K^+(X'') \to X'' \\ &\text{son funciones de elección finitas}) \\ &\Rightarrow C(f,g) : K^+(X' \cup X'') \to X' \cup X'' \\ &\text{es una función de elección finita} \\ &\Rightarrow X' \cup X'' \in S(X)\end{aligned}$$

Entonces por (i), (ii), (iii) se tiene que $K(X) \subseteq S(X)$. ■

Si X es un objeto de $\mathbf{E}$, sea $C_f(X)$ el subobjeto de $X^{K^+(X)}$ dado por

$$\left\{ h \in X^{K^+(X)} / h \text{ es una función de elección finita} \right\}$$

Corolario 2.3. *Sea X un objeto $K-$finito decidible en un topos $\mathbf{E}$. Entonces $C_f(X) \to 1$ es un epimorfismo; es decir, todo objeto $K-$finito decidible tiene una función de elección finita internamente.*

Corolario 2.4. *(Benabou). Todo objeto $K-$finito en un topos booleano es un objeto de elección interno.*

PRUEBA. Sea X, $K-$finito en un topos booleano $\mathbf{E}$. Por el Lema 1.4 de [1] se tiene $K(X) = 2^X$ y entonces $K^+(X) = (2^X)^+$, probando esto inmediatamente el corolario 2.4.

Referencias

[1] Acuña-Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) "Finiteness and decidability I", *Proc L.M.S. Dunham Symposium on Applications of Sheaf Theory*. Lectures Notes in Mathematics 753, Springer, Berlin: 80–100.

[2] Benabou, J. (1995) "Definability, finiteness, proyectivity and choice", (versión preliminar). Comunicación privada.

[3] Diaconescu, R. (1975) "Axiom of choice and complementation", *Proc. Amer. Math. Soc.* **51**(1): 176–178.