ACTIVIDAD GEOMÉTRICA EN EL AULA CON REGLETAS DE CUISENAIRE

María Dolores Moreno Martel
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

En agradecimiento al profesor Martín M. Socas Robayna, por su gran aportación teórica y práctica a la Didáctica de las Matemáticas

Resumen

Presentamos una experiencia de aula con estudiantes para maestro/a en la que se abordan contenidos de Geometría plana y didácticos. El objetivo es ofrecer una visión de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría distinta de la tradicional. Estos contenidos se conectan con la aplicación de un material didáctico, las regletas de Cuisenaire, para contextualizar un problema sobre cuadriláteros convexos. El desarrollo de la actividad se basa en el enfoque investigativo de las Matemáticas, en el modelo de resolución de problemas de Miguel de Guzmán y en la implementación de algunas de las competencias matemáticas de Mogens Niss.

Abstract

We present a classroom experience with students for teachers in which flat geometry and didactic contents are addressed. The objective is to offer a vision of the teaching and learning of Geometry different from the traditional one. These contents are connected with the application of a didactic material, the Cuisenaire rods, to contextualize a problem about convex quadrilaterals. The development of the activity is based on the investigative approach of Mathematics, on the problem-solving model of Miguel de Guzmán and on the implementation of some of Mogens Niss's mathematical competencies.

Introducción

Sabemos por nuestra experiencia y por resultados en investigaciones en Educación Matemática, (Hernández, Noda, Palarea y Socas, 2001; Ball y otros, 2008) que, el alumnado para maestro muestra dificultades y errores, pocas destrezas y actitud negativa en el aprendizaje de la Geometría. En este sentido, Barrantes y Blanco (2004, p.16) concluyen, en un estudio sobre concepciones de los estudiantes para maestro sobre la Geometría escolar, según recuerdos y expectativas, que a pesar de las reformas curriculares realizadas en épocas anteriores y los esfuerzos de los investigadores en mejorar su enseñanza y aprendizaje: "muchos estudiantes siguen llegando a las facultades con las mismas experiencias, falta de conocimientos y concepciones sobre la Geometría y su enseñanza que hace unos años, lo que indica que se sigue enseñando igual que antes de tales reformas". La enseñanza y el aprendizaje tradicional de la Geometría se ha caracterizado, principalmente, por la memorización de nociones y propiedades, previamente explicadas por el docente, y por la resolución de problemas, como aplicación de la teoría. En la solución de estos se enfatizan cálculos de áreas y volúmenes con fórmulas y razonamientos sobre dibujos prototipo de figuras. Del mismo modo, la enseñanza de esta materia ha estado, durante mucho tiempo, relegada al final de curso. Situación que puede ocasionar un tratamiento superficial o ausente de algunos contenidos geométricos. Todo ello ha podido a contribuir a que los estudiantes elaboren ideas acerca de su enseñanza y aprendizaje, análogas a las de esta perspectiva tradicional. En relación con las concepciones de estos alumnos, sobre las actividades geométricas escolares, Barrantes y Blanco (2005, p.41) identificaron en su investigación las siguientes:

> Los ejercicios y problemas son importantes en el aprendizaje de la Geometría, sobre todo los de medida. Los estudiantes conciben las actividades geométricas dentro de unas limitaciones algebraicas, formales y simbólicas. Prácticamente identifican problema con ejercicio. Las actividades manipulativas o de construcción de figuras no

son actividades matemáticas sino propias de otras materias como plástica.

Por ello, nos parece importante fomentar, en nuestro alumnado, la reflexión sobre sus conocimientos geométricos y la práctica docente tradicional de esta materia, a través de actividades investigativas. El planteamiento de estas enlaza conocimientos geométricos con conocimientos didácticos. En este último aspecto, la conexión se hace con el uso de un material didáctico (Regletas de Cuisenaire) y con el estudio de teorías sobre la adquisición y desarrollo de los aprendizajes correspondientes.

Comenzamos con los fundamentos teóricos que la enmarcan, para, posteriormente, desglosar su desarrollo y realizar un análisis de resultados. Finalmente, obtenemos conclusiones y hacemos propuestas de otras actividades.

Marco conceptual

Este trabajo lo hemos fundamentado en tres ejes: el enfoque investigativo de la enseñanza de la Matemática, el modelo de resolución de problemas de Miguel de Guzmán y las competencias matemáticas de Niss (2002).

Con respecto al enfoque de enseñanza de la Matemática, consideramos los cuatro estudiados por Baroody (2003), recogidos en de Castro (2007), y que sintetizamos a continuación:

1. El enfoque de destrezas: se basa en la repetición y memorización de destrezas básicas.
2. El enfoque conceptual: se basa en el aprendizaje de procedimientos con comprensión.

3. El enfoque de resolución de problemas: el desarrollo del pensamiento matemático se realiza a través del razonamiento y la resolución de problemas.
4. El enfoque investigativo: se trata de una combinación de los enfoques conceptual y de resolución de problemas.

En este último enfoque hemos querido enmarcar la experiencia que relatamos en este artículo. La finalidad fundamental es presentar al alumnado aspectos teóricos sobre la adquisición y desarrollo de aprendizajes matemáticos, puesto que, desde este:

> Los niños son considerados como capaces de construir activamente su conocimiento, construcción que es mediada y guiada por el profesor a través de propuestas de actividades previamente planificadas, aunque también a través de experiencias de investigación que surgen durante el proceso de aprendizaje. El objetivo es el aprendizaje de reglas, procedimientos y fórmulas de un modo significativo, pero también deben adquirirse competencias de razonamiento, representación, comunicación y resolución de problemas (de Castro, 2007, p.65)

Con respecto a la resolución de problemas, proponemos seguir el modelo de resolución de Guzmán (1995), ya que, como señala, coincide en algunos aspectos con otros ya conocidos (Mason, Burton y Stacey, Schoenfeld, etc.) y está basado en la obra de Polya. Este autor esquematizó el modelo en cuatro puntos:

1. Familiarízate con el problema
2. Búsqueda de estrategias
3. Lleva adelante tu estrategia
4. Revisa el proceso y saca consecuencias de él

Se trata de un proceso en el que, en líneas generales, el resolutor debe tener claro los elementos que intervienen en el problema, buscar algunas estrategias para su resolución con el fin de probarlas y elegir la más adecuada, poner en práctica la estrategia elegida y reflexionar sobre el proceso seguido. En esta última fase, también se explicitan las emociones que se sienten en la resolución del problema. Otro elemento importante de este modelo es la elaboración del protocolo del proceso de resolución, imprescindible para su reflexión.

Así mismo, nos parece adecuado destacar las distintas estrategias del pensamiento que menciona en su obra: Empieza por lo fácil. Experimenta. Hazte un esquema, una figura, un diagrama. Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada. Busca un problema semejante. Inducción. Supongamos el problema resuelto. Supongamos que no.

En este trabajo enfatizamos la experimentación y observación, puesto que, tal y como menciona de Guzmán (1995, p.161): "De tu observación surge una conjetura […] Sigues experimentando, es decir contrasta tu conjetura. Así compruebas que se sigue verificando, o que la tienes que rechazar, porque ya no se cumple". Además, menciona que, después, se requiere su prueba, el porqué de lo que afirma.

Con respecto a las competencias matemáticas de Niss (2002), comenzamos con la definición de competencia matemática. La concibe como una habilidad para entender, valorar, construir y aplicar matemáticas en situaciones propiamente matemáticas o de otros ámbitos de conocimiento, susceptibles de ser estudiadas con estas. Distingue ocho competencias y agrupadas en dos tipos, según apunta Alsina (2010):

Capacidad para formular preguntas y responder preguntas dentro y con las Matemáticas

1. Dominio de modos de pensamiento matemático.
2. Planteamiento y resolución de problemas matemáticos.
3. Análisis y construcción de modelos.
4. Razonamiento matemático.

Capacidad para manejar el lenguaje matemático y sus herramientas

5. Representación de entidades matemáticas.
6. Manejo de símbolos matemáticos y formalismos.
7. Comunicación en, con, y acerca de las Matemáticas.
8. Uso de recursos y herramientas.

En la experiencia que vamos a presentar en el siguiente apartado, se ponen en juego varias de estas competencias, de forma especial: Planteamiento y resolución de problemas, pensar matemáticamente (por ejemplo, la generalización), razonamiento matemático (conjetura, prueba, diferencias entre estos términos etc.) y comunicación en, con, y acerca de las Matemáticas (comunicación de los resultados al grupo clase).

Actividad de aula, desarrollo y análisis de resultados

La actividad geométrica se implementó con el alumnado del Grado de Educación Infantil de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria en el curso académico 2021-22. Esta se desarrolló con la modalidad de enseñanza semipresencial. Por consiguiente, un subgrupo estaba de forma presencial con la profesora en el aula y, el otro, de manera virtual por videoconferencia. Las competencias, objetivos y contenidos de la actividad están recogidos en el proyecto docente de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II, a saber:

Competencias:

1. Conocer los fundamentos científicos, matemáticos y tecnológicos del currículo de esta etapa, así como las teorías sobre la adquisición y desarrollo de los aprendizajes correspondientes.

Objetivos:

1. Conseguir la formación necesaria que permita dominar los contenidos matemáticos básicos y didácticos que se estudian en esta asignatura y que conforman el currículo de la Educación Infantil.
2. Reconocer el papel de las Matemáticas en el desarrollo del pensamiento del alumnado, al mejorar su razonamiento lógico, precisión, rigor, abstracción y capacidad para valorar conclusiones.
3. Lograr el espíritu crítico e investigador y la capacidad de expresarse con claridad, precisión y rigor; adquirir el desarrollo de competencias de autoformación y de trabajo cooperativo.
4. Conocer los medios, materiales, y recursos didácticos usuales en la Enseñanza y Aprendizaje de la Medida, la Geometría, la Estadística y el Azar.

Contenidos:

1. Recorrido teórico y práctico por los conceptos geométricos básicos: Geometría del plano y del espacio.
2. Enseñanza y aprendizaje de la Geometría en la Educación Infantil y primeros años de la Primaria: Teoría de enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Educación del pensamiento espacial. Materiales y recursos didácticos.

La actividad consistía en investigar cuadriláteros convexos que se puedan construir con cinco regletas de Cuisenaire. Acotamos el problema a las regletas que representan al 4, 5, 6, 8 y 9 respectivamente, para simplificar el número de posibilidades y el proceso resolutivo. El alumnado disponía individualmente del material necesario que debería utilizar para su realización, y su duración fue de dos sesiones de clase.

La actividad se inicia, después de la lectura comprensiva del enunciado, manipulando individualmente las regletas para conseguir algún cuadrilátero. Se presenta la primera duda: cómo debemos unir las regletas para ello. Convenimos realizarla de manera que las longitudes de los lados de los cuadriláteros coincidan con la de las regletas y sumas de estas. En relación con el proceso manipulativo, la mayoría de los estudiantes lo realiza de forma no sistemática y esto conlleva la repetición y restricción de tipos de cuadriláteros. Sin embargo, sí se observaron casos de sistematización parcial y se aprovechó para introducir una estrategia de organización: estudiar la suma de dos longitudes, haciendo uso de un diagrama de árbol (Figura 1).

Figura 1. *Diagrama de árbol: longitudes que se pueden adicionar*

Posteriormente, se consiguió, con la ayuda del diagrama, conocer las medidas de los lados de los cuadriláteros. Esto permitía clasificarlos *grosso modo* y conocer casos imposibles. Para ello, deberían aplicar la clasificación de cuadriláteros, estudiada previamente, y la condición que deben verificar cuatro longitudes para formar un cuadrilátero. A este respecto, comentamos que el alumnado presentaba sus producciones al resto de los compañeros por la videoconferencia. Se detectó que algunos alumnos no establecían correctamente las relaciones entre clases de cuadriláteros. En este sentido, queremos poner énfasis en que esta situación problemática permitía al alumnado construir figuras representadas de manera poco frecuente, en libros de texto, y pudo ser una dificultad para su clasificación. Por otro lado, otros, comprobaron experimentalmente la imposibilidad de obtener uno con segmentos de medidas 17, 4, 5 y 6 cm, respectivamente (Ejemplo 13, Tabla 2). Se preguntó el porqué de este caso y algunos respondieron: “porque 4 + 5 + 6 era menor que 17”. En este punto se introdujo la idea de contraejemplo en Matemática.

Algunos estudiantes, en el proceso manipulativo, se proponían conseguir determinados cuadriláteros: trapecios, trapezoides y paralelogramos. En este último caso, al realizar varios intentos y no conseguirlo concluyeron que no era posible. Se les planteó la necesidad de la prueba de su conjetura, originada en la experimentación de algunos casos. Por ello, se aprovechó la situación para animarlos a elaborar una tabla en la que se relacionara las sumas de dos longitudes, las medidas de los lados y el cuadrilátero construido (Figura 2). De esta manera, se les hizo ver que así se podrían recoger los casos estudiados y obtener conclusiones, basadas en argumentos matemáticos.

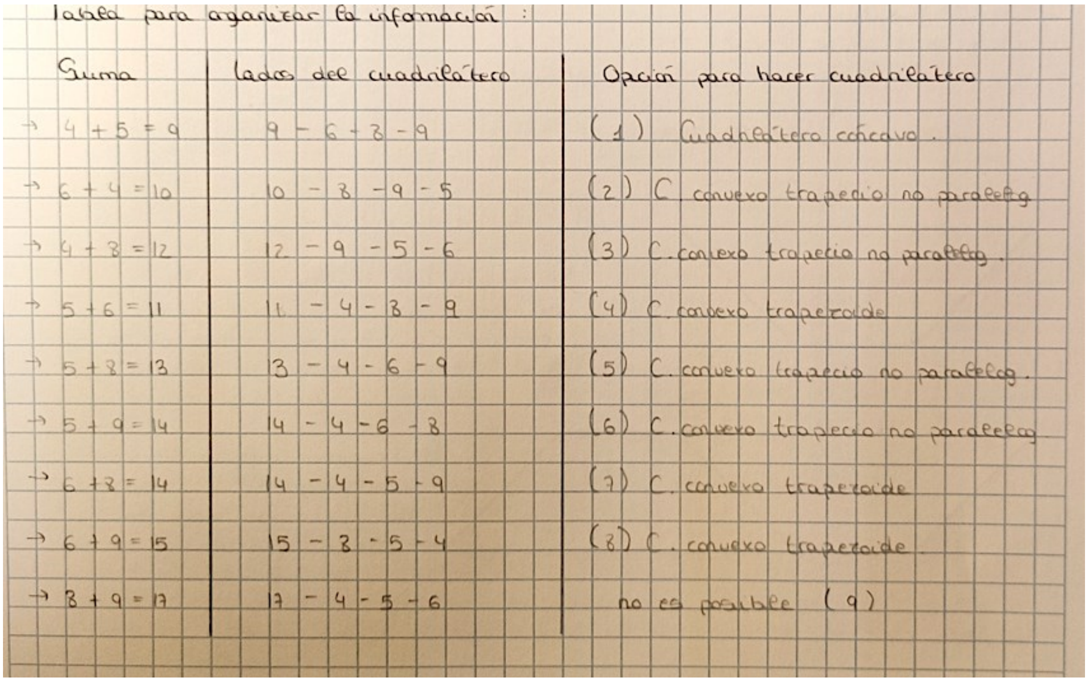


Tabla para organizar la información :

Suma	Lados del cuadrilátero	Opción para hacer cuadrilátero
→ 4 + 5 = 9	9 - 6 - 8 - 9	(1) Cuadrilátero cóncavo.
→ 6 + 4 = 10	10 - 8 - 9 - 5	(2) C convexo trapecio no paralelog
→ 4 + 8 = 12	12 - 9 - 5 - 6	(3) C. convexo trapecio no paralelog.
→ 5 + 6 = 11	11 - 4 - 8 - 9	(4) C. convexo trapezoide
→ 5 + 8 = 13	13 - 4 - 6 - 9	(5) C. convexo trapecio no paralelog.
→ 5 + 9 = 14	14 - 4 - 6 - 8	(6) C. convexo trapecio no paralelog.
→ 6 + 8 = 14	14 - 4 - 5 - 9	(7) C. convexo trapezoide
→ 6 + 9 = 15	15 - 8 - 5 - 4	(8) C. convexo trapezoide.
→ 8 + 9 = 17	17 - 4 - 5 - 6	no es posible (9)

Figura 2. *Tabla elaborada por una alumna*

Suma	Lados (cm)	Cuadrilátero/os (véase Tabla 2)
4 + 5 = 9	6, 8, 9, 9	Ejemplos 1 y 2
6 + 4 = 10	10, 5, 8, 9	Ejemplos 3
4 + 8 = 12	12, 5, 6, 9	Ejemplo 4
4 + 9 = 13	13, 5, 6, 8	Ejemplo 5
5 + 6 = 11	11, 4, 8, 9	Ejemplo 6
5 + 8 = 13	13, 4, 6, 9	Ejemplo 7
5 + 9 = 14	14, 4, 6, 8	Ejemplo 8
6 + 8 = 14	14, 4, 5, 9	Ejemplo 9
6 + 9 = 15	15, 4, 5, 8	Ejemplo 10
8 + 9 = 17	17, 4, 5, 6	No posible: Ejemplo 11

Tabla 1. *Tabla en la que se exponen todas las posibilidades*

El alumnado concluye que, al analizar los datos de la tabla relacionado con los lados, al no existir una cuaterna de números iguales dos a dos ((a, a, b, b); a y b pueden ser iguales), no se pueden obtener paralelogramos Por ello, se presentaban trapezoides o trapecios, no paralelogramos. Además, que se pueden hallar algunos cuadriláteros con dos lados iguales (6,8,9 y 9 cm). También, todos comprueban que, como 17 no es menor que 4 + 5 + 6 = 15, no hay solución para esta posibilidad.

En este desarrollo, se les preguntó si se podía conseguir más de un cuadrilátero con lados congruentes y una alumna respondió: “sí, modificando los ángulos” (Figura 1 y Figura 2). De esta manera, se pone en juego la posibilidad de infinitos casos. Comprobaron la existencia de cuadriláteros convexos isoperimétricos (P = 32 cm), pero no congruentes, con la existencia de los ejemplos obtenidos. También, se percataron de las dificultades para medir con precisión los ángulos de la figura elaborada con las regletas y comprobar el paralelismo entre lados opuestos. Hecho que pone de manifiesto al alumnado las limitaciones que pueden presentar los materiales didácticos. En este punto queremos añadir, como propuesta de mejora, la utilización de la aplicación informática *GeoGebra* para dibujar figuras y estudiar estos aspectos (véase Figura 3).

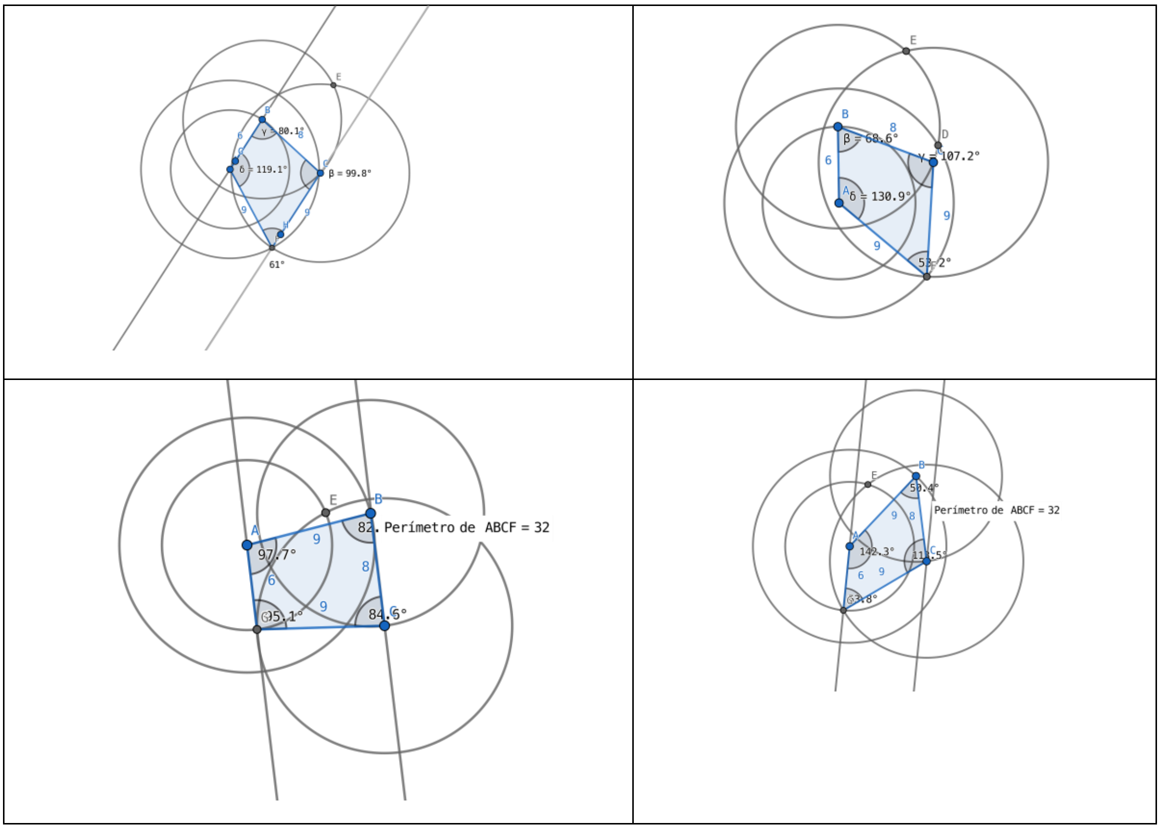


Figura 3. *Trapecios, no paralelogramo y trapezoides construidos con GeoGebra*. *Nota*: En las representaciones se observa que se conservan las medidas de los lados, pero se modifican los ángulos y el orden de los segmentos de la poligonal cerrada (los lados de 9 cm, en algunos ejemplos son contiguos y, en otros, opuestos).

En esta línea de trabajo, también se comentó que se podría estudiar qué cinco regletas se pueden seleccionar para construir un paralelogramo (por ejemplo: 4, 5, 9, 7, 7 cm) o aumentar el número de regletas para la investigación.

Finalmente, el alumnado valoró positivamente la actividad fundamentalmente porque se exponía un enfoque de enseñanza de las Matemáticas en el que el niño y la niña construyen conocimientos, distinto a los que habían observado en sus prácticas docentes.

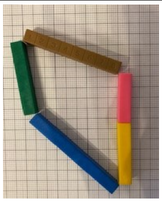
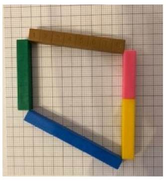
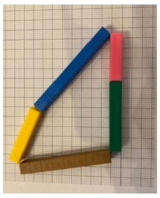
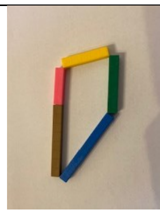
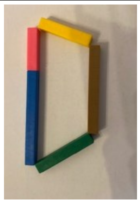
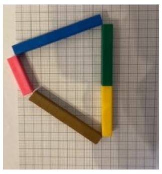
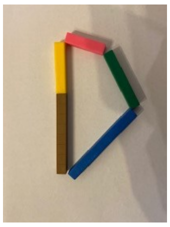
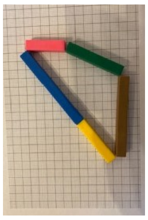
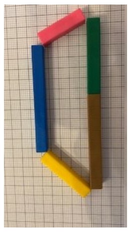
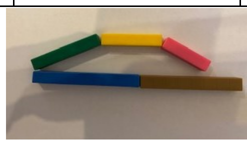
 Ejemplo 1	 Ejemplo 2	 Ejemplo 3	 Ejemplo 4	 Ejemplo 5
 Ejemplo 6	 Ejemplo 7	 Ejemplo 8	 Ejemplo 9	 Ejemplo 10
		 Ejemplo 11		

Tabla 2. *Algunos casos estudiados*

Conclusiones y propuesta de otras actividades

La conclusión principal a la que hemos llegado es que introducir en nuestras clases actividades geométricas de estas características no solo ponen a prueba conocimientos, sino que contribuyen a mejorar la visión de la Geometría y de su enseñanza. Estas son diferentes de las clásicas, en las que la aplicación de fórmulas tiene un papel predominante y los razonamientos se fundamentan en representaciones geométricas estereotipadas. Asimismo, este enfoque puede servir de modelo de enseñanza para su futura práctica docente.

Desde esta óptica, proponemos otras actividades de investigación, tales como:

1. ¿Qué triángulos se pueden construir con las diez regletas de Cuisenaire? ¿Puede existir algún triángulo equilátero?
2. Investiga qué triángulos rectángulos se pueden construir con tres regletas. Ídem con más regletas. ¿Qué relación verifican las medidas de sus lados?
3. Investiga qué triángulos isósceles se pueden construir con las diez regletas.
4. ¿Se puede construir un rectángulo con las diez regletas?

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2010). La pirámide de la educación matemática. Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, vol. 189, 12-16.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What make it special? *Journal of Teacher Education*, vol. 59, (5), 399-406.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre Geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 22, (2), 241-250.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números*, vol. 62, 33-44.

De Castro, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Infantil. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, vol. 11, 59-77.

De Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad de los procesos matemáticos*. Pirámide. Madrid.

Hernández, J.; Palarea, Mª. M.; y Socas, M. M. (2001). Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro. En Socas, M.; Camacho, M. y Morales, A. (eds.) *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, 115-125. Universidad de La Laguna. Tenerife.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and learning of mathematica. The Danish Project.* Roskilde: Roskilde University