



Modelo de contagio de pandemia a contagio financiero

Guillermo Sierra Juárez ^{*1}

Universidad de Guadalajara, México

Recibido el 1 de junio de 2021; aceptado el 19 de agosto de 2021
Disponibile en Internet el: 25 de agosto de 2021

Resumen

Los medios de transmisión de contagios en enfermedades infecciosas y los que provocan las crisis financieras actúan de forma muy similar. Dentro del posible aprendizaje que se puede tener de este periodo de COVID-19 en el presente trabajo se utilizan los conceptos e ideas de las pandemias de salud con el objetivo de modelar las crisis financieras y como las primeras pueden dar origen a las segundas como en el caso del COVID-19 en el 2020. Con un modelo determinista y uno de simulación Montecarlo se propone explicar la transmisión de la pandemia de salud a la pandemia financiera. El comportamiento gráfico es muy similar a lo observado en los hechos estilizados especialmente en el corto plazo.

Código JEL: C02, C63, E37, G01

Palabras clave: COVID-19; contagio; crisis financieras; enfermedades infecciosas

Abstract

The means of transmission of contagion in infectious diseases and the financial crises are very similar. Within the possible learning than can be had from this period of COVID-19 in this work the concepts and ideas of health pandemics are used in order to model financial crises and as their origin factor, as was the

* Autor para correspondencia

Correo electrónico: gsierraj@ucea.udg.mx (G. Sierra Juárez).

La revisión por pares es responsabilidad de la Universidad Nacional Autónoma de México.

<http://dx.doi.org/10.22201/fca.24488410e.2021.3368>

0186- 1042/© 2019 Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Contaduría y Administración. Este es un artículo Open Access bajo la licencia CC BY-NC-SA (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>)

case with COVID-19 in 2020. This paper present both a deterministic model and a Montecarlo simulation model in order to explained the transmission from the health pandemic to the financial pandemic. The graphical behavior is very similar to that observed in stylized events, especially in the short term.

JEL Code: C02, C63, E37, G01

Keywords: COVID-19; contagion; financial crisis; infectious diseases

Introducción

El estudio de los contagios en los mercados financieros y su efecto en el crecimiento de los precios y en la formación de burbujas con las consecuentes caídas o crisis financieras ha sido resultado de innumerables artículos y libros y han sido analizado desde diversos puntos de vista, algunos de los que se han convertido en trabajos clásicos.

El tema de los contagios es un tema importante y ampliamente estudiado en la literatura, hay muchos sistemas en la naturaleza donde existe este comportamiento, que van desde enfermedades contagiosas, como gripe, dengue, SIDA y más recientemente la pandemia del COVID - 19. En los mercados financieros también existe este tipo de comportamientos de contagio que provocan la formación de burbujas y las posteriores crisis financieras. De igual manera, en la naturaleza existe el comportamiento de contagio o de imitación en acciones de los animales y también en las sociedades donde hay procesos de contagio, por ejemplo, en manifestaciones, migraciones y en otros comportamientos sociales.

En el caso de contagios de enfermedades infecciosas este se da a través de un virus o bacteria y la transmisión es por contacto de persona a persona. En el caso de contagios financieros el comportamiento de contagio se da a través de medios de comunicación electrónicos, es decir, por correos electrónicos, twitter, facebook o búsquedas en los navegadores a partir con un evento que lo dispare y que sea el indicador para el crecimiento y/o caída de los precios.

Con el brote de la pandemia COVID-19 en la ciudad de Wuhan en China desde fines del año 2019 y su dispersión en el mundo con la consecuencia de un gran número de personas infectadas y de muertes. Los distintos países del mundo han establecido medidas de confinamiento en la población con el objetivo de disminuir su propagación y el número de fallecimientos pero con el efecto colateral de aplicar un freno en la economía.

El impacto inmediato y de corto plazo en la economía y mercados financieros ha sido brutal en todo el mundo y en particular para México. Los efectos van desde la caída del producto interno bruto (PIB), el aumento en el desempleo, la depreciación de divisas, la caída en las bolsas de valores y en general

el desplome de varios activos financieros. El COVID-19 no solo ha impactado al sector real de la economía y a los mercados financieros, sino que además, la pandemia ha afectado las cadenas de producción, la movilidad de trabajadores, el turismo, el transporte y casi todas las industrias han puesto a la mayoría de las economías en crisis poco vistas con anterioridad.

De acuerdo con Li (2018), cuando se diseña un modelo matemático de enfermedad infecciosa su objetivo es describir el mecanismo de transmisión de la enfermedad que consiste en que individuos infectados son introducidos a una población susceptible y la enfermedad es transmitida a otros individuos esparciéndose dentro de la población. Un individuo en la población puede permanecer asintomático en el periodo de inicio de la infección y poco a poco irá desarrollando los síntomas hasta que se diagnostica que tiene la enfermedad.

Si el número de casos aumenta por arriba del promedio durante un periodo corto de tiempo, un brote de la enfermedad ocurre y cuando la enfermedad se dispersa rápidamente a muchas personas se habla de una epidemia. Los individuos que se recuperan de la infección por tratamiento o respuesta del sistema inmune, obtiene un cierto nivel de inmunidad en contra de volver a infectarse (sucede casi en todas las enfermedades conocidas). Cuando se alcance el grupo de individuos susceptibles, el número de infectados se irá reduciendo y la epidemia poco a poco se irá deteniendo. Si además, un número de individuos susceptibles son agregados a la población por nacimientos, migraciones o reinfecciones en la población la epidemia puede persistir y permanecer en la población por largos periodos de tiempo, en este caso se dice que es endémica a la población y si la enfermedad se esparce a varios países y continentes entonces ocurre una pandemia.

Por otro lado, según Porras (2017) en un contagio financiero es importante entender que en la formación, transmisión, implosión de una burbuja financiera y las consecuentes crisis se relacionan con el aprendizaje social, en estos procesos los agentes de mercado observan las acciones de los demás e ignoran su propia información pensando que los demás poseen mayor información o inteligencia, como por ejemplo, cuando se sigue a los gurús financieros. Sin embargo, también hay otras razones del porque ignorar la propia información y actuar en un efecto manada siguiendo la multitud por imitación y que tienen que ver con la penalización por alejarse de las acciones de la multitud en caso de equivocarse.

La anterior autora ha escrito dos libros dedicados exclusivamente al tema de contagios, su publicación está motivada por el interés de entender algunos aspectos que resultan de las interacciones de la vida diaria entre diferentes tipos, de inversionistas en mercados incompletos donde el sesgo psicológico y otras fricciones ocurren en la valuación de activos y “trading” financiero.

A las burbujas frecuentemente se les aprecia en la primera fase de su vida y sirven de impulso a los sectores afectados y en general a la economía. Estas burbujas son un elemento intrínseco en la

dinámica de los mercados financieros, nacen en cualquier oportunidad o pueden ser creadas con un interés de un grupo específico. El contagio es el mecanismo que alimenta el crecimiento y transmisión de ciertos eventos dentro de varios segmentos de la economía y entre diferentes áreas geográficas.

En este sentido el modelo de Kirman (1991) considera tres aspectos importantes a considerar en el desarrollo de una pandemia financiera. El primero es que los agentes tomen sus decisiones de acuerdo con sus gustos o expectativas, el segundo es que los agentes reclutan a otros para sus elecciones específicas, convenciéndoles de que poseen información superior a la que aquellos tienen y que pudiera ser resultado de una externalidad. Y el tercer aspecto es que después de seguir un régimen durante algún tiempo se producirá un cambio y estos cambios pueden ser resultado de un proceso evolutivo en que la convergencia se logra después de que el éxito de una estrategia conduce a una auto conversión de los agentes.

En Sornette (2003) se presenta un historial de las crisis financieras y de cómo pueden ser entendidas utilizando los conceptos más modernos y sofisticados de la ciencia, es decir, sistemas complejos y fenómenos críticos, en ese mismo nivel las crisis de mercados financieros proveen una excusa para explorar el mundo de sistemas auto-organizados.

Según el autor, las crisis de mercados son momentos fascinantes para académicos y la gente práctica, de acuerdo al mundo académico los mercados financieros son eficientes solo en la reevaluación de cierta información que puede causar crisis, el miedo a estas crisis es una fuente perpetua de estrés, más que el evento por sí mismo y siempre arruina la vida de los demás. Se propone una vista radicalmente diferente al concepto de crisis y que tiene fundamentalmente un origen endógeno o interno y que los factores externos solo sirven para disiparla. Una consecuencia es que el origen de las crisis es mucho más sutil de lo que se piensa y es construido progresivamente en el mercado como un todo, o como un proceso auto organizado, en este sentido la causa verdadera de la crisis puede ser denominado una inestabilidad sistémica.

La inestabilidad sistémica es una gran preocupación de gobiernos, bancos centrales y agencias reguladoras, con la globalización de la información y tecnología han llevado a la economía a nuevas reglas. Con el apoyo del comité de supervisión bancaria Basilea se aconseja que en el manejo de los asuntos sistemáticos es necesario una adecuada gestión del riesgo y para alcanzar la confianza en el sistema financiero y el posible contagio pero por otro lado la necesidad de minimizar la distorsión de las señales de mercado y disciplina.

El objetivo del presente trabajo es plantear mediante de un modelo de pandemias ya existente (SIR), la transmisión y el comportamiento de contagio en los mercados financieros con la hipótesis inicial de que puede extenderse el modelo de pandemia a uno de contagio financiero mediante un modelo de

ecuaciones diferenciales y otro de simulación Montecarlo. La propuesta de trabajo se encuentra distribuida de la siguiente manera: en la sección presente se hace una introducción de los objetivos del artículo, así como los antecedentes de las pandemias por enfermedad y contagios financieros. En la segunda sección se revisa la literatura relacionada con el tema de la pandemia COVID-19 y las crisis originadas por los contagios en el medio financiero y sus efectos de los costos económicos y en la tercera sección los hechos estilizados. Posteriormente en la sección cuatro se presenta los modelos y en la cinco los modelos propuestos y al último los resultados y las conclusiones.

Revisión de la Literatura

El tema de las pandemias de salud, así como de los contagios en el mundo financiero y sus modelos es muy amplio y variado, de los trabajos consultados a continuación se mencionan algunos de los más relevantes.

En Mohsin et al. (2020) se menciona que la epidemia de coronavirus ha rápidamente amenazado los sistemas de salud y sin duda ha afectado a los mercados financieros, dicho artículo investiga la reacción de los mercados globales en términos de su caída y su correspondiente volatilidad al moverse el virus de China hacia Europa y Estados Unidos y sugiere que en la etapa de dispersión el efecto ha sido todavía más devastador.

En Gai y Kapadia (2010) se presenta un modelo de contagio financiero que explora como la probabilidad e impacto potencial de este contagio es influenciada por un choque idiosincrático agregando cambios en la estructura de la red liquidez en el mercado de los activos. Se expone que el sistema financiero no exhibe tendencia de fragilidad mientras que la probabilidad de contagio sea baja pero el efecto puede ser extremadamente amplio cuando una pandemia ocurre y explica la resiliencia del sistema a los grandes choques como el de 2007.

En el artículo de Okorie y Lin (2021) se investiga el efecto desde el punto de vista de un contagio fractal del COVID-19 en los mercados financieros. Se analiza una muestra ex-ante y ex-post del brote de COVID-19 en 32 economías afectadas y se compara el análisis de correlación cruzada móvil y fija. Se confirma un efecto de contagio fractal de la pandemia COVID-19 en los mercados de valores y sus efectos de contagio fractal se desvanecen en el tiempo tanto para los rendimientos de mercados como la volatilidad.

En Fan y Huang (2017), a diferencia de los análisis típicos macroeconómicos sobre crisis financieras se investiga la relación entre los efectos de propagación de mensajes negativos y el deterioro económico de la situación en el tiempo. La teoría de las crisis financieras generadas por la dispersión del

pánico de los inversionistas es analizada de manera análoga a una enfermedad infecciosa, el número de reproducciones es básico para determinar la propagación de mensajes negativos en un grupo de inversionistas, el número máximo de inversionistas que puede ser influenciado por un mensaje y el valor del umbral máximo de inversionistas antes de que la crisis suceda.

La estimación muestra que el número de inversionistas influenciados por mensajes negativos cuando el gobierno publica políticas relevantes como política monetaria o fiscal para prevenir la crisis financiera es claramente menor que el número de inversionistas influenciados por mensajes negativos cuando el gobierno no toma acciones, por tanto la participación del gobierno en la incertidumbre financiera puede contribuir a reducir la posibilidad de ocurrencia de una crisis.

En Wu et al. (2020) se menciona que desde la aparición del virus patógeno SARS-CoV-2 en Wuhan China en 2019 y su dispersión en todos los países, los gobiernos han estado sometidos bajo una gran presión para tratar de parar y controlar el brote con preparación y transparencia ya que el compartir información es crucial para el control del riesgo de salud. Según el autor, esta información debería incluir reportes del brote, diagnósticos, tratamientos y políticas de prevención.

En Wangping et al. (2020) se afirma que con la dispersión del COVID-19 en todo el mundo y en el caso particular de Italia, uno de los países que más ha padecido por la pandemia, los resultados han sido devastadores y menciona que el conocer este caso ayudará a establecer políticas de salud en cada país y recomienda establecer medidas más estrictas para el manejo de la enfermedad tan rápido como sea posible.

En el artículo de Boldog et al. (2020) se estima que el riesgo de un mayor brote en los países dependió de la evolución del número acumulado de casos en China fuera de las áreas cerradas, de la conectividad del destino de cada país con China, y del factor de contagio R_0 , así como el número de importaciones o restricciones de viaje países con alto nivel de contagio.

Hechos estilizados

El brote del coronavirus COVID-19 y su dispersión alrededor del mundo ha traído muchas consecuencias en el sistema económico y financiero mundial. En la figura 1 se observa el crecimiento de los contagios a nivel mundial en contraste con la búsqueda del término COVID-19 en el Internet, concretamente en el buscador google, donde se puede observar que son los anuncios oficiales sobre la pandemia y sus posibles consecuencias de situaciones de tipo económico y financiero los que tienen efectos más inmediatos y determinantes en el contagio de la información en general y en particular para los “traders” financieros, incluso más que el mismo número creciente de enfermos alrededor del mundo, esto en el corto plazo.

La llegada de la epidemia a Estados Unidos y Europa, así como la formalización de una pandemia por parte de la Organización Mundial de Salud (OMS), el movimiento a la baja de la tasa de interés por parte de la Federal Reserve System (FED) y la guerra del petróleo provocaron un crecimiento desmedido de búsquedas el internet de la palabra. Por otra parte en la figura, se aprecia en las búsquedas un rápido crecimiento y una posterior caída suave donde todavía continúa el crecimiento real de los contagios, se observa una correlación mínima entre estas dos variables.

En la figura 2 se observa una alta correlación negativa (-0.83) entre las búsquedas en google de la población general en el mundo de la palabra COVID-19 (en particular pueden ser representativa de los “traders”), los anuncios económicos y financieros, así como los propios de la pandemia, con la caída en los mercados mundiales representados por un típico índice mundial como el Dow Jones (DJI). En otras palabras, la pandemia real de enfermedad muy posiblemente puede transmitirse a una pandemia financiera a partir de las acciones humanas de los “traders” por medio de la comunicación instantánea de las redes sociales o el internet.

Por otra parte en la figura 3 se presenta un diagrama de dispersión donde se observa la correlación mencionada negativa ajustada por una regresión lineal entre el índice DJI y las búsquedas en google, es de notar que hay acumulación en dos grupos de datos (dentro de la misma figura pueden consultarse los estadísticos básico de la regresión).

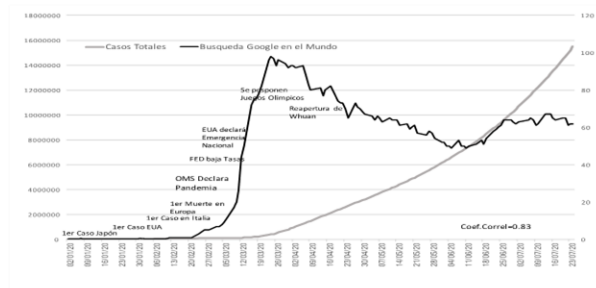


Figura 1. Crecimiento de contagios y efecto en la búsqueda de la palabra COVID-19 en google en el mundo.

Fuente: Elaboración propia con datos de <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data> y google trends.

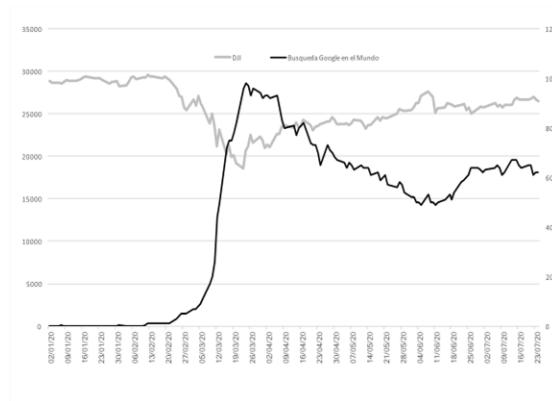


Figura 2. Búsqueda de la palabra COVID-19 en google y comportamiento del Índice Accionario DJI en el Mundo.

Fuente: Elaboración propia con datos de yahoo finance y google trends.

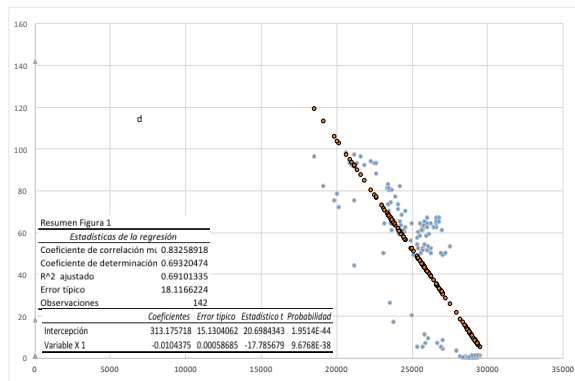


Figura 3. Dispersión de efecto en las búsquedas en google e Índice Accionario DJI en el Mundo.

Fuente: Elaboración propia con datos de yahoo finance y google trends.

El mismo ejercicio puede repetirse específicamente para el caso de Estados Unidos (EUA) en las figuras 4, 5 y 6. La figura 4 muestra el crecimiento de contagios de COVID-19 en EUA contra las búsquedas en google (COVID-19) particularmente en Estados Unidos y en las figuras 5 y 6 las mismas búsquedas de google contra el índice típico de Estados Unidos DJI y un diagrama de dispersión. Se presenta también los estadísticos de la regresión (figura 6) pero curiosamente la correlación es menor a la

mundial del caso anterior pero se vuelve a observar como se transmite los efectos del contagio de pandemia a contagio en los mercados por medio de la búsqueda de información en este caso el internet.

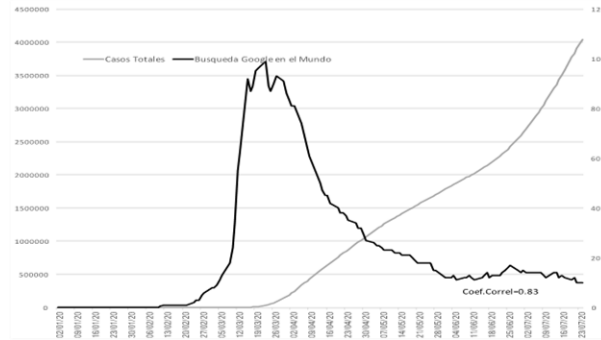


Figura 4. Crecimiento de contagios y efecto en las búsquedas de la palabra COVID-19 en google en Estados Unidos.

Fuente: Elaboración propia con datos de <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data> y google trends.

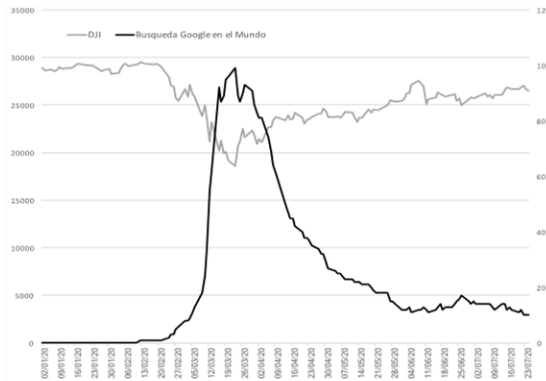


Figura 5. Búsqueda de la palabra COVID-19 en google y comportamiento del Índice Accionario DJI en EUA.

Fuente: Elaboración propia con datos de yahoo finance y google trends.

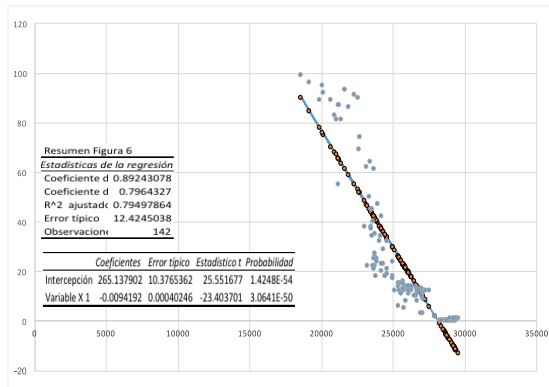


Figura 6. Dispersión de Efecto en la Búsquedas en google e Índice Accionario DJI en EUA.
 Fuente: Elaboración propia con datos de yahoo finance y google trends.

Al final se repite el mismo ejercicio para el caso de México en las figuras 7, 8 y 9 y se observa los contrastes entre búsquedas de la palabra COVID-19 en google y los contagios COVID-19 y de la misma forma las búsquedas contra el índice representativo de México (IPC), la correlación encontrada es de -0.91.

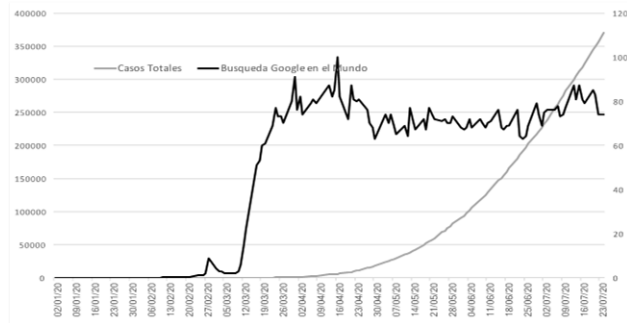


Figura 7. Crecimiento de Contagios y efecto en las búsquedas de la palabra COVID en google en México.
 Fuente: Elaboración propia con datos de <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data> y google trends.

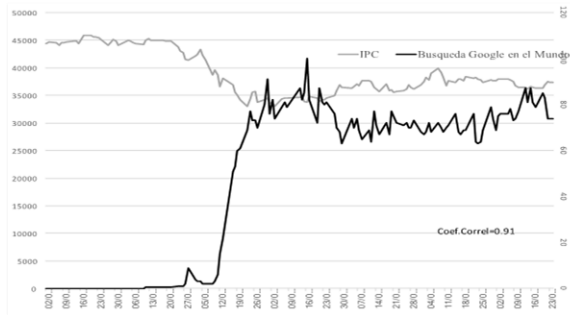


Figura 8. Búsqueda de la palabra COVID en Google y comportamiento del Índice Accionario IPC en México.

Fuente: Elaboración propia con datos de yahoo finance y google trends.

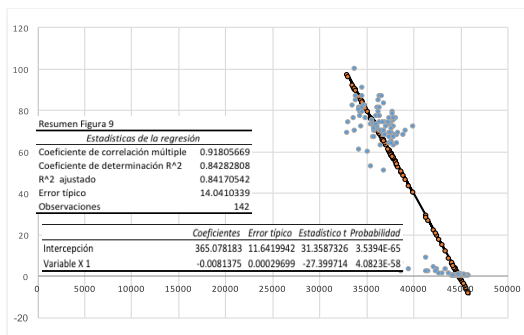


Figura 9. Dispersión de Efecto en la Búsquedas en Google e Índice Accionario IPC en México.

Fuente: Elaboración propia con datos de yahoo finance y google trends.

De las figuras anteriores en particular las figuras 3, 6 y 9 se puede inferir una correlación negativa en los casos del mundo, EUA y México entre las búsquedas de la palabra COVID-19 y los índices representativos de mercado respectivamente.

Modelo

En la presente sección se muestra una revisión de los modelos epidemiológicos básicos que servirán de base en la sección siguiente para la extensión a un modelo para describir el contagio de una epidemia de salud a un contagio del medio financiero. Dicha propuesta considerará los hechos estilizados de la sección anterior y construye un modelo determinista y de simulación Montecarlo para la transmisión de la pandemia en los mercados financieros.

Se considera una enfermedad infecciosa cuando es causada por un agente, virus, bacteria o toxina etc., y que puede pasar de un organismo huésped o anfitrión a otro a través de un modo de transmisión de contacto directo, aire, agua comida o de madre a descendientes u otros.

De acuerdo a Li (2018), los modelos matemáticos de enfermedades contagiosas ayudan a la comprensión de los mecanismos de transmisión y dispersión de las mismas y puede sugerir para un mejor control de la pandemia, medidas de prevención y una estimación de la severidad y potencial escala de la epidemia, teniendo en cuenta que los modelos son una aproximación a la realidad. En general existen tres distintas aproximaciones a la modelación matemática de las enfermedades infecciosas:

- a) Modelos estadísticos, orientados fundamentalmente a la utilización de los datos y son muy utilizados por epidemiólogos e investigadores de salud pública.
- b) Modelos determinísticos, típicamente hacen uso de ecuaciones diferenciales o en diferencias y supone que los cambios en las poblaciones son continuas en el tiempo y describe principalmente las interrelaciones entre las tasas de cambio.
- c) Modelos estocásticos, donde las enfermedades son tratadas como procesos estocásticos y los modelos describen las interrelaciones de sus distribuciones de probabilidad entre las poblaciones.

Dentro de los modelos determinísticos se encuentra la aproximación compartimental, donde la población huésped total se divide en grupos exclusivos de acuerdo a la evolución de la enfermedad, usualmente se consideran los grupos de los susceptibles (S), de los infectados (I) y de los recuperados (R), estos modelos generalmente se denominan SIR.

Li (2018), también nos comenta que el modelo determinista más simple (SIR) es el de Kermack y McKendrick (1991) que toma en cuenta las siguientes hipótesis de la población huésped o anfitriona,

- a) La transmisión ocurre de forma horizontal a través de contacto directo entre huéspedes
- b) La combinación de individuos es homogénea y el número de contactos entre huéspedes de distintos compartimientos dependen solamente del número de huéspedes de ese compartimiento (obedece lo que se conoce como ley de acción de masa²). El número de

² La ley de masa esta basado en la Ley de Acción de masa de la energía química cinética de Waage Gullberg (91864) y establece que la tasa de reacción química es proporcional a la reacción de la densidad de reactivo $A + B \rightleftharpoons AB$ s
tasa = $k[A][B]$

infecciones por unidad de tiempo o tasa de incidencia puede ser expresada por $\lambda I(t)S(t)$ donde λ se conoce como coeficiente de transmisión.

- c) La tasa de transferencia del compartimiento es proporcional al tamaño de la población del compartimiento, por ejemplo, la tasa de transferencia de infectados (I) a Recuperados (R), puede ser escrita como $\gamma I(t)$. Los Individuos Infectados llegan a precisamente a infectarse sin un periodo de latencia.
- d) No hay perdida de inmunidad y posibilidad de reinfección, implica que la tasa transferencia de recuperados recuperada (R) a población sana (S) es cero.
- e) No hay entrada de nuevos individuos susceptibles (influjo cero) y no se remueven de algún compartimento.
- f) En todo momento la población total huésped es contante.

Utilizando la hipótesis y variables de los términos anteriores se puede plantear un modelo matemático SIR más básico con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda IS \tag{1 a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda IS - \gamma I \tag{1 b}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{1 c}$$

con condiciones iniciales $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = 0$

donde las funciones son las siguientes: $S(t)$ es la población anfitriona, $I(t)$ es la población infectada y $R(t)$ es la población huésped recuperados y λ y γ son modelos del parámetro y donde el tiempo inicial es en el tiempo cero. La interpretación del sistema anterior es muy directa al pensar en tres compartimentos, el incremento de infectados aumentará de acuerdo al tamaño de infectados y susceptibles vía el coeficiente de transmisión ec. (1 b) y en esa misma proporción disminuiría la proporción de posibles

susceptibles ec. (1 a). Por otra parte el incremento de recuperados amentará de acuerdo al número de infectados con la proporción de la tasa de transferencia ec. (1c) y en esa misma proporción disminuirá el posible incremento de infectados ec. (2).

Y donde la población total no cambia y permanece constante $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ con $N(t) = N_0 = S_0 + I_0 + R_0$ y $\frac{dN}{dt} = 0$. Si se hace una revisión del comportamiento del crecimiento o no de una pandemia, hay que considerar los siguientes escenarios:

Si $\frac{dS}{dt} \leq 0$, $S(t)$ siempre es decreciente y entonces no ocurrirá la pandemia, en particular $S(t) \leq S_0$.

Si $S_0 < \frac{\gamma}{\lambda}$ entonces $\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} < 0$, por tanto $I(t)$ disminuye estrictamente y la pandemia no ocurre.

Si $S_0 > \frac{\gamma}{\lambda}$, entonces $S(t) > \frac{\gamma}{\lambda}$ por tanto $I'(t) > 0$, crece estrictamente y la pandemia ocurre.

R_0 se conoce como el número de reproducción o tasa reproductiva y es parámetro importante en el modelaje epidémico, mide el número promedio de infecciones secundarias causadas por una infección individual en una población susceptible durante la media del periodo de infección.

El modelo más básico anterior puede irse complementando al considerar al entrada y salida de posibles anfitriones a través de migraciones, nacimientos muertes, también incluir periodos de latencia e incubación, además la introducción de periodos de cuarenta entre otros.

Modelo Propuesto

A partir de los hechos estilizados de la sección 3 se puede observar que el brote de la pandemia del COVID-19 que se originó en la Ciudad Wuhan en China y que se dispersó a todo el mundo como una enfermedad contagiosa puede modelarse con Kermack y McKendrick (1991) para determinar el comportamiento de la población anfitriona, de los infectados y recuperados a partir de las tres ecuaciones (1 a), (1 b) y (1 c). Por otro lado, los mercados financieros del mundo en ciertos periodos presentan un comportamiento de contagio tanto para el crecimiento de los precios (burbujas) como en la subsecuente caída de los mismos, dando origen crisis financieras en cualquiera de los distintos tipos de activos financieros (por ejemplo, energéticos, acciones, derivados etc.).

A lo largo de la historia de la economía del mundo, las burbujas y crisis han existido y han sido provocadas por distintas razones, pero disparadas muchas veces por algún hecho de tipo netamente

financiero como pueden ser sobrevaloraciones de monedas, fraudes en operaciones, escasez de bienes entre otras pero finalmente también pueden ser originadas por pandemias.

Las enfermedades contagiosas son transmitidas usualmente por organismo microscópicos, que rebasan al sistema inmune por ser nuevos o por haber sufrido mutaciones. En los mercados financieros no existe tal virus pero indudablemente existe un criterio de contagio para compra o venta masiva de ciertos activos financieros. Esta forma de trasmisión no ha sido fácil de describir a pesar de los diferentes modelos propuestos (revisar sección 2 y 3). Una buena aproximación es la de Fan y Huang (2017) donde se considera un equivalente del modelo de Kermack y McKendrick (1991) para los mercados financieros, donde los individuos susceptibles de ser influenciados por noticias negativas son $S(t)$, los contagiados o infectados de malas noticias son $I(t)$, y los recuperados de esas malas noticias $R(t)$. El sistema de ecuaciones propuesto por el autor para este contagio financiero es similar a las ecuaciones (1 a), (1 b) y (1 c).

En este trabajo se propone el contagio a través de los medios de comunicación que ahora con la globalización de las comunicaciones ocurre casi instantáneamente entre los grupos de “traders” en el mundo utilizando las redes sociales y el internet. En este caso la transmisión de la pandemia de enfermedad humana a la pandemia financiera se propone utilizando como organismo de propagación el internet. La relación entre, el crecimiento en contagios, la búsqueda en internet y los movimientos de los mercados, en México y en el Mundo es muy alta como se mencionó en los hechos estilizados de la sección 3.

Se propone una generalización del modelo SIR planteado en Li (2018) y del modelo de Kermack y McKendrick (1991) y Fan y Huang (2017), donde se plantea un sistema de ecuaciones, donde las primeras tres ecuaciones corresponden a la descripción de la pandemia del COVID-19 (equivalente a las ecuaciones 1 a), 1 b) y 1c)) y las siguientes 3 son un sistema de ecuaciones para la descripción del contagio financiero en los “traders” buscando información en la redes sociales pero fundamentalmente en internet. El efecto de susceptibles, infectados y recuperados de los individuos en los mercados financieros tiene la misma lógica que el primer grupo de ecuaciones solamente que se incorpora además de la propia dinámica del contagio financiero el efecto del tamaño de los infectados de la pandemia de salud que es un variable que fundamental que conecta y retroalimenta al sistema de las últimas tres ecuaciones.

Se sugieren distintas combinaciones para la modelación en el comportamiento de los “traders” considerando sus dinámicas propias con la influencia de las características de la pandemia. Es de notar que la transmisión en los mercados financieros es prácticamente instantánea mientras que en la enfermedad es de persona en persona a través de la cercanía y contacto físico. A continuación se presentan

el modelo con características muy parecidas al Kermack y McKendrick (1991), agregando las ecuaciones para la descripción del contagio en los mercados financieros.

$$\frac{dS_1}{dt} = -\lambda_1 I_1 S_1 \quad (2 \text{ a})$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \lambda_1 I_1 S_1 - \gamma_1 I_1 \quad (2 \text{ b})$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 I_1 \quad (2 \text{ c})$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\lambda_2 (I_2 + I_1) S_2 \quad (2 \text{ d})$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \lambda_2 (I_2 + I_1) S_2 - \gamma_2 (I_2 - I_1) \quad (2 \text{ e})$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 (I_2 + I_1) \quad (2 \text{ f})$$

con condiciones iniciales $S_1(0) = S_{01} > 0$, $I_1(0) = I_{01}$, $R_1(0) = 0$, $S_2(0) = S_{02} > 0$, $I_2(0) = I_{02}$, $R_2(0) = 0$. Es importante recordar que en la epidemia financiera (S_2 , I_2 y R_2), además de incluir las variables propias financieras se incluye el efecto de los contagiados de la pandemia.

Al modelo anterior, se le puede agregar un efecto adicional creando un nuevo compartimiento o grupo dentro del sistema de ecuaciones del contagio financiero (variables que se han denotado con subíndices 2), con inversionistas remediados $G(t)$, es decir, “traders” que ya no creen en los mensajes negativos que van apareciendo porque los gobiernos ya han hecho público sus políticas fiscales y monetarias para el manejo de la crisis y de esta forma tratar de recuperar la confianza de los mercados y tiene que ver con el tamaño de la población infectada y el tamaño del mismo grupo de agentes remediados

Entonces se crea un nuevo compartimiento del grupo de contagio financiero G que afectará con la misma lógica a los afectados y recuperados del contagio financiero, ecuaciones (3 f) y (3 g).

$$\frac{dS_1}{dt} = -\lambda_1 I_1 S_1 \quad (3 \text{ a})$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \lambda_1 I_1 S_1 - \gamma_1 I_1 \quad (3 \text{ b})$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 I_1 \quad (3 \text{ c})$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\lambda_2 (I_2 + I_1) S_2 \quad (3 \text{ d})$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \lambda_2 (I_2 + I_1) S_2 - (\alpha_2 + \gamma_2) (I_2 - I_1) \quad (3 \text{ e})$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \alpha_2 (I_2 - I_1) + \eta_2 G_2 \quad (3 \text{ f})$$

$$\frac{dG_2}{dt} = \gamma_2 (I_2 - I_1) - \eta_2 G_2 \quad (3 \text{ g})$$

Ahora, además se considera una variante adicional al sistema que vincula principalmente contagios de salud al sistema de ecuaciones anterior incorporando un compartimiento de cuarentena, recordando que es un proceso donde se aísla al grupo infectado para no contagiar a los demás y con eso disminuir o parar ese proceso de transmisión. Entonces se crea una nueva variable que solo afectará al grupo de contagio de salud, especialmente ecuación (4 c) donde los infectados además de irse a

recuperación pudieran irse a cuarentena Q y del grupo de cuarentena regresar al grupo de recuperación, por lo tanto se crea una nueva ecuación (4 d) y su efecto en los recuperados de salud que por cierto no afectará este grupo al sistema de contagio financiero. A continuación se presenta el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales con la última modificación

$$\frac{dS_1}{dt} = -\lambda_1 I_1 S_1 \quad (4 \text{ a})$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \lambda_1 I_1 S_1 - \gamma_1 I_1 \quad (4 \text{ b})$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 I_1 + \phi_1 Q_1 \quad (4 \text{ c})$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \delta_1 I_1 - \phi_1 Q_1 \quad (4 \text{ d})$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\lambda_2 (I_2 + I_1) S_2 \quad (4 \text{ e})$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \lambda_2 (I_2 + I_1) S_2 - (\alpha_2 + \gamma_2) (I_2 - I_1) \quad (4 \text{ f})$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \alpha_2 (I_2 - I_1) + \eta_2 G_2 \quad (4 \text{ g})$$

$$\frac{dG_2}{dt} = \gamma_2(I_2 - I_1) - \eta_2 G_2$$

(4 h)

Los modelos anteriores son modelos determinísticos planteados por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales e incluyendo en cada uno distintos grupos o compartimentos. Otra manera alternativa se plantea a continuación de hacer una modelación a través de simulaciones, específicamente, las simulaciones Montecarlo.

El método Montecarlo es un método que permite resolver problemas matemáticos aplicados a distintas ciencias e ingenierías mediante la simulación de variables aleatorias. El método es muy poderoso porque permite simular cualquier proceso cuya marcha depende de factores aleatorios y además otros problemas matemáticos que no tienen relación con cuestiones aleatorias pero que se les puede crear una dependencia con probabilidad artificial que permita resolver problemas.

Aunque la base teórica del método era bien conocida desde hace mucho tiempo fue hasta el desarrollo de las computadoras empezó a tener un gran auge. Se considera como fecha de nacimiento del Método Montecarlo el año de 1949 en el que apareció la creación de este método suele ligarse a los matemáticos norteamericanos Von Neumann (1949) y Metropolis y Ulam (1949) y el método tiene dos características importantes:

La primera consiste en que su algoritmo tiene una estructura muy sencilla. Como regla, se elabora primero un algoritmo para la realización de la prueba aleatoria, después se repite esta prueba N veces de modo que cada experimento sea independiente de los restantes y se toma la media de los resultados de los experimentos. La segunda peculiaridad consiste en que el error es, como regla proporcional a la magnitud $\sqrt{D/N}$ donde D es una constante y N es el número de pruebas. Es decir, que para disminuir el error 10 veces en 100 veces. El problema se soluciona buscando diferentes formas de ajustar la D .

Pueden existir distintas formas de modelar matemáticamente el comportamiento del crecimiento de infectados en una pandemia, en una aproximación alternativa en este trabajo se propondrá ahora que se comporte de una forma similar al crecimiento de los precios financieros, es decir, el crecimiento en los precios en el tiempo t (S_t) estará integrado por una tendencia de crecimiento μS_t y una componente estocástica como un movimiento geométrico browniano $\sigma S_t dW_t$ en un mundo neutral al riesgo de acuerdo:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

(5)

Donde el primer término es la tendencia y el segundo es la componente estocástica donde W_t es un movimiento browniano ($W(t)_{t>0}$) (o también conocido como proceso de Wiener) en un espacio de probabilidad, con una filtración con las siguientes propiedades:^{[1][2]}

- i) $W_t(0) = 0$ ^{[1][2]}
- ii) Si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, entonces $W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_3) - W(t_2), \dots$, $W(t_n) - W(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes
- iii) Si $s < t$ entonces $W(t) - W(s)$ se distribuye como $N(0; t-s)$ ^{[1][2]}

Una expresión alternativa, después de una transformación logarítmica de la ecuación queda como:

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\Delta W\right) \quad (6)$$

Si utilizamos la expresión anterior para una expresión equivalente pero para el caso del número de contagios nos generaría de forma recurrente en el tiempo el número de contagios (ver Fan y Huang (2017)) pero con una tendencia de crecimiento $(\lambda_1 - \gamma_1)I_{1t}$ y un término estocástico $\sigma_1 I_{1t} dW_t$ con los parámetros involucrados a los contagios

$$dI_t = (\lambda_1 - \gamma_1)I_{1t}dt + \sigma_1 I_{1t}dW_t \quad (7)$$

o de forma equivalente, para la descripción del crecimiento en los contagios de la pandemia de salud

$$I_1(t + \Delta t) = I_1(t) \exp\left(\left((\lambda_1 - \gamma_1) - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\Delta t + \sigma_1\Delta W\right) \quad (8)$$

y para el caso de incremento de la pandemia en financiera por medio de la transmisión de la información resultaría algo equivalente ³

$$I_2(t + \Delta t) = I_2(t) \exp\left(\left((\lambda_2 - \gamma_2) - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\Delta t + \sigma_2\Delta W\right) \quad (9)$$

³ los subíndices 1, 2 se refieren a la pandemia de salud y financiera respectivamente

Sin embargo, después de hacer unos ejercicios la propuesta planteada en donde el crecimiento de contagios en el medio financiero se vea influenciado por el crecimiento de la pandemia de salud sería el siguiente

$$I_2(t + \Delta t) = \sqrt{I_2(t)I_1(t)} \exp\left(\left((\lambda_2 - \gamma_2) - \frac{1}{2}\sigma_{12}^2\right)\Delta t + \sigma_{12}\Delta W\right) \quad (10)$$

que es una visión distinta de plantear el efecto de la pandemia en el contagio de los mercados financieros. Después de la revisión de los modelos deterministas y de simulación en la sección siguiente se muestran los resultados obtenidos para ambos modelos.

Resultados

Una vez planteados los casos de los modelos deterministas de ecuaciones diferenciales de la sección anterior, el siguiente paso consiste en resolver cada uno de los sistemas propuestos que describen la dinámica de la evolución de la epidemia del COVID-19 y su transmisión a la epidemia financiera. Estos sistemas no son fáciles de resolver analíticamente por lo que serán resueltos por aproximaciones numéricas con el apoyo de software y programación desarrollado en Python. Hay que aclarar que los parámetros que los modelos varían en el tiempo y de región en región, por lo que se muestran algunos parámetros estándar como referencia y otras se calibran para enfatizar los efectos, no representan a ningún país o periodo de tiempo particular, sobre todo de los parámetros financieros pero algunos de ellos se tomaron con algunas referencias como son de Martin (2020).

De los ejercicios planteados un ejemplo del modelo SIR tomado como base y para los parámetros $\lambda_1 = 0.000167, \gamma_1 = 0.00167$ a continuación se muestra la gráfica típica, en esta se puede apreciar el comportamiento creciente de los infectados (I_t), de los recuperados (R_t) y la población huésped (S_t) y como esta va disminuyendo conforme los infectados van creciendo ecuaciones (1 a), (1 b), (1 c), ver figura 10.

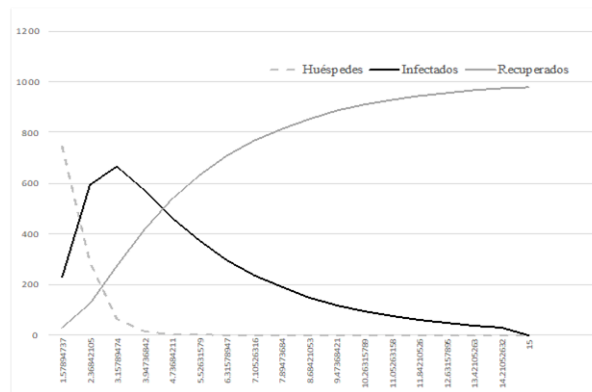


Figura 10. Modelo SIR original.

Fuente: Elaboración propia con ecuaciones (1 a), (1 b) y (1 c).

En el caso de la epidemia de salud que se traspa a la epidemia financiera con un sistema de seis ecuaciones diferenciales (2a), (2b), (2c), (2d), (2e) y (2f) que describe la evolución de la población anfitriona (S_{1t}), de los infectados (I_{1t}), de los recuperados R_{1t} , y de los “traders” anfitriones(S_{2t}), así como los contaminados de malas noticias (I_{2t}) y recuperados R_{2t} . Como se mencionó anteriormente después de probar varios parámetros, los típicos entre los que se encuentran dentro los intervalos y enfatizan los efectos se pueden ver en la figura 11. $\lambda_1 = 0.000167, \gamma_1 = 0.00167, \lambda_2 = 0.00167, \gamma_2 = 0.0167$. Y se puede observar que el comportamiento es similar a la de los hechos estilizados figuras 1, 4 y 7.

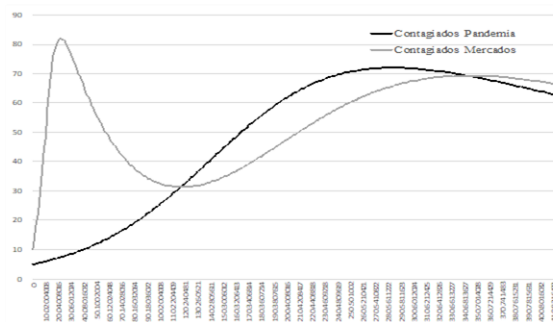


Figura 11. Modelo 1 Contagio pandemia a mercados.

Fuente: Elaboración propia con ecuaciones (2 a), (2 b), (2 c), (2 d), (2 e), (2 f).

En el siguiente sistemas de ecuaciones (3 a),(3 b), (3 c), (3 d), (3 e), (3 f) y (3 g), se considera que al caso de la pandemia financiera se le agrega un grupo compartimental de “traders” que ya no se ven

afectados por las malas noticias (figura 12) con los siguientes parámetros $\lambda_1 = 0.0029, \gamma_1 = 0.29, \lambda_2 = 0.5, \gamma_2 = 0.29, \alpha_2 = 0.2, \eta_2 = 0.1$ $\lambda_1 = 0.000167, \gamma_1 = 0.00167, \lambda_2 = 0.00167, \gamma_2 = 0.0167, \alpha_2 = 0.01, \eta_2 = 0.1, 0.01, 0.001$

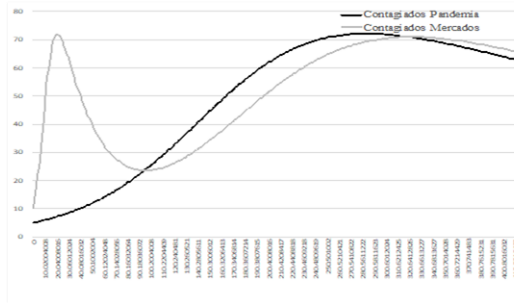


Figura 12. Modelo 2 Contagio pandemia a mercados.

Fuente: Elaboración propia con ecuaciones (3a), (3b), (3c), (3d), (3e), (3f), (3g).

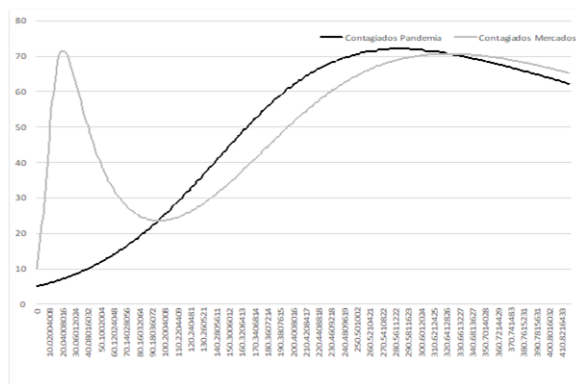


Figura 13. Modelo 3 Contagio pandemia a mercados.

Fuente: Elaboración propia con ecuaciones (4a), (4b), (4c), (4d), (4e), (4f), (4g), (4h).

En el último grupo se agrega un nuevo grupo compartimental donde están los individuos que son enviados a cuarenta con las ecuaciones (4a), (4b), (4c), (4d), (4e), (4f), (4g), (4h). Los parámetros son los siguientes (figura 13) con los parámetros: $\lambda_1 = 0.000167, \gamma_1 = 0.00167, \phi_1 = 0.001, \delta_1 = 0.01, \lambda_2 = 0.00167, \alpha_2 = 0.01, \gamma_2 = 0.0167, \eta_2 = 0.001, \alpha_2 = 0.2, \eta_2 = 0.001$.

Como se mencionó los comportamientos anteriores se pueden aplicarse a condiciones iniciales y los parámetros distintos donde se tenga especial interés, además de mencionar que los efectos de “traders” incrédulos y la cuarenta cambian poco los resultados.

Por otra parte utilizando la segunda propuesta de modelación con el método Montecarlo, se generan el escenario del crecimiento de infectados en la pandemia combinado el escenario de contagio en el mercado financiero, los parámetros se pueden irse ajustando a un determinado interés de periodo o país. Nuevamente haciendo la programación en python se generan escenarios con los siguientes parámetros Tabla 1 y figuras 14 y 15.

Tabla 1

Parámetros de contagio de salud a contagio financiero por método Montecarlo

	Contagio Pandemia	Contagio Financiero
Contagiados Iniciales	10	20
Media de Crecimiento en Contagios	5	5
D.E. de contagios	0.10	0.70
Tiempo del periodo	1 año	1 año
No. Simulaciones	10	10
Límite inicio contagio financiero	100	

Fuente: Elaboración propia

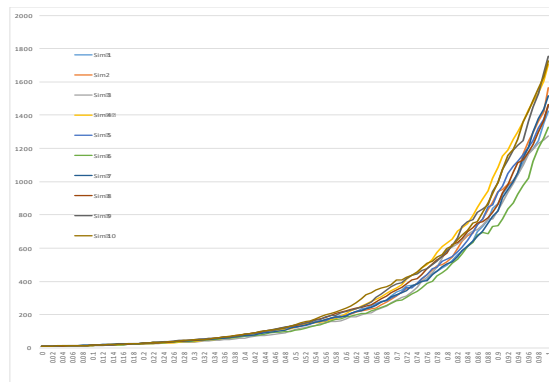


Figura 14. Simulación Montecarlo de crecimiento de pandemia.

Fuente: Elaboración propia.

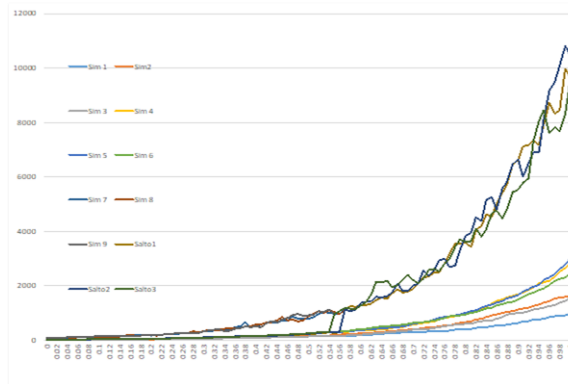


Figura 15. Contagio en mercado por pandemia de salud con simulación Montecarlo.
Fuente: Elaboración propia.

Como se muestra en las figuras 14 y 15, se observa el rápido crecimiento en el contagio financiero apoyado por los medios de comunicación que una vez alcanzado el límite superior impuesto por el contagio de salud empieza a dispararse la pandemia financiera.

Conclusiones

A pesar de la desafortunada situación que se vivió en todo el mundo en el 2020 a consecuencia del brote del COVID-19 en cuestión de salud (sobre todo cuestión de contagios, fallecimientos) y sus consecuencias económicas, es posible proponer modelos y analizar los comportamientos de las poblaciones con la finalidad de entender y explicar algunas de las situaciones que ocurrieron en el mundo. Como se ha planteado en el presente trabajo se hace una propuesta para explicar las relaciones entre contagios de salud y crisis financieras cumpliéndose el objetivo e hipótesis iniciales de modelar un contagio financiero a partir del efecto inicial de una pandemia utilizando un sistema de ecuaciones diferenciales y uno de simulación Montecarlo, de forma resumida a continuación se enlistan las conclusiones más importantes.

Previo a las crisis financieras existe un disparador exógeno que inicia el momento de contagio entre los agentes del mercado e invita a los participantes moverse en una dirección en las compras y ventas de activos financieros. En el caso del COVID-19 del año 2020 la enfermedad infecciosa se transmite de persona a persona por medio de un virus y que ha provocado su dispersión alrededor del mundo.

El contagio de una enfermedad infecciosa puede saltar al contagio de los mercados financieros no por un virus biológico, sino pudiera ser por el contagio en medios electrónicos como el internet y redes

sociales, en particular se propone como representativa las búsquedas en internet (google) sobre la palabra COVID-19 y que pone en alerta a los agentes del mercados por el número creciente de contagios y fallecimientos en la pandemia, así como las consecuencias económicas que traerá consigo la pandemia.

De la propuesta de modelos deterministas de ecuaciones diferenciales se extiende la modelación de una pandemia de salud a un contagio financiero, tomando como base inicial el modelo SIR y donde se fue extendiendo a otros a incluir más casos. Del resultado de las gráficas se observa que el comportamiento del contagio de la pandemia y la transmisión por medios electrónicos y posterior contagio a los mercados es muy similar al mostrado en los hechos estilizados (figura 11). El máximo del contagio financiero se alcanza mucho más rápido que el máximo de contagios por enfermedad, es decir, la transmisión del contagio en las crisis es mucho más rápido.

Adicionalmente como una extensión al modelo se incorpora un compartimiento o grupo en el contagio financiero de “traders” que ya no responden a contagios por la falta de certeza provocada por los anuncios de la política del gobierno que ya no tendrán efectos y por último se agrega un nuevo compartimiento o variable en el contagio de salud sobre la situación de cuarentena. Los resultados observados de ambos efectos son muy similares a los comportamientos de los primeros sistemas sobre todo en el corto plazo y de igual forma se alcanza primero el máximo en contagios financieros. En futuros trabajos el modelo puede extenderse a otras variables, parámetros y periodos más específicos.

El comportamiento de un geométrico browniano para la variable de infecciones de enfermedad y mercados en un corto plazo también es muy similar a lo observado. A pesar el número reducido de simulaciones se puede observar el salto en el número de contagios financieros al llegar a un límite de contagios de salud, es decir el efecto de contagio. De igual forma puede cambiarse los parámetros a distintos países o en distinto periodo de tiempo.

Referencias

- Boldog, P., Tekeli T., Vizi Z., Dénes A., Bartha F., Rost G. (2020). Risk Assessment of Novel Coronavirus COVID-19 Outbreaks Outside, *J. Clin. Med.*, 9(2), 571. <https://doi.org/10.3390/jcm9020571>.
- Fan, F. y Huang, Y. (2017). Research on Financial Crises with Infectious Disease model, *Humanity and Social Science*. World Scientific, 365, Recuperado https://api-store.oss-cn-shenzhen.aliyuncs.com/school/research_paper/9.Analysis%20of%20the%20problems%20of%20postgraduate%20students%20in%20universities%20and%20Discussion%20of%20Education%20Countermeasures.pdf.

- Gai, P. and Kapadia, S. (2010). Contagion in financial networks *Proceedings Royal Society. A* 466, 2401-2423. doi:10.1098/rspa.2009.0410, Recuperado <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2009.0410>.
- Kermack, W., McKendrick, A. (1991). Contributions to the mathematical theory of epidemics – I. *Bulletin of Mathematical Biology*, 53 (1–2), 33–55. doi:10.1007/BF02464423. PMID 2059741.
- Kirman, A. (1991). *Epidemics of opinion and speculative bubbles in financial markets*, M. Taylor editor, Money and Financial Markets. Macmillan, London.
- Li, M., (2018). *An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious diseases*, Springer International, Switzerland, Edición de Kindle. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-72122-4>.
- Martin, V. (2020), Una breve introducción al modelo SIR aplicado al caso del COVID-19, ICEI papers COVID-19 Instituto Complutense de Estudios Internacionales No. 12 <https://eprints.ucm.es/id/eprint/60026/>
- Metropolis, N., Ulam, S. (1949). The Monte Carlo Method, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 44 No. 247, pp. 335-341. <https://people.bordeaux.inria.fr/pierre.delmoral/MetropolisUlam49.pdf>.
- Mohsin, A., Nafis A., Syed A. Rizvi R. (2020). Coronavirus (COVID-19) An epidemic or pandemic for financial markets, *Journal of Behavioral and Experimental Finance*. 27 100341, doi:10.1016/j.jbef.2020.100341
Recuperado <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7229737/>.
- Okorie, B., Lin., B, (2021), Stock markets and COVID-19 fractal contagion effects, *Finance Research Letters*, article in press <https://doi.org/10.1016/j.frl.2020.101640>.
- Porrás, E. (2017). *Bubbles and Contagion in Financial Markets, Volume 2: Models and Mathematics* Palgrave Macmillan UK, Edición de Kindle. <https://doi.org/10.1057/978-1-137-52442-3>.
- Sornette, D. (2003), *Why stock markets crash Critical Events in Complex Financial Systems* Princeton University press.
- Von Neumann, J., (1949). Various techniques used in connection with random digits. *Monte Carlo Method*, National Bureau of Standards Applied Mathematics, 12: 36-38.
- Wangping J., Ke H., Yang S., Wenzhe C., Shengshu W., Shanshan Y. Jianwei W., Fuyin K., Penggang T., Jing L., Miao L., Yao H (2020). Extenden SIR prediction of the epidemics trend of COVID-19 in Italy and compared with Hunan, China. *Frontiers in Medicine*, Vol. 7, pp169. <https://doi.org/10.3389/fmed.2020.00169>
- Wu, D., Wu T., Liu Q., Yang Z. (2020). The SARS-Cov-2 outbreak: What we know. *International Journal of Infectious Diseases*. <https://doi.org/10.1016/j.ijid.2020.03.004>.