95
Amazônia
243
Revista de Educação em Ciências e Matemáticas
ISSN (versão *online*): 2317-5125

Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais

Mixed problems in textbooks: a classification based on conceptual fields theory

Carla Larissa Broza Halum Rodrigues [1]
Veridiana Rezende[2]

Resumo

A presente investigação tem como objetivo analisar problemas mistos propostos em uma coleção de livros didáticos de matemática do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais. Problemas mistos são aqueles que envolvem, ao menos uma vez, uma relação aditiva e uma relação multiplicativa. Para a análise desses problemas foram considerados os pressupostos estabelecidos por Gérard Vergnaud para o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, além das possibilidades de classes de problemas mistos divulgadas por Miranda (2019). Na coleção de livros didáticos analisada, foram identificados quarenta e seis (46) problemas mistos, que foram classificados em sete (7) classes. As análises mostram a predominância da classe proporção simples e composição de medidas, que somou dezenove (19) problemas mistos. Já a classe produto de medidas e composição de medidas foi identificada duas vezes na obra. Infere-se, com base na Teoria dos Campos Conceituais e nos resultados dessa investigação, que a variedade de diferentes situações de problemas mistos favorece/possibilita que estudantes mobilizem e se apropriem de diferentes raciocínios aditivo e multiplicativo ao longo de sua vivência escolar.

Palavras-chave: anos iniciais; campo aditivo; campo multiplicativo; didática da matemática; problemas mistos.

Abstract

This investigation aims at analyzing and classifying mixed problems proposed in a collection of mathematics textbooks from the 1st to the 5th grade of elementary school, from the Theory of Conceptual Fields perspective. Mixed problems are those which involve at least once an additive relationship and a multiplicative one. For the analysis and classification of mixed problems, the assumptions established by Gérard Vergnaud for the Conceptual Field of Additive Structures and the Conceptual Field of Multiplicative Structures were considered, in addition to the possibilities of mixed problems classes disclosed by Miranda (2019). In the analyzed textbooks, forty-six (46) mixed problems were identified, which were classified into seven (7) classes. The analyzes show the simple proportion and composition of measures class

[1] Universidade Estadual do Oeste do Paraná | carlahalum@gmail.com
[2] Universidade Estadual do Paraná | rezendeveridiana@gmail.com

predominance, which added nineteen (19) mixed problems. The product class of measurements and composition of measurements was identified twice in the work. It is inferred, based on the Conceptual Fields Theory and on the results of this investigation that the variety of different situations of mixed problems favors/enables students to mobilize and appropriate different additive and multiplicative reasoning throughout their school experience.
Keywords: early years; additive field; multiplicative field; didactics of mathematics; mixed problems.

Introdução

Dentre as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental constam a formulação e a resolução de situações-problema, que possibilitam a apropriação dos conceitos matemáticos de adição, subtração, multiplicação e divisão (BRASIL, 2018). Fundamentadas em Vergnaud (2009*a*), assumimos que tais situações-problema podem ser de três tipos: puramente aditivas, contendo as operações de adição e/ou subtração; puramente multiplicativas, contemplando as operações de multiplicação e/ou divisão; e do tipo misto, envolvendo pelo menos uma vez as operações de adição (ou subtração) e multiplicação (ou divisão).

As situações-problema aditivas e as situações-problema multiplicativas pertencem respectivamente aos campos conceituais aditivo e multiplicativo, que possuem classes de situações bem estabelecidas por Vergnaud (1996, 2009*a*). As classes de situações do campo aditivo são: composição de medidas; transformação de medidas; comparação de medidas; composição de duas transformações; transformação de uma relação e composição de duas relações. Segundo Gitirana *et al.* (2014), as situações do campo multiplicativo contemplam as classes comparação multiplicativa; produto de medidas; proporção simples; função bilinear; e proporcionalidade múltipla.

No tocante aos problemas mistos, Vergnaud (2009*a*) os define, mas não apresenta uma classificação. No entanto, em sua pesquisa de mestrado, Miranda (2019) apresenta uma classificação para os problemas mistos associados à função afim, presentes em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Tal classificação foi realizada a partir das classes de problemas aditivos e multiplicativos estabelecidas por Vergnaud (1996, 2009*a*).

A análise de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com foco nas classes de problemas do campo aditivo e do campo multiplicativo, vem sendo desenvolvida por diversos pesquisadores (PEREIRA *et al.*, 2019; PERON; NOGUEIRA; REZENDE, 2019; RODRIGUES; REZENDE, 2019*a*; OLIVEIRA FILHO, 2009). Tais pesquisas mostram, nas obras analisadas, a predominância de determinadas classes de problemas e a ausência de outras.

No que diz respeito aos livros didáticos, entendemos que se trata de "[...] um instrumento de uso do professor (e do futuro professor) no planejamento de suas aulas e do aluno na realização das atividades [...]" (FREITAS; ALMOULOUD, 2016, p. 219), auxiliando no desenvolvimento de habilidades e competências que alunos de determinado ano escolar precisam atingir. Destarte, "[...] seu estudo permite, entre outros, certa aproximação com o que é ensinado pelo professor. Consequentemente, é importante conhecer as propostas do livro didático, especialmente para ajudar na elaboração de intervenções didáticas com alunos" (BITTAR, 2017, p. 365).

Considerando que problemas mistos estão presentes nos livros didáticos dos anos iniciais (RODRIGUES; REZENDE, 2019*a*, *2019b*), e a importância da diversificação das situações para a compreensão de um conceito (VERGNAUD, 1996, 2009*a*), desenvolvemos esta pesquisa com o objetivo de *analisar os problemas mistos propostos em uma coleção de livros didáticos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental*, *na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*.

Para atingir o objetivo da investigação, analisamos cada problema misto proposto nas unidades da coleção de livros didáticos Ápis Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (DANTE, 2017). Para tanto, tomamos como base a classificação e as representações (esquemas relacionais e equações) estabelecidas para os problemas dos campos conceituais aditivo e multiplicativo (VERGNAUD, 1996, 2009*a*), e para problemas mistos envolvendo função afim estabelecidas por Miranda (2019).

Este trabalho é de uma pesquisa que deu sustentação para a dissertação de mestrado que está em fase de finalização pela primeira autora, e se insere no âmbito do Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática - GEPeDiMa que tem se dedicado ao desenvolvimento de pesquisas com vistas ao mapeamento do Campo Conceitual da Função afim, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.

Considerando a justificativa e o objetivo geral para o desenvolvimento desta pesquisa, apresentamos, a seguir, a fundamentação teórica alicerçada nos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais.

A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), idealizada por Gérard Vergnaud, é uma teoria cognitivista que apresenta diversas contribuições para a Didática da Matemática, pois permite compreender o funcionamento e o desenvolvimento dos conceitos pelos estudantes no decorrer do processor escolar (VERGNAUD, 1996). Especificamente para a esta pesquisa, adotou-se a TCC como ferramenta para a análise das estruturas de situações-problema do tipo misto, presentes em uma coleção de livros didáticos de Matemática, possibilitando uma classificação para tais situações e a elaboração de seus esquemas relacionais.

De acordo com Vergnaud (1996), uma situação, por mais simples que seja, envolve vários conceitos. Logo, o pesquisador estabelece como Campo Conceitual um conjunto formado por situações, conceitos, relações, classes de problemas, esquemas[3] de tratamento, representações linguísticas e simbólicas e operações de pensamento que se articulam. O Campo Conceitual Multiplicativo, por exemplo, é formado por um conjunto de situações que implicam em uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação entre elas, o conjunto de conceitos: "fração, função linear, bilinear, e não linear, composição de funções lineares, razão, taxa, proporção, análise dimensional, combinação, produto cartesiano, área, volume, isomorfismo, entre outros" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 24), e os conjuntos de teoremas e representações.

Desta forma, para a compreensão de um conceito pelo sujeito, Vergnaud (2009*b*) considera necessário um conjunto de três subconjuntos, representado por C = (S, I, L), sendo

[3] A forma organizada da atividade que expressa o conhecimento do aluno em uma determinada classe de situação é denominada por Vergnaud (1996) de esquema.

S relacionado ao conjunto de situações; *I*, o conjunto dos invariantes operatórios; e *L*, o conjunto das representações linguísticas e simbólicas. Em geral, não há correspondência biunívoca entre eles, o que significa que nenhum dos conjuntos pode ser excluído para que ocorra a aprendizagem conceitual.

Para a TCC, o termo *situação* apresenta o sentido de *tarefa*, e as situações complexas podem ser consideradas um conjunto de subtarefas a serem realizadas pelos sujeitos, pois a natureza e as dificuldades específicas devem ser conhecidas pelo professor. O conjunto de situações envolve duas ideias principais: a de variedade e a de história. A primeira diz respeito à existência de várias situações associadas a um mesmo campo conceitual, sendo possível construir o conjunto das classes de problemas; e a segunda refere-se aos conhecimentos elaborados mediante experiências em situações variadas (VERGNAUD, 1996).

Neste sentido, Gitirana *et al.* (2014) esclarecem que não basta o aluno realizar um cálculo numérico adequado: é preciso compreender e experimentar diferentes situações relacionadas ao conceito em questão, pois diferentes situações permitem ao aluno mobilizar raciocínios e esquemas diversos. Para isso, é preciso que o professor conheça diferentes classes de situações relacionadas a um determinado Campo Conceitual, para evitar a proposição, aos alunos, de problemas que requeiram o mesmo raciocínio ao longo do processo escolar.

Magina *et al*. (2010) evidenciam que, para o domínio de um conceito, é preciso considerar alguns aspectos, tais como: o fator maturacional, relacionado ao desenvolvimento biológico do sujeito; o fator experiência, que se refere à familiaridade do sujeito à situação; e o fator aprendizagem, que está ligado à sala de aula e ao papel do professor, ou seja, a aprendizagem de um conceito pelo sujeito leva muitos anos. Durante esse período, o sujeito passa por inúmeras situações, vivenciadas tanto no processo escolar quanto em seu cotidiano, as quais lhes permitirão o desenvolvimento de novos raciocínios matemáticos para lidar com elas. Por isso, considera-se importante diversificar as situações-problema desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Dentre os campos conceituais associados a conceitos matemáticos estabelecidos por Vergnaud (1996; 2009*a*), tomamos como base para o desenvolvimento desta pesquisa dois deles, quais sejam: o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas (VERGNAUD, 1996; 2009*a*). Para os problemas de estruturas aditivas, o autor apresenta seis classes: composição de medidas; transformação de medidas; comparação de medidas; composição de duas transformações; transformação de uma relação; e composição de duas relações, sendo elas relações ternárias que ligam três elementos entre si.

Para os problemas de estruturas multiplicativas, Vergnaud (1996; 2009*a*) estabeleceu cinco classes, que são apresentas por Gitirana *et al.* (2014) com as seguintes nomenclaturas: comparação multiplicativa; produto de medidas; proporção simples; proporcionalidade múltipla e função bilinear. As classes de comparação multiplicativa e produto de medidas possuem relações ternárias que ligam três elementos entre si; já as classes proporção simples, função bilinear e proporcionalidade múltipla são relações quaternárias, que associam quatro elementos entre si.

Essas classes de problemas são frequentemente representadas por um esquema relacional (VERGNAUD, 2009*a*) que permite explicitar os cálculos relacionais próprios da estrutura de cada problema. Cada esquema relacional é composto por símbolos e códigos (Quadro 1), auxiliando na visualização do tipo de relação estabelecida entre as medidas presentes no enunciado do problema.

Quadro 1 - Símbolos que compõem os esquemas

Nomenclatura	Símbolo	Significado
Retângulo	$\square$	número natural
Círculo	$\bigcirc$	número relativo
Chave vertical	$\}$	composição de elementos de mesma natureza
Chave horizontal	$\overbrace{\qquad}$	
Flecha horizontal	$\longrightarrow$	uma transformação ou uma relação, quer dizer a composição de elementos de natureza diferente
Flecha vertical	$\uparrow$	

Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*, p. 201).

No que diz respeito aos problemas mistos, Vergnaud (2009*a*) os considera problemas aritméticos constituídos por várias relações e questões, que permitem ao aluno resolver o problema por diferentes caminhos possíveis. Os problemas mistos carecem de interpretações para que os alunos identifiquem as relações existentes entre os elementos do campo multiplicativo e do campo aditivo, e desenvolvam os cálculos relacionais e numéricos para encontrar o procedimento que possibilite resolvê-los.

Quadro 2 - Expressão analítica resultante do tipo de relação

Categoria	Expressão analítica
Proporção simples	$y = ax$
Produtos de medidas	$y = ax$
Composição de medidas	$y = ax$ ou $y = \pm ax \pm b$
Proporção simples e composição de medidas	$y = ax \pm b$
Proporção simples e transformação de medidas	$y = b \pm ax$
Comparação multiplicativa e composição de medidas	$y = ax + b$
Comparação multiplicativa e transformação de medidas	$y = ax$
Proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas	$y = ax + b$
Comparação multiplicativa e proporção simples	$y = ax$

Fonte: Miranda (2019, p. 148).

Miranda (2019) estabeleceu, *a priori*, 30 possibilidades de classes para os problemas mistos alicerçados nas classes de problemas dos campos aditivo e multiplicativo. A pesquisadora identificou, em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, oitenta e nove (89) situações-problema relacionadas à função afim pertencentes a uma das 9 classes de problemas mistos identificadas nas obras analisadas. Para cada classe de problema identificada, a autora apresenta uma expressão analítica da função correspondente (Quadro 2). Com sua pesquisa, Miranda (2019) constatou que situações-problema de função afim são passíveis de serem analisadas, mediante os estudos relacionados às estruturas aditivas e às estruturas multiplicativas.

Sendo assim, alicerçadas em Vergnaud (1996, 2009*a*, 2009*b*) e considerando a possibilidade de classificação de problemas mistos conforme Miranda (2019), adotamos como fonte de dados uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais com a finalidade de analisar e classificar os problemas mistos presentes na obra. Os procedimentos metodológicos e a análise dos dados estão descritos a seguir.

Procedimentos metodológicos e análise dos dados

Como fonte de dados para a classificação dos problemas mistos, consideramos a coleção de cinco livros didáticos Ápis Matemática (DANTE, 2017), destinada aos anos iniciais do Ensino Fundamental. A opção por essa coleção deve-se ao fato de ela ter sido aprovada pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) no ano de 2018 e obtido o maior número de exemplares escolhidos pelas escolas no Brasil nos anos de 2019 e 2020 (FNDE)[4].

Para identificar problemas mistos nos livros, consideramos todas as páginas dos livros didáticos Ápis Matemática, pois os conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão estão presentes ao longo da obra, relacionando-se a outros conceitos de geometria, medidas e suas grandezas, por exemplo. Para cada problema misto identificado, analisamos as relações aditiva e multiplicativa presentes no enunciado, representamos essas relações na forma de esquema relacional e equação com base em Vergnaud (1996, 2009*a*) e Miranda (2019) para, então, apresentar a classificação para o referido problema. Para a elaboração dos esquemas relacionais, utilizamos os códigos do Quadro 1, propostos por Vergnaud (2009*a*).

Nossa análise mostrou a presença de quarenta e seis (46) problemas mistos, pertencentes a sete classes distintas, na coleção Ápis Matemática (DANTE, 2017), sendo elas: *proporção simples e composição de medidas; proporção simples e transformação de medidas; proporção simples, composição e transformação de medidas; proporção simples, composição e comparação aditiva; comparação multiplicativa e transformação de medidas; comparação multiplicativa e composição de medidas* e *produto de medidas e composição de medidas*. A seguir, analisamos sete problemas mistos pertencentes a cada classe identificada na coleção.

Proporção simples e composição de medidas

Nos livros Ápis Matemática analisados, foram identificados dezenove (19) problemas mistos pertencentes à classe *proporção simples e composição de medidas*, sendo: três (3) no livro de Matemática do segundo ano; dois (24) no livro de Matemática do terceiro ano; sete (7) no livro de Matemática do quarto ano; e sete (7) no livro de Matemática do quinto ano.

Segundo Miranda (2019), a classe *proporção simples e composição de medidas* tem a característica de buscar uma medida resultante da composição de outras duas, sendo uma delas uma medida constante, e a outra, uma medida resultante de uma relação quaternária de proporção simples. A seguir, apresentamos um problema misto pertencente a essa classe, proposto para o terceiro ano do Ensino Fundamental no livro Ápis Matemática (Quadro 3).

Quadro 3 - Problema misto do tipo *proporção simples e composição de medidas*

Na volta às aulas, uma papelaria vendeu 3 caixas com 22 canetas cada uma e mais 15 canetas. Quantas canetas foram vendidas?

Fonte: Adaptado Dante (2017c, p. 142).

[4] FUNDAÇÃO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO – FNDE. Mais informações em: http://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos.

Para analisar as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado desse problema, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado e a pergunta final (designada por y), como sugerido por Vergnaud (2009*a*, p. 289).

Caixas	Canetas	Canetas	Canetas vendidas (total)
1	22		
3	c	15	y

Para resolver esse problema misto, é necessário determinar a quantidade de canetas em 3 caixas. Para isso, considera-se a relação quaternária de proporção simples entre a quantidade de caixas e a quantidade de canetas. Assim, 1 caixa está relacionada a 22 canetas e 3 caixas estão relacionadas a c canetas, primeira quantidade que se deseja descobrir. Na sequência, pretende-se determinar quantas canetas foram vendidas na volta às aulas, e para isso utiliza-se uma relação ternária de composição de medidas, sendo c canetas uma medida e 15 canetas a outra medida. Para mostrar essa relação, propõe-se o seguinte esquema relacional (Figura 1), baseado Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019).

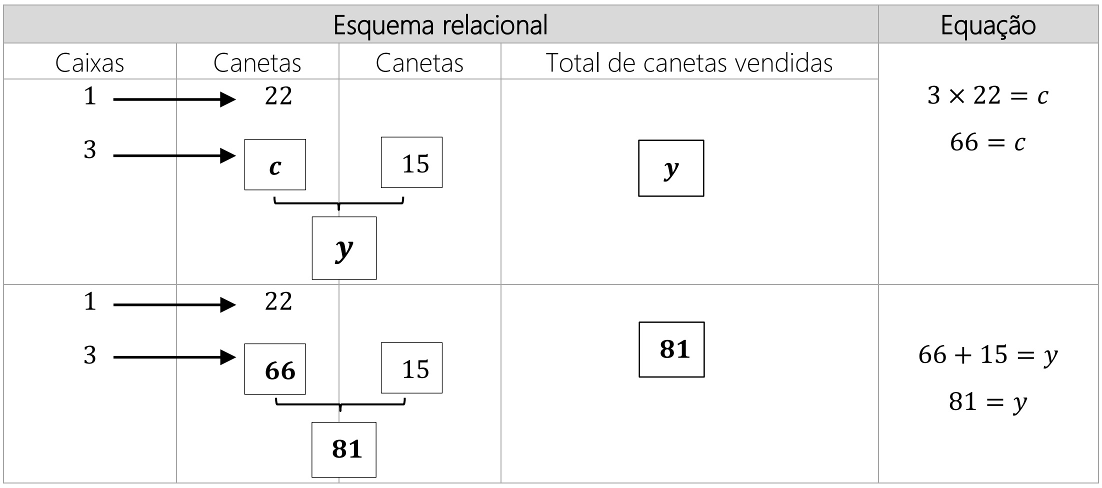


Figura 1 - Esquema relacional de proporção simples e composição de medidas

Associada ao esquema relacionado, tem-se a equação: $y = 22 \times 3 + 15 = 81.$ Neste caso, o total de canetas vendidas depende da quantidade de canetas em 3 caixas, mais a quantidade de canetas vendidas por unidade. Sendo assim, considerando a estrutura do problema e consequentemente o seu esquema relacional (Figura 1), o problema misto é classificado como do tipo *proporção simples e composição de medidas*.

Proporção simples e transformação de medidas

Na coleção analisada, foram identificados sete (7) problemas mistos pertencentes à classe de *proporção simples e transformação de medidas*, sendo um (1) no livro de Matemática do terceiro ano; três (3) no livro de Matemática do quarto ano; e três (3) no livro de Matemática do quinto ano.

Segundo Miranda (2019), a classe de *proporção simples e transformação de medidas* apresenta como característica ter um estado inicial que é transformado em um estado final, sendo o estado inicial uma medida conhecida e a transformação uma medida desconhecida, resultado de uma relação quaternária de proporção simples. Na sequência, apresentamos um exemplo de problema misto pertencente a essa classe, retirada do livro didático Ápis Matemática, proposto para o quinto ano do Ensino Fundamental (Quadro 4).

Quadro 4 - Problema misto do tipo *proporção simples e transformação de medidas*

Marcela comprou 4 mochilas iguais para ela e os irmãos, pagou com 70,00 e recebeu R$ 6,00 de troco. Quanto custou cada mochila?

Fonte: Dante (2017e, p. 227).

Para analisar as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado desse problema, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado, assim como a pergunta final (designada por $\boldsymbol{a}$), como sugerido por Vergnaud (2009*a*, p. 289).

Valor pago	Troco recebido	Mochilas	Custo R$
		1	$\boldsymbol{a}$
70	6	4	$\boldsymbol{c}$

Para resolver esse problema, primeiramente é necessário determinar o custo de quatro mochilas. Para isso, considera-se a relação ternária de transformação, em que o estado inicial corresponde ao valor de R$ 70,00; o estado final diz respeito ao troco de R$ 6,00; e deseja-se descobrir a transformação negativa, o custo das quatro mochilas iguais. Diante do resultado do custo das quatro mochilas iguais, podemos calcular o custo de uma mochila por meio de uma relação quaternária de proporção simples, em que 1 mochila está relacionada a $\boldsymbol{a}$ reais e 4 mochilas estão relacionadas a 64 reais. Para representar essas relações, propõe-se o esquema (Figura 2) baseado Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019).

Esquema relacional				Equação
Valor pago	Troco recebido	Mochilas	Custo R$	
$\boxed{70} \longrightarrow$ $-c$	$\boxed{6}$	$1 \longrightarrow$ $4 \longrightarrow$	$\boldsymbol{a}$ $\boxed{\boldsymbol{c}}$	$70 - c = 6$ $64 = c$
$\boxed{70} \longrightarrow$ $\mathbf{64}$	$\boxed{6}$	$1 \longrightarrow$ $4 \longrightarrow$	$\mathbf{16}$ $\boxed{\mathbf{64}}$	$4a = 64$ $a = 16$

Figura 2 - Esquema relacional de proporção simples e transformação de medidas

Deste modo, a equação correspondente ao esquema relacional é: $\mathbf{6 = 70 - 4 \times \boldsymbol{a}}$, e ao resolver essa equação, temos que o custo de cada mochila foi de R$ 16,00. Neste caso, o custo de uma mochila depende do valor pago e do troco recebido ao comprar quatro mochilas. Portanto, com base nas relações estabelecidas no problema e no seu esquema relacional, o problema misto é do tipo *proporção simples e transformação de medidas*.

Comparação multiplicativa e transformação de medidas

Os problemas mistos classificados como *comparação multiplicativa e transformação de medidas* totalizaram cinco (5) problemas presentes no livro didático Ápis Matemática propostos para o quinto ano do Ensino Fundamental.

Problemas com essa classificação têm como característica apresentar um estado inicial que é transformado por acréscimo ou desconto em um estado final, sendo o estado inicial uma medida conhecida e a transformação é resultado de uma comparação multiplicativa. A seguir, apresentamos um exemplo de problema misto pertencente a essa classe retirado do livro didático Ápis Matemática proposto ao quinto ano do Ensino Fundamental (Quadro 5).

Quadro 5 - Problema misto do tipo comparação multiplicativa e transformação de medidas

Uma bicicleta custa R$ 160,00 a prazo. No pagamento à vista há um desconto de 6%. Qual é o preço à vista dessa bicicleta?

Fonte: Dante (2017e, p. 193).

Para analisar as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado desse problema, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado, assim como a pergunta final (designada por y), como sugerido por Vergnaud (2009*a*, p. 289).

Custo	Porcentagem de desconto	Valor do desconto	Custo à vista
160	6	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{y}$

Para resolver esse problema, primeiramente é necessário determinar o desconto no pagamento à vista da bicicleta. Para isso, considera-se uma relação ternária de comparação multiplicativa, sendo a relação a porcentagem de desconto, ou seja, $\mathbf{6\%} = \frac{6}{100} = \mathbf{0{,}06}$, o valor do desconto (referido), a sexta parte de cem do valor da bicicleta (referente). Com o resultado dessa relação, podemos encontrar o preço à vista da bicicleta, ao considerar a relação ternária de transformação negativa, pois o estado inicial corresponde ao valor da bicicleta a prazo de 160 reais; a transformação negativa é o valor do desconto para o pagamento à vista da bicicleta, $\boldsymbol{a}$ reais; e deseja-se descobrir o estado final $\boldsymbol{y}$, o preço à vista da bicicleta. Para analisar essa relação, representamos um esquema relacional, conforme Vergnaud (2009*a*).

Deste modo, podemos estabelecer uma equação correspondente ao esquema relacional: $\mathbf{160 - (160 \times 0{,}06) = 150{,}40}$, ou seja, o preço à vista da bicicleta é de R$ 150,40. Neste caso, o preço à vista da bicicleta depende do valor do desconto e do custo da bicicleta a prazo. Portanto, com base nas relações estabelecidas no problema e no seu esquema, o problema misto é do tipo *comparação multiplicativa e transformação de medidas*.

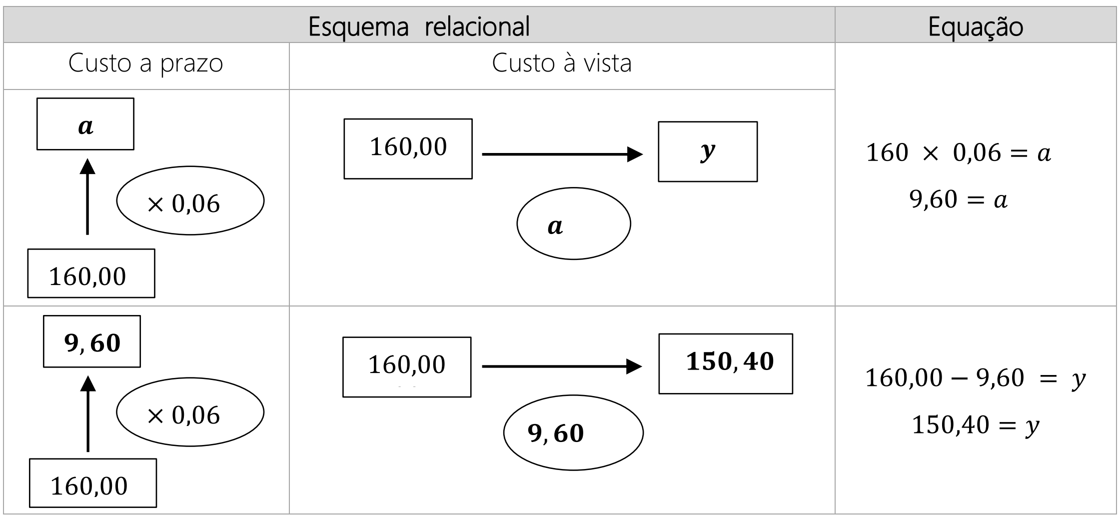


Figura 3 - Esquema relacional de comparação multiplicativa e transformação de medidas

Comparação multiplicativa e composição de medidas

Na coleção analisada, foram identificados quatro (4) problemas mistos pertencentes à classe de *proporção simples e composição de medidas*, sendo dois (2) no livro de Matemática do terceiro ano, e dois (2) no livro de Matemática do quarto ano.

A classe *comparação multiplicativa e composição de medidas* tem como característica apresentar uma composição de medidas, sendo uma medida conhecida e a outra medida resultado de uma comparação multiplicativa. A seguir, apresentamos um exemplo de problema misto pertencente a essa classe, retirado do livro didático Ápis Matemática proposto ao quarto ano do Ensino Fundamental (Quadro 6).

Quadro 6 - Problema misto do tipo comparação multiplicativa e composição de medidas

Caio tem 15 figurinhas. Rui tem 1/3 da quantidade de figurinhas que Caio tem. Quantas figurinhas os dois têm juntos?

Fonte: Dante (2017*d*, p. 207).

Para analisar as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado desse problema, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado, assim como a pergunta final (designada por y), como sugerido por Vergnaud (2009*a*, p. 289).

Figurinhas de Caio	Relação	Figurinhas de Rui	Total de figurinhas
15	1/3	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{y}$

Para resolver esse problema, primeiramente determina-se a quantidade de figurinhas que Rui tem. Para isso, considera-se uma de comparação multiplicativa, sendo a relação $\frac{1}{3}$ o referido consiste na quantidade de figurinhas que Rui tem, e o referente diz respeito à quantidade de figurinhas que Caio tem. Com o resultado da quantidade de figurinhas que Rui tem, podemos encontrar quantas figurinhas os dois têm juntos, ao considerar a relação de composição de medidas, sendo uma medida a quantidade de figurinhas que Caio tem; e a outra medida, a quantidade de figurinhas que Rui tem. Para representar essas relações, considera-se o esquema relacional (Figura 4) proposto por Vergnaud (2009*a*).

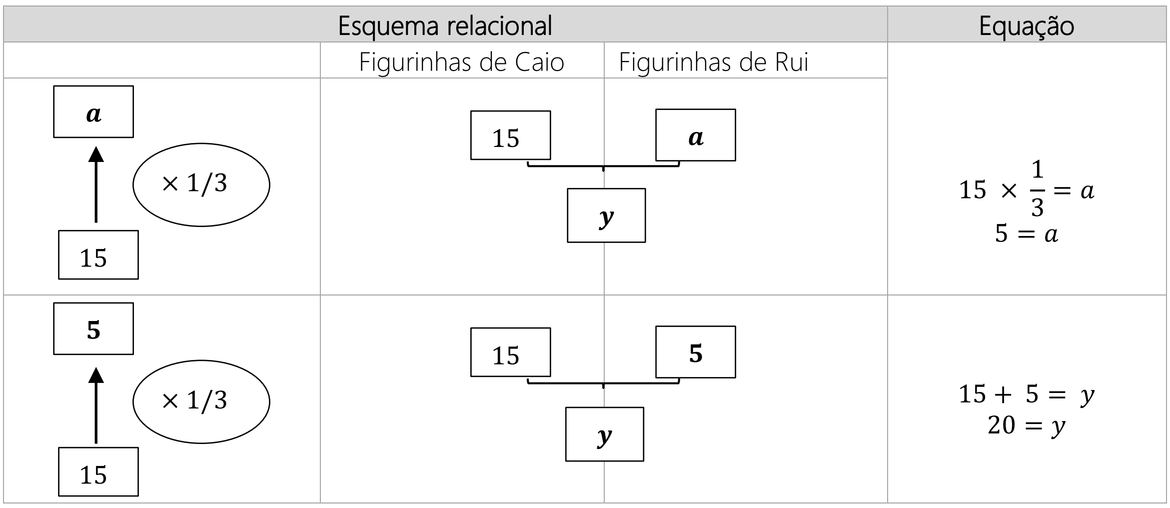


Figura 4 - Esquema relacional de comparação multiplicativa e composição de medidas

Deste modo, podemos estabelecer uma equação correspondente ao esquema relacional: $\mathbf{15 + \frac{1}{3} \times 15 = 20;}$ assim, os dois têm, juntos, 20 figurinhas. Portanto, com base na estrutura desse problema misto e no seu esquema relacional, considera-se que ele pertence à classe *comparação multiplicativa e composição de medidas*.

Proporção simples, composição e transformação de medidas

Na coleção de livros Ápis Matemática, foram identificados (seis) 6 problemas mistos classificados como *proporção simples*, *composição e transformação de medidas*, sendo: dois (2) no livro de matemática do segundo ano; dois (2) no livro de matemática do terceiro ano; e dois (2) no livro de matemática do quinto ano.

Os problemas mistos classificados como *proporção simples*, *composição e transformação de medidas* têm como característica apresentar um estado inicial que é transformado em um estado final, sendo o estado inicial uma medida conhecida e a transformação uma medida desconhecida, resultado de uma composição de medidas, cuja composição é constituída por uma medida conhecida e a outra uma medida desconhecida, resultado de uma relação quaternária de proporção simples. Na sequência, apresentamos um exemplo problema misto pertencente à essa classe retirado do livro Ápis Matemática proposto para o terceiro ano do Ensino Fundamental (Quadro 7).

Quadro 7 - Problema misto do tipo proporção simples, composição e transformação de medidas

Regina comprou 3 tigelas e 1 jarra. Cada tigela custou R$ 10,00 e a jarra custou R$ 15,00. Ela pagou com 1 nota de R$ 50,00. Quanto ela recebeu de troco?

Fonte: Dante (2017c, p. 145).

Para analisar as relações estabelecidas entre as medidas presentes no enunciado desse problema, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado, assim como a pergunta final (designada por y), como sugerido por Vergnaud (2009*a*, p. 289).

Tigela	Custo da tigela	Custo da jarra	Valor pago	troco
1	10			$\boldsymbol{y}$
3	$\boldsymbol{c}$	15	50	

Para resolver esse problema, primeiramente é necessário determinar o custo de três tigelas. Para isso, considera-se uma relação quaternária de proporção simples entre a quantidade de tigelas e o respectivo custo. Assim, 1 tigela está relacionada a 10 reais e 3 tigelas estão relacionadas a $\boldsymbol{c}$ reais. Após determinar o custo de três tigelas, pretende-se encontrar o valor das compras, e para isso utiliza-se uma relação ternária de composição de medidas, em que 30 reais se referem ao custo de 3 tigelas; e 15 reais, o custo da jarra. Diante do resultado dessa composição, podemos encontrar o troco, ao considerar a relação ternária de transformação negativa: o estado inicial corresponde ao valor pago de 50 reais; a transformação negativa, o valor de 45 reais, que corresponde ao valor das compras; e deseja-se descobrir o estado final, o valor do troco y. Para representar esse tipo de problema misto, propõe-se um seguinte esquema relacional (Figura 5):

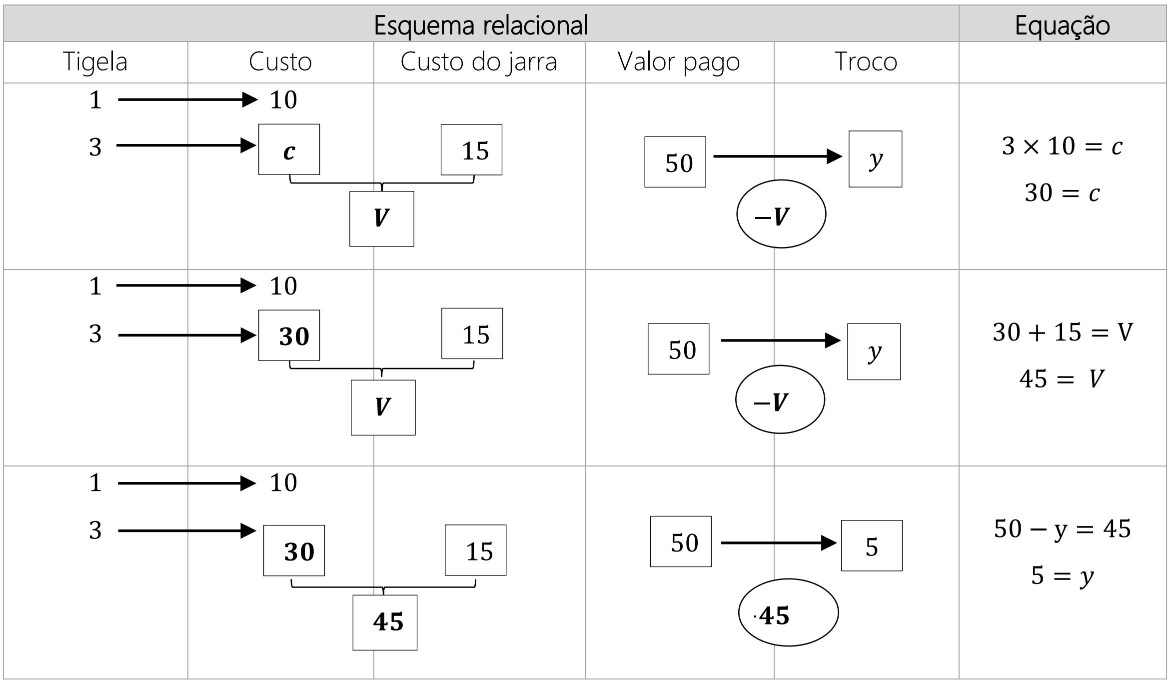


Figura 5 - Esquema relacional de proporção simples, composição e transformação de medidas

Deste modo, podemos estabelecer uma equação correspondente ao esquema relacional: $50 - (3 \times 10 + 15) = 5$. Neste caso, o valor do troco depende do valor pago e do valor da compra das três tigelas e da jarra. Portanto, com base nas relações estabelecidas no problema e no seu esquema relacional, o problema misto é do tipo *proporção simples*, *composição e transformação de medidas*.

Proporção simples, composição e comparação aditiva

Os problemas mistos classificados como *proporção simples*, *composição e comparação aditiva* totalizaram três (3), presentes no livro didático Ápis Matemática, propostos para o quinto ano do Ensino Fundamental.

Esses problemas classificados como *proporção simples, composição e comparação aditiva* têm como característica apresentar uma relação; e deseja-se descobrir o referente e o referido, sendo a relação uma medida conhecida; o referido, uma medida desconhecida; e o referente, uma medida desconhecida, resultado de uma proporção simples que adveio de uma composição de medidas. Na sequência, apresentamos um problema misto dessa classe retirado do livro Ápis Matemática, proposto para o terceiro ano do Ensino Fundamental.

Quadro 8 - Problema misto do tipo proporção simples, composição e comparação aditiva

Rogério e Leandro juntos leram 22 livros. Leandro leu 4 livros a mais do que Rogério. Quantos livros cada um leu?

Fonte: Dante (2017c, p. 96).

Para analisar as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado desse problema, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado, assim como a pergunta final (designada por x, y), como sugerido por Vergnaud (2009*a*, p. 289).

Livros lido por Rogério	Livros lido por Leandro	Total de livros
x	$x + 4$	22

Para resolver esse problema, primeiramente é necessário determinar quantos livros Rogério leu. Para isso, considera-se uma relação ternária de composição entre a quantidade de livros que Rogério leu e a quantidade de livros que Leandro leu, em que é dado o total de livros que os dois leram juntos. Sendo a quantidade de livros que Rogério leu resultado de uma relação quaternária de proporção simples, em que 1 aluno está relacionado a x livros e 2 alunos estão relacionados a $\mathbf{18}$ livros. A partir do resultado dessa relação quaternária, podemos encontrar a quantidade de livros que Leandro leu, pois sabemos que Leandro leu quatro livros a mais que Rogério. Para isso, considera-se uma relação ternária de comparação aditiva, sendo o referente 9 livros; a relação, 4 livros; e busca-se pelo referido, a quantidade de livros que Leandro. Com base em Vergnaud (2009*a*), para esse problema misto, propõem-se as seguintes representações (Figura 6).

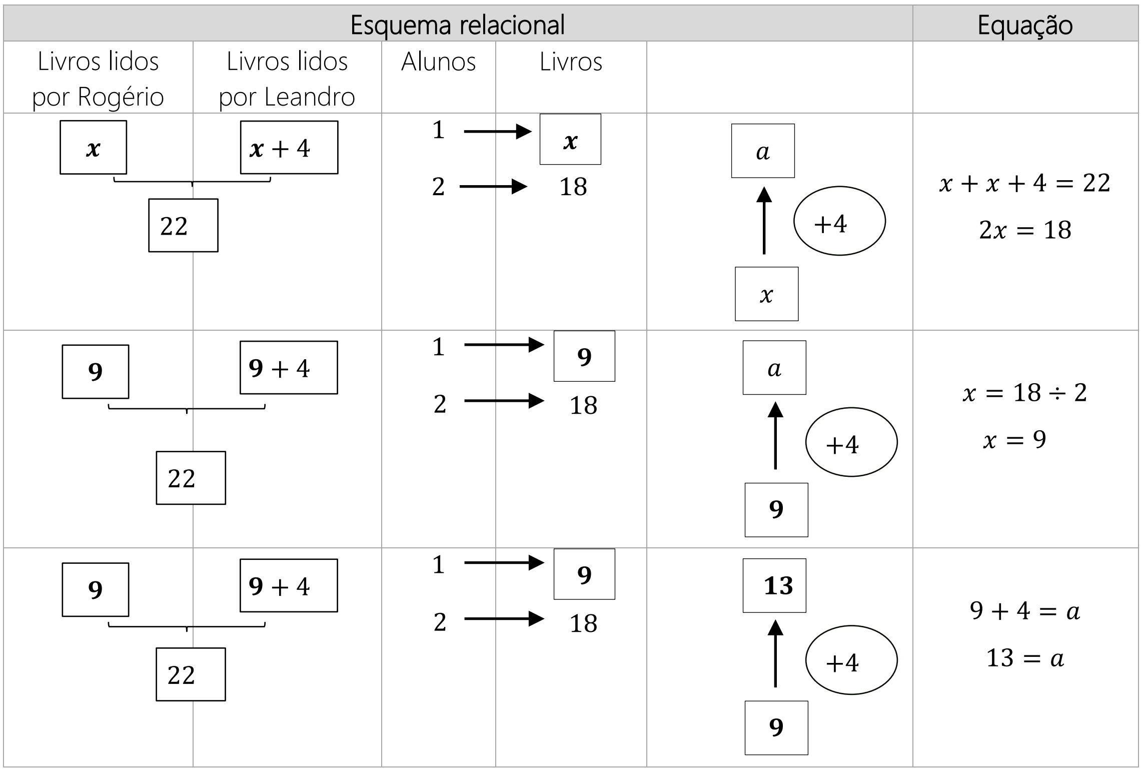


Figura 6- Esquema relacional de proporção simples, composição e comparação aditiva

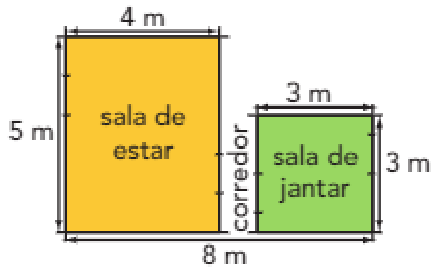
Neste caso, considera-se um problema misto de *proporção simples*, *composição e comparação aditiva*, pois a quantidade de livros que cada um leu depende da quantidade de livros que os dois leram juntos e da quantidade de livros que Leandro leu a mais.

Produto de medidas e composição de medidas

No livro didático Ápis Matemática proposto para o quinto ano do Ensino Fundamental, foi identificado dois (2) problema misto classificado como *produto de medidas e composição de medidas*. Essa classe de problema misto tem como característica compor duas medidas, sendo elas resultados de uma relação ternária de produto de medidas. Na sequência, apresentamos um exemplo de problema misto pertencente a essa classe, retirado do livro didático Ápis Matemática proposto (Quadro 9).

Quadro 9 - Problema misto do tipo *produto de medidas e composição de medidas*

Carolina está reformando a sala dela. Observe a planta de 2 salas, calcule e responda. Quantos metros quadrados de carpete são necessários para cobrir o piso das 2 salas?



Fonte: Dante (2017e, p. 217).

Para analisar as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado desse problema, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado e a pergunta final (designada por z), como sugerido por Vergnaud (2009*a*, p. 289).

Área da sala de estar	Área da sala de jantar	Área total
x	y	z

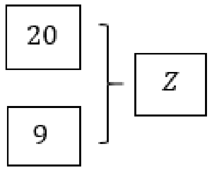
Para resolver esse problema, primeiramente é necessário determinar quantos metros quadrados de carpete são necessários para cobrir o piso de cada sala. Para isso, considera-se a classe produto de medidas, pois em cada sala temos duas grandezas de mesma natureza, e por meio da multiplicação dessas grandezas obtém-se outra grandeza de natureza diferente. Na sequência representamos, pelas tabelas seguir, as medidas das salas de estar e jantar, conforme proposto por Vergnaud (2009*a*).

	1	4	extensão
1			
5		x	
largura	Área da sala de estar		

	1	3	extensão
1			
3		y	
largura	Área da sala de jantar		

A área da sala de estar pode ser representada algebricamente por $x = 5m \times 4m = 20\,m^2$; e a área da sala de jantar pode ser representado algebricamente por $y = 3m \times 3m = 9\,m^2$. Com o resultado das áreas das duas salas, podemos encontrar quantos metros quadrados de carpete são necessários para cobrir o piso das duas salas, e para isso se considera uma relação ternária de composição de medidas, sendo uma medida a área da sala de estar; a outra medida, a área da sala de jantar; e busca-se pelo todo z.

Essa relação pode ser representada pelo seguinte esquema relacional, proposto por Vergnaud (2009*a*).



Algebricamente, essa relação pode ser representada por: $Z = 20\,m^2 + 9\,m^2 = 29\ m^2$, ou seja, são necessários 29 metros quadrados de carpete para cobrir o piso das duas salas. Neste caso, considera-se um problema misto de *produto de medidas e composição de medidas*, pois a área total das salas depende da área da sala de estar e da área da sala de jantar.

Quadro 10 - Classes e quantidade de problemas mistos presentes coleção Ápis Matemática (2017)

Classificação	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	Total
Proporção simples e composição de medidas	3	2	7	7	19
Proporção simples e transformação de medidas	0	1	3	3	7
Proporção simples, composição e transformação de medidas	2	2	0	6	6
Comparação multiplicativa e transformação de medidas	0	0	0	5	5
Comparação multiplicativa e composição de medidas	0	2	2	0	4
Proporção simples, composição e comparação aditiva	0	0	0	3	3
Produto de medidas e composição de medidas	0	0	0	2	2
Total	5	7	12	22	46

Fonte: Autoras da pesquisa.

Como síntese de nossas análises apresentamos, no Quadro 10, cada classe de problema misto que foi identificada na coleção de livro didático Ápis Matemática, a quantidade de problemas mistos em cada ano escolar relacionadas a determinada classe, a quantidade total de problemas mistos por classe, e a quantidade total de problemas mistos por ano escolar.

O Quadro 10 mostra a identificação de quarenta e seis (46) problemas mistos na coleção analisada, sendo cinco (5) no livro do segundo ano; sete (7) no livro do terceiro ano; doze (12) no livro quarto ano; e vinte e dois (22) no livro quinto ano. Desde modo, notamos que a quantidade de problemas mistos é ampliada conforme avançam os anos de escolares. Não foram identificados problemas mistos no livro do primeiro ano do Ensino Fundamental, e acreditamos que esse fato ocorre porque são problemas mais complexos (VERGNAUD, 2009*a*), especialmente para os alunos desse ano de escolaridade.

As informações do Quadro 10 mostram que, no livro Ápis Matemática destinado ao 5º ano, foi identificada a maior quantidade e variedade de problemas mistos. Tal fato pode ocorrer por uma escolha do autor, mas também pelo fato de que se espera que os alunos do quinto ano tenham habilidades necessárias para resolver esses tipos de situações-problema. Afinal, conforme a BNCC (BRASIL, 2018, p. 268), a expectativa é que, nos anos iniciais, os alunos apresentem a habilidade de resolver problemas, “envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados”.

Considerações finais

Os problemas mistos são considerados problemas complexos (VERGNAUD, 2009a), principalmente por envolverem, ao mesmo tempo, relações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, mas também por estarem associados a outras ideias e conceitos matemáticos, a exemplo do conceito de função (MIRANDA, 2019). Com a intenção de analisar e apresentar uma classificação para os problemas mistos, tomamos como fonte de dados a coleção de livros didáticos Ápis Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (DANTE, 2017). Nossas análises mostram que a coleção contempla problemas mistos desde o segundo ano, sendo identificados quarenta e seis (46) deles em toda a coleção.

Tomando como base as classes de problemas aditivos e multiplicativos (VERGNAUD, 1996; 2009*a*), sete classes de problemas mistos foram identificadas no decorrer das análises, quais sejam: proporção simples e composição medidas; proporção simples e transformação de medidas; proporção simples, composição e transformação de medidas; comparação multiplicativa e transformação de medidas; comparação multiplicativa e composição de medidas; proporção simples, composição e comparação aditiva; e produto de medidas e composição de medidas. Para além da classificação dos problemas, constatamos, na obra, o predomínio de problemas mistos da classe *proporção simples e composição de medidas*, totalizando 19 problemas. Já a classe *produto de medidas e composição de medidas* foi a menos identificada, contendo apenas dois problemas em toda a obra. Tal fato revela pouco equilíbrio entre as diferentes classes de problemas mistos propostos na coleção, além do fato de diversas possibilidades de classes não terem sido contempladas, a exemplo da classe proporção simples e comparação aditiva

Defendemos a importância da proposição de problemas mistos desde os anos iniciais de escolarização, e argumentamos a favor da classificação desses problemas para que os professores possam ter ciência de sua diversidade, não apenas no que se refere ao contexto, mas principalmente em relação às suas estruturas. Destarte, cada classe de problemas possui estrutura própria que possibilita raciocínios, esquemas e representações diferentes a serem desenvolvidos pelos alunos no decorrer do processo escolar, em decorrência das situações vivenciadas.

Referências

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetike**, Campinas, SP, v.25, n. 3, p. 364-387, set./dez. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. MEC, Brasília, 2018.

DANTE, L.R. **Ápis Matemática – 1º ano.** 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017a.

DANTE, L.R. **Ápis Matemática – 2º ano**. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017b.

DANTE, L.R. **Ápis Matemática – 3º ano**. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017c.

DANTE, L.R. **Ápis Matemática – 4º ano**. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017d.

DANTE, L.R. **Ápis Matemática – 5º ano**. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017e.

FREITAS, R. L.; ALMOULOUD, S. A: Análise de livro didáctico e a construção de um processo de ensino por meio de tarefas e técnicas: contribuições da TAD. In: SALAZAR, J. F.; GUERRA, F. U. (Org.). **Investigaciones En Educacion Matematica.** Fundo editorial. p. 217-237. 2016.

GITIRANA, V; MAGINA, C.; SPINILLO, A; CAMPOS, T. M. M. **Repensando multiplicação e adição: contribuições da teoria dos campos conceituais.** 1 ed. – São Paulo: PROEM, 2014.

MAGINA, S. M. P; SANTANA, E. R. S.; CARZOLA, I. M.; CAMPO, T. M.M. As Estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro Primeiras Séries do Ensino Fundamental. **Zetetike** – Cempem – FE – Unicamp – v. 18 n. 34 – jul/dez – 2010.

MIRANDA, C. A. **Situações-problemas que envolvem o conceito de função afim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. 158f. Dissertação (Mestrado) –Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel.

OLIVEIRA FILHO, N. G. **Problemas de estruturas aditivas e multiplicativas propostos em livros didáticos de matemática:** o impacto do programa nacional do livro didático. 2009. 153 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação, Recife.

PEREIRA, T; AGUIAR, F; ANTUNES, V; REZENDE, V. Problemas de adição e subtração nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais. **Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia**. Ponta Grossa, v. 12, n. 2, p. 308-330, mai./ago. 2019.

PERON, L. D. C; NOGUEIRA, C. M. I; REZENDE, V. Análise de problemas do campo conceitual multiplicativo presentes em livros didáticos de 5º ano ofertados pelo PNLD. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 6, n. 3, p. 89-119, 2019.

RODRIGUES, C. L. H; REZENDE, V. Problemas do campo conceitual multiplicativo em livros didáticos de matemática dos anos iniciais. In: **Anais XIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Cuiabá, 2019*a*.

RODRIGUES, C. L. H; REZENDE, V. Problemas mistos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: contribuições da teoria dos campos conceituais. In: **XV Encontro Paranaense de Educação Matemática**, Londrina - PR, 2019*b*.

VERGNAUD, G. **A Criança, a matemática e a Realidade**. Trad. Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora UFPR, 2009*a*.

VERGNAUD, G. **Qu'est-ce qu'apprendre**. In: Actes du Colloque IUFM du Pole Nordest des IUFM. Les affets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des eleves. Besançon, 2007. Traduzido por: BITTAR M.; MUNIZ C. A. A aprendizagem matemática na perspectiva dos Campo conceituais. 1ed.- Curitiba: Editora CRV, 2009*b*.

VERGNAUD, G. **A Teoria dos Campos Conceituais**. In: BRUN, Jean (Org.). Didáctica das Matemáticas. (Trad.) Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p.155 – 191.