SOBRE UNA REGLA DE CUANTIZACION DE A. EINSTEIN (1917) Y SU INFLUENCIA EN L. DE BROGLIE

LUIS NAVARRO VEGUILLAS
Universitat de Barcelona

RESUMEN

En este trabajo analizamos el contenido y el significado de una regla de cuantización introducida por A. Einstein en 1917. Esta condición de cuantización es muy poco conocida y ni siquiera aparece referencia a ella en las primeras historias de la teoría cuántica. No obstante ponemos de manifiesto que dicha regla representa una conexión importante entre la llamada antigua teoría cuántica *y las ondas de materia de L. de Broglie, de donde surgió la ecuación de Schrödinger.*

ABSTRACT

In this paper we analyse the contents and the meaning of a quantum rule introduced by A. Einstein in 1917. This quantum condition is scarcely divulged and is not even mentioned in the early histories of quantum theory. Nevertheless we show that this rule represents an important link between the so called old quantum theory *and the De Broglie matter waves, from which the Schrödinger equation emerged.*

Palabras clave: Física, Teoría Cuántica, Siglo XX, Reglas de cuantización, Principio adiabático, Acción, Ecuación de Hamilton-Jacobi, Separabilidad, Degeneración, Bohr, Sommerfeld, Einstein, De Broglie.

1. Introducción

Las ideas cuánticas que surgieron entre 1900 y 1925, especialmente a partir de 1913, cristalizaron en un cuerpo de doctrina conocido como *the old quantum theory* (TOQT, de ahora en adelante). Aunque como teoría siempre se consideró incompleta y con carácter provisional, TOQT logró éxitos importantes en campos tan dispares como, por ejemplo, la teoría de la

Recibido el 18 de junio de 1997

radiación, los espectros atómicos, la influencia sobre éstos de campos eléctricos y magnéticos, o la tabla periódica de los elementos [JAMMER, 1966; TER HAAR, 1967; HERMANN, 1971].

TOQT nunca reemplazó totalmente a la física clásica[1]; por el contrario ésta jugó un papel esencial en el desarrollo de aquella. En concreto la física clásica resultó fundamental en el establecimiento de dos pilares básicos sobre los que se asentaba TOQT: el principio adiabático de Ehrenfest [1913], que proporcionaba un método para descubrir estados cuánticamente posibles, y el principio de correspondencia de Bohr [1918], que regulaba las transiciones entre aquellos estados.

Bohr, como es bien sabido, abordó en 1913 la tarea de establecer un modelo general para átomos, fructificando así parte de la semilla cuántica sembrada en el Primer Congreso Solvay, en 1911, a partir especialmente de ideas originales de Planck y de Einstein, surgidas en la primera década del siglo XX. También es ampliamente conocido que, con posterioridad al modelo de Bohr, aparecieron diversas reglas de cuantización que pretendían ampliar el campo de validez de las leyes que determinan los estados cuánticos, hasta hacerlas aplicables a sistemas cada vez más generales [JAMMER, 1966, pp. 90-96].

El análisis específico del significado histórico de una regla de cuantización de Einstein [1917] será el principal objetivo de este trabajo. Se trata, en nuestra opinión, de una aportación einsteiniana injustamente relegada, cuando no ignorada, por físicos y hasta por un buen número de historiadores de la física cuántica[2]. Por razones de completitud, y antes de ocuparnos definitivamente de las reglas de cuantización, comenzaremos introduciendo unas consideraciones previas acerca del principio adiabático y del principio de correspondencia.

Aunque las diferentes reglas de cuantización no surgieron de forma deductiva, como particularizaciones de algún principio general, sino más bien como ingeniosas extensiones de reglas anteriores, es importante resaltar que el principio adiabático sí cumplió, en cierta medida y con limitaciones importantes, ese papel de elemento suministrador de una fundamentacion común para todas las reglas de cuantización existentes, y de un procedimiento para deducir otras nuevas a partir de aquellas [KLEIN, 1970, pp. 264-292; NAVARRO, 1995].

El principio de correspondencia se puede, y se suele, entender como la constatación de que la teoría cuántica coincide con la clásica cuando los números cuánticos resultan extraordinariamente elevados. Pero su papel heurístico en la evolución de TOQT fue mucho más relevante del que correspondería a un simple test de validez. Su empleo para la obtención de brillantes resultados en el terreno cuántico se basó en una especie de corolario: en buena lógica cabe pensar que esa peculiar conexión, mezcla entre analogía y correspondencia, que parecía relacionar física clásica y física cuántica, debe seguir siendo válida para números cuánticos no necesariamente grandes. Contemplado dentro del contexto histórico, el principio de correspondencia deja de ser un simple test y se manifiesta como una guía sumamente eficaz en la apertura de nuevos e insospechados horizontes para el desarrollo de TOQT [DARRIGOL, 1992, pp. 72-284].

2. Primeras reglas de cuantización (1913-1916)

El modelo atómico de Bohr surge en 1913 sobre la base del modelo planetario de Rutherford, de 1911, liberando a éste de sus limitaciones conceptuales debidas a su inestabilidad mecánica y electromagnética. El nuevo concepto que resolvía la cuestión era el de *estado estacionario*: el átomo sólo puede existir permanentemente en uno de éstos. El movimiento del electrón en un estado estacionario se determina por aplicación directa de la mecánica clásica; es la transición entre estos estados la que no se ajusta a las leyes de la física clásica, sino que está regulada por la expresión familiar $E = h\nu$. Es importante resaltar que, aunque formalmente esta relación pueda parecer una simple extensión de ideas precedentes de Planck y de Einstein sobre cuantización, la ley introducida por Bohr presenta un alto grado de originalidad, pues, contra las ideas hasta entonces vigentes, desliga la frecuencia del movimiento de una partícula cargada eléctricamente de la frecuencia de la radiación emitida.

Con objeto de determinar la energía de los estados estacionarios Bohr estableció una regla de cuantización que reducía considerablemente el número de estados permitidos, respecto a las previsiones de la física clásica: suponiendo que la órbita electrónica es circular, el momento angular del electrón en su giro alrededor del núcleo ha de ser igual a un múltiplo entero de unidades $\hbar = h/2\pi$, siendo h la constante de Planck.

La regla anterior se refería no sólo a movimientos periódicos, sino, además, circulares. El mismo Bohr, en 1916, acometió la tarea de fundamentar y extender la regla a movimientos más generales, empleando para dicho fin el principio adiabático de Ehrenfest: en una modificación adiabática reversible de los parámetros de un sistema (toda la energía invertida en cambiar el valor de los parámetros se incorpora íntegramente al sistema), éste se mantiene en el mismo estado estacionario, regido por las leyes de la mecánica clásica, y conservando el número cuántico correspondiente a aquel estado. Como consecuencia de ello, en una transformación adiabática reversible los movimientos posibles del sistema se convierten, a su vez, en movimientos posibles del sistema modificado, por lo que la forma más natural de expresar reglas de cuantización (es decir, limitaciones a los movimientos clásicamente permitidos), sería hacerlo en términos de invariantes adiabáticos (magnitudes físicas que no varían en una transformación adiabática).

Bohr intuyó una forma de generalizar reglas de cuantización, mediante la simple aplicación de las ideas de Ehrenfest sobre transformaciones adiabáticas. Bastaba imaginar deformaciones adiabáticas de los parámetros de un sistema dado hasta reducirlo a otro más sencillo para el que se conocieran sus reglas de cuantización; éstas, automáticamente, serían válidas también para el sistema original. Esta forma de proceder dejaba incluso la puerta abierta para establecer reglas de cuantización para sistemas con varios grados de libertad; y hasta para movimientos no estrictamente periódicos, pues estos son susceptibles de ser relacionados adiabáticamente con movimientos periódicos.

Pero hubo otras muchas generalizaciones de las primeras reglas de cuantización que, si bien resultaban compatibles con el principio adiabático, su introducción no apareció inicialmente relacionada con éste. Por ejemplo Planck, en 1915, generalizó condiciones de cuantización anteriores hasta hacerlas aplicables a sistemas con un número arbitrario de grados de libertad, a costa de seleccionar adecuadamente las regiones del espacio de las fases en las que se podían desarrollar los movimientos posibles del sistema [PLANCK, 1915]. Pronto se demostró que las condiciones de Planck resultaban equivalentes a las de Sommerfeld[3]; y ya que fueron éstas las que mayor papel jugaron en el desarrollo de TOQT, debido a sus aplicaciones experimentales, nosotros no nos ocuparemos aquí especialmente de aquellas.

La generalización con mayor impacto de las primeras reglas de cuantización fue debida a Sommerfeld, quien a través de varios largos artículos publicados en 1916 extendió las ideas de Bohr de 1913 y las aplicó a la determinación del espectro del hidrógeno; incluyendo finalmente órbitas elípticas y la variación relativista de la masa del electrón, Sommerfeld logró explicar teóricamente el origen de la estructura fina detectada experimentalmente en las rayas espectrales del hidrógeno [SOMMERFELD, 1916].

Las condiciones de Sommerfeld exigían que para todo estado estacionario de un sistema con un número finito f de grados de libertad, en el que cada momento canónico p_i fuera función periódica tan sólo de la respectiva coordenada canónica q_i, se había de verificar

$$\oint p_i dq_i = n_i h \qquad (i = 1, 2, ..., f) \tag{1}$$

donde n_i es un número entero no negativo y la integración se extiende a lo largo de un período de q_i. En el caso de sistemas degenerados el número de condiciones (1) independientes es, de hecho, inferior al número f.

Wilson e Ishiwara, independientemente, publicaron también en 1915, unas semanas antes de aparecer la generalización de Sommerfeld, sendos trabajos en los que se trataba de obtener la regla de Planck para el oscilador, y la de Bohr para el movimiento circular, a partir de una única regla más general. Tanto Wilson como Ishiwara formularon sus respectivas condiciones de cuantización de forma equivalente al contenido de la expresión (1) de Sommerfeld, pero ninguno de los dos las aplicó nunca a los espectros atómicos, por lo que, en general, fueron las condiciones de Sommerfeld las que lograron el mayor impacto posterior[4].

La actitud de Sommerfeld, al menos en la época que estamos tratando, ante la validez de las condiciones (1), fue de renuncia total a lograr una justificación rigurosa. Aunque en ellas parecía radicar la esencia de la teoría cuántica acerca de los estados estacionarios, Sommerfeld las considero expresamente como *unproved and perhaps incapable of being proved* [SOMMERFELD, 1916, p. 6]. Pero el principio adiabático de Ehrenfest, como este mismo se encargó de poner de manifiesto, proporcionaba una cierta fundamentación para dichas condiciones, dado el carácter de invariante adiabático de la integral que aparece en (1), al menos en el caso del problema de Kepler en coordenadas polares. En cualquier caso, parece que Sommerfeld no llegó nunca a considerar seriamente que el principio adiabático representara una fundamentación de las condiciones de cuantización [KLEIN, 1970, pp. 284-292]. El problema del grado de validez de las condiciones (1) sólo quedó definitivamente aclarado en 1926, cuando se demostró que pueden deducirse a partir del formalismo de la mecánica cuántica, como aproximaciones que proporciona el conocido *método WKB*, de Wentzel, Kramers y Brillouin [JAMMER, 1966, p. 96].

Pronto apareció un problema que guarda estrechísima relación con el objetivo de nuestro estudio: el de la elección de coordenadas adecuadas para aplicar las condiciones de cuantización (1). Por ejemplo, el problema de Kepler se podía abordar tanto con coordenadas polares como con coordenadas parabólicas, apareciendo ya una dificultad de envergadura: la aplicación de (1) en cada una de estas clases de coordenadas no conducía a idénticos resultados. De ello surgía la urgente necesidad de especificar el tipo de coordenadas requerido para la correcta e inambigüa aplicación de las reglas de Sommerfeld.

3. Cuantización de movimientos multiperiódicos

Por aplicación de la mecánica clásica se puede deducir que los sistemas con un número finito de grados de libertad para los que la ecuación de Hamilton-Jacobi sea integrable por separación de variables, se prestan adecuadamente a la correcta aplicación de las condiciones (1). En efecto, en este tipo de sistemas cada p_i resulta ser una función tan sólo de la respectiva q_i. Además se conoce desde el siglo pasado, gracias a trabajos de Staude y de Stäckel, que tales sistemas son multiperiódicos[5]: en todo movimiento ligado del sistema (entendiendo por tal que ni se dirige al infinito ni se colapsa en un punto) cada par de variables canónicas conjugadas (q_i, p_i) describe una órbita cerrada en su correspondiente espacio de fases bidimensional, siempre que a cada punto de este espacio le corresponda un único par de coordenadas canónicas, por supuesto [JAMMER, 1966, pp. 101-102].

Dado que entre este tipo de problemas se encuadra, por ejemplo, el de Kepler relativista (estructura fina del hidrógeno), el de Kepler con campo eléctrico (efecto Stark del hidrógeno) y con campo magnético (efecto Zeeman del hidrógeno), se comprende el papel relevante jugado por los sistemas separables, y por los correspondientes movimientos multiperiódicos, en el desarrollo de TOQT. El movimiento global, no obstante, no será periódico en general; más bien recordará a una figura de Lissajous generalizada. Si, y sólo si, las frecuencias correspondientes a tales movimientos simples son todas conmensurables entre ellas, el movimiento global resulta estrictamente periódico.

Ocurre, a veces, como ya hemos indicado anteriormente, que la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede separar mediante dos sistemas de coordenadas diferentes, no estando garantizada a priori la equivalencia de resultados al aplicar las reglas (1). Surge entonces el problema sobre el criterio en qué basar la elección adecuada del sistema de coordenadas. Y es aquí donde el tema de la degeneración juega un papel esencial, por lo que conviene precisar. Se dice que un movimiento multiperiódico es degenerado cuando entre las frecuencias ν_i de los f movimientos simples existe alguna relación de dependencia lineal, del tipo

$$\sum_i s_i \cdot \nu_i = 0 \qquad (2)$$

(Por supuesto la sumatoria es desde *1* a f y las s_i representan números enteros). Si existen n relaciones del tipo anterior se dice que la degeneración es de orden n. El movimiento global resulta periódico y su trayectoria en el espacio de las fases se cierra estrictamente si, y sólo si, existen f-1 relaciones independientes del tipo (2). Ello equivale a afirmar que tan sólo existe una frecuencia independiente; un caso particular ocurre cuando todas las frecuencias son iguales, como sucede en el movimiento clásico de Kepler, si no se tiene en cuenta la corrección relativista.

Puede demostrarse que, en el caso en que no exista degeneración, la aplicación de las condiciones (1) no presenta dificultad esencial: las coordenadas que separan la ecuación de Hamilton-Jacobi están unívocamente determinadas, salvo irrelevantes transformaciones puntuales dentro de cualquier par (q_i, p_i), por propiedades de las envolventes de las trayectorias, siendo la naturaleza geométrica de ciertos parámetros de estas envolventes lo que conduce a la determinación de las coordenadas adecuadas. Por el contrario, cuando existe degeneración, como ya hemos comentado, la separación de la ecuación de Hamilton-Jacobi no es única y la aplicación de (1) no esta exenta de ambigüedades: las órbitas permitidas no coinciden necesariamente al calcularlas con distintos sistemas de coordenadas, si bien el espectro de energías es el mismo [SOMMERFELD, 1922, pp. 351-352, 381, 672-673].

El problema de la elección adecuada del sistema de coordenadas en movimientos degenerados se puede abordar desde dos alternativas distintas que se diferencian, además, en la filosofía que las preside: cabe complicar el problema hasta hacer desaparecer la degeneración, o bien se puede, y se debe, reducir el caso a otro más sencillo donde, a efectos prácticos, la degeneración se manifiesta simplemente como una disminución del número de reglas de cuantización (1).

Como ejemplo sencillo de la primera vía se puede considerar el problema de Kepler clásico. Este se puede complicar, antes de tratarlo, incluyendo la variación relativista de la masa, y resolverlo entonces como un movimiento multiperiódico de dos grados de libertad, pero ahora con dos frecuencias independientes (antes sólo había una); es decir, se ha eliminado la degeneración y se llega a las coordenadas polares como las adecuadas para separar la ecuación de Hamilton-Jacobi y para aplicar las reglas de cuantización de Sommerfeld. El paso ulterior al límite no relativista proporciona unos resultados libres de cualquier ambigüedad surgida al cuantizar directamente el problema inicial.

Igualmente se podía haber procedido, siguiendo con la primera vía, incluyendo una interacción adicional como, por ejemplo, un campo eléctrico externo, para el caso de un problema inicial de interacción coulombiana. Tras resolver el nuevo problema, que ya no conlleva degeneración, se puede recuperar el problema original pasando al límite de campo exterior nulo [EPSTEIN, 1916 & SCHWARZSCHILD, 1916]. Resulta cuando menos curioso constatar que, si bien Schwarzschild pretendía en 1916 (murió el mismo día que su artículo apareció publicado) deducir una explicación del efecto Stark a partir de (1), con su trabajo introdujo en TOQT un método hasta entonces familiar sólo entre los astrónomos: el basado en el empleo de las variables acción-ángulo, que resultó eficaz para abordar el problema de la degeneración por la segunda de las vías a las que antes nos habíamos referido.

4. Variables acción-ángulo. Invariancia adiabática de la variable de acción

Hemos indicado ya que cuando existe degeneración la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable con diversos sistemas de coordenadas, por lo que la aplicación de las condiciones (1) implica cierto grado de ambigüedad. La trayectoria no presenta el carácter de curva de Lissajous y no pasa arbitrariamente cerca de todo punto del espacio de configuración. Las envolventes antes mencionadas ahora no existen y no se puede obtener un criterio para deducir a priori las coordenadas apropiadas para aplicar (1). Veamos qué aportan las variables acción-ángulo a la eliminación de tan indeseable ambigüedad.

Se demuestra que, para movimientos multiperiódicos con un número f de grados de libertad, es posible efectuar una transformación canónica,

$$(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f) \rightarrow (w_1, w_2, \dots, w_f, J_1, J_2, \dots, J_f) \qquad (3.1)$$

que escribiremos abreviadamente como $(q, p) \rightarrow (w, J)$, donde se verifica:

$$J_i = \oint p_i dq_i = n_i h \qquad (i = 1, 2, \dots, f) \qquad (3.2)$$

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, f) \qquad (3.3)$$

$$W = \sum_{i=1}^{f} W_i \ (q_i, J_1, J_2, \dots, J_f) \qquad (3.4)$$

En las expresiones anteriores W representa a la función característica de la teoría de Hamilton-Jacobi, relacionada con la función principal S por la expresión

$$S = W - Et \qquad (4)$$

donde E es la energía del sistema; siempre en el caso habitual de hamiltonianos sin dependencia temporal explícita[6].

En las nuevas variables canónicas (w, J) el hamiltoniano resulta ser función exclusivamente de las que se conocen como variables de acción J_i:

$$H = H\,(J_1, J_2, \ldots, J_f) = E \qquad (5)$$

Las variables conjugadas de las de acción son las llamadas variables angulares w_i. La integración de las ecuaciones de movimiento en las nuevas variables conduce a:

$$w_i = \nu_i t + \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, f) \qquad (6.1)$$

$$\nu_i = \frac{\partial H\,(J_1, J_2, \ldots, J_f)}{\partial J_i} = \nu_i\,(J_1, J_2, \ldots, J_f) \qquad (i = 1, 2, \ldots, f) \qquad (6.2)$$

Las β_i son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales y las vi son las frecuencias de los f movimientos periódicos simples. Finalmente, se puede demostrar que cada variable w_i cambia en una unidad cuando el correspondiente movimiento asociado al grado de libertad i recorre un ciclo completo de la variable q_i. Desde un punto de vista intuitivo se puede decir que las J_i determinan la trayectoria del sistema y las w_i el punto concreto dentro de ella.

Las variables acción-ángulo permiten tratar más adecuadamente, en el caso de sistemas multiperiódicos, el problema de la degeneración, que ahora se puede abordar según la segunda vía antes apuntada. En el caso de que exista degeneración de orden (o grado) n, la trayectoria del sistema en el espacio de configuración f-dimensional, en lugar de pasar tan cerca como se desee de cualquier posición, sólo tiene esta propiedad en un espacio más reducido de f-n dimensiones; además, las distintas frecuencias ya no son independientes, por lo que cabe pensar en una descripción del sistema con un número inferior de frecuencias: exactamente con f-n frecuencias independientes. Esta reducción se puede obtener mediante una transformación canónica, de las variables acción-ángulo (w_i, J_i) en otras variables (w_i',J_i'), cuyas propiedades conducen a

$$w_i' \neq 0\,, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, f - n\,. \qquad (7.1)$$

$$w_i' = 0\,, \quad \text{para} \quad i = f - n + 1,\, f - n + 2, \ldots, f\,. \qquad (7.2)$$

Así, en el nuevo conjunto de variables, n frecuencias resultan nulas y las f-n restantes son independientes. Además, en la nueva representación el hamiltoniano sólo depende de las variables de acción correspondientes a las frecuencias distintas de cero. Para un sistema completamente degenerado, con f-1 relaciones independientes del tipo (2), el hamiltoniano final sólo depende de una variable de acción, como sucede, por ejemplo, en el problema clásico de Kepler[7].

Mediante el empleo de las variables acción-ángulo es posible reconducir cualquier problema a un caso de no degeneración y, por tanto, eliminar toda posible ambigüedad en la aplicación de las reglas de cuantización (1). Estas deben aplicarse con las *variables propias* (las w_i', J_i'), por lo que en el caso de existir degeneración de grado n sólo se obtienen f-n reglas de cuantización. De esta forma las variables acción-ángulo constituyeron, a partir del citado trabajo de Schwarzschild [1916], el procedimiento ortodoxo para cuantizar los movimientos multiperiódicos; en particular los referentes a espectros atómicos.

Burgers, estudiante primero y luego colaborador de Ehrenfest en Leiden, generalizó el formalismo de las variables acción-ángulo a casos más generales, en los que no se presupone la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi y, por tanto, dichas variables no se pueden construir por el procedimiento que acabamos de indicar. Burgers logró su objetivo mediante la introducción de una hipótesis adicional: para todo sistema conservativo existe una transformación canónica que permite pasar de las variables de partida (q_i, p_i) a otras (w_i, J_i) con las propiedades características de las variables acción-ángulo. La hipótesis de Burgers, aunque no del todo justificada, permitía considerar definitivamente a tales variables como las más adecuadas para formular y aplicar sin ambigüedad las reglas de cuantización.

El articulo de Ehrenfest [1916], en el que se analizaba el papel de los invariantes adiabáticos en la justificación y extensión de las reglas de cuantización de Sommerfeld, acababa con el siguiente *postscriptum*, redactado por Ehrenfest tras leer las pruebas de imprenta de su propio trabajo:

"The beautiful researches of Epstein, Schwarzschild and others which have appeared in the meantime, show the great importance the cases which are integrable by means of Stäckel's method of 'separation of variables' have for the development of the theory of quanta. Hence the question arises: how far are the different parts into which these authors separate the integral of action according to Stäckelís method adiabatic invariants? In the problem treated by Sommerfeld this is the case, as is shown in section 8".

Tras serle propuesta por Ehrenfest como parte de su tesis doctoral, esta cuestión fue inmediatamente resuelta por Burgers, al demostrar que las variables de acción son invariantes adiabáticos en todo movimiento multiperiódico[8]. Así puede afirmarse que, desde 1917, el principio adiabático de Ehrenfest quedó indisolublemente ligado con el desarrollo de TOQT. Y no sólo por lo que a las reglas de cuantización respecta, sino que también apareció involucrado, por ejemplo, con el principio de correspondencia [DARRIGOL, 1992, pp. 132-137]. A pesar de la aspiración inicial de Ehrenfest, el principio adiabático no llegó a convertirse en una herramienta eficaz para cuantizar movimientos. Más bien resultó ser un test para probar la validez de diversos procedimientos que surgieron al respecto; un ejemplo ilustrativo lo proporciona el tratamiento cuántico de Planck para el trompo asimétrico [JAMMER, 1966, p. 106].

5. Una regla de cuantización de Einstein [1917]

Se trata de una contribución muy poco conocida de Einstein, y que sólo apareció publicada en las actas de la Sociedad Alemana de Física [EINSTEIN, 1917]; tiene como objetivo básico establecer una formulación de las condiciones de cuantización que resulte independiente de las coordenadas elegidas para el tratamiento del problema, lo que, obviamente, no acontece con (1). Las reglas de cuantización existentes privilegiaban las coordenadas en las que se daba la separación de variables de la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi, hecho que, en opinión de Einstein, nada tiene que ver con el problema de la cuantización.

La propuesta de Einstein consiste en sustituir las condiciones (1) por

$$\oint \sum_i p_i dq_i = n_k h \tag{8}$$

donde la integral se realiza a lo largo de cualquier curva cerrada en el espacio de configuración del sistema y n_k es un número entero. Pero todo ello requiere oportunas aclaraciones.

En primer lugar resulta que el integrando de (8) es un diferencial exacto dW, por lo que la nueva regla ya no depende de las coordenadas:

$$\oint \sum_i p_i dq_i = \oint \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} = \oint dW = \Delta W = n_k h \tag{9}$$

Si W fuera una función univaluada de las q_i, se obtendría $\Delta W = 0$. Pero como la función característica W, también llamada acción, es una función multivaluada de las coordenadas, ΔW no ha de ser necesariamente cero: lo que estipula la regla de Einstein es, precisamente, que la variación de W a lo largo de un camino cerrado en el espacio de configuración ha de ser un múltiplo entero de h[9].

Supuesta la existencia de W, la integral de (8) adopta los mismos valores para todas las curvas cerradas que, en el espacio de configuración, pueden transformarse entre sí por continuidad. En particular, para todas aquellas curvas que, mediante una transformación continua, puedan reducirse a un punto, la integral valdrá cero. Pero en el caso usual de los movimientos acotados, la zona del espacio de configuración asequible a un determinado movimiento es una región múltiplemente conexa y, por tanto, existen en ella curvas cerradas que no pueden reducirse a un punto por transformaciones continuas. No obstante, sólo hay un número finito de curvas cerradas a las que se pueden reducir todas las curvas cerradas en dicha región, mediante deformaciones continuas [EINSTEIN, 1917, pp. 84-85].

Einstein considera dos posibilidades para la trayectoria de un movimiento durante un tiempo infinito, sobre el espacio de configuración de f dimensiones[10]:

(i) Existe, en dicho espacio, una región de f dimensiones tal que la trayectoria se aproxima a cualquier punto, en el curso del tiempo, tanto como se desee prefijar; es lo que sucede, por ejemplo, en el movimiento ligado de Kepler con corrección relativista.

(ii) La trayectoria se encuentra siempre en un continuo de dimensión menor que f, como sucede cuando la trayectoria es exactamente cerrada; es el caso del movimiento ligado de Kepler clásico, sin corrección relativista.

El caso (i), continua Einstein, es el más general, por lo que en el resto de su trabajo se refiere básicamente a él. En un movimiento de este tipo, descrito mediante las coordenadas generalizadas q_i, un cierto elemento de volumen del espacio de configuración es atravesado infinitas veces por una misma trayectoria. Cada vez que lo atraviesa se puede asociar a dicho elemento un momento generalizado, representado por los f valores de las p_i. Así a cada elemento de volumen se le puede asociar un conjunto de momentos: uno por cada vez que la trayectoria pase por el elemento en cuestión. Einstein señala que sólo es aplicable la regla de cuantización (8) al caso en que a cada elemento de volumen le corresponda sólo un número finito de momentos, pues si éstos fueran un número infinito (como sucede en el caso de la colectividad microcanónica, al corresponder a cada coordenada generalizada los infinitos momentos compatibles con la energía del sistema) las p_i no se podrían representar como funciones de las q_i y la regla carecería de sentido. Para Einstein, la aplicabilidad de (8) exige que la simple trayectoria determine un campo p_i que derive de un potencial W [EINSTEIN, 1917, p. 89].

En el ejemplo del movimiento de Kepler relativista el móvil se desplaza de forma que su distancia r al centro de atracción oscila periódicamente entre un valor mínimo r_1 y un valor máximo r_2. Si se toma un punto del espacio de configuración asequible al movimiento, en este caso la superficie anular limitada por dos circunferencias concéntricas de radios r_1 y r_2, la trayectoria pasará infinitas veces por sus proximidades; p_r resulta ser una función bivaluada de la posición, y adopta valores positivos o negativos según que el elemento que rodea al punto sea atravesado siguiendo valores crecientes o decrecientes de r, respectivamente.

El conocido recurso analítico de las hojas de Riemann resuelve esta ambigüedad: se considera duplicada la superficie anular, con los bordes circulares correspondientes unidos, de forma que la trayectoria cambia de hoja cada vez que r adquiere uno de sus valores extremos. La superficie así construida, con dos hojas de Riemann, permite considerar a las p_i de nuestro ejemplo como funciones continuas y univaluadas de las q_i. Esta construcción analítica es denominada por Einstein, para el caso general, *espacio de coordenadas racional*, pudiéndose hablar también, en consecuencia, del correspondiente *espacio de fases racional*. La condición de cuantización (8) se refiere, exclusivamente, a curvas cerradas en este espacio de configuración racional [EINSTEIN, 1917, p. 90].

El potencial W también es una función multivaluada. Tal como expresa la regla (8), si W es un valor del potencial en un punto del espacio de coordenadas racional, dicho potencial también admite los infinitos valores $W+nh$ en ese mismo punto, siendo n un número entero. Einstein acaba su trabajo de 1917 con un apartado suplementario dedicado a justificar la hipótesis previa esencial de que las p_i deriven de un potencial W; lo hace sobre la base de la teoría de Hamilton-Jacobi, si bien insiste en comentar que ello no garantiza, en general, la univaluación de los momentos generalizados.

Einstein incluye un comentario final que nos parece relevante para determinar el alcance de su trabajo. Si se conocen f constantes de movimiento independientes de la forma

$$R_k\,(q_i, p_i) = cte \qquad (10)$$

donde las R_k sean funciones algebraicas de las p_i, cada p_i puede ser entendida como función de las q_i, con lo que la regla (8) resulta perfectamente aplicable y, por supuesto, coincide con las de Sommerfeld-Epstein (aquí Einstein no cita a Schwarzschild) en el caso en que cada p_i resulte expresable como función de la correspondiente q_i exclusivamente. Si, por el contrario, se conocen menos de f constantes de movimiento del tipo (10), las p_i no se pueden expresar a través de las q_i y, por tanto, las condiciones de cuantización no son aplicables, ni siquiera en la forma más general (8). Hasta aquí el articulo de Einstein; veamos ahora algunas consideraciones nuestras respecto a su significado y a su impacto.

6. Algunas precisiones en torno a la regla de cuantización de Einstein

Las consideraciones que siguen pretenden contribuir a una valoración más ajustada de esta aportación einsteiniana. Versan sobre diferentes aspectos, no del todo independientes, que trataremos por separado sólo para mayor claridad.

6.1 Carácter invariante de la regla de Einstein

Este es, quizás, el aspecto más claro; también el más conocido, dentro de la escasísima difusión del trabajo. Nos parece importante resaltar que se trata de una sola regla, que ahora se concreta en una única relación, a la que colaboran todos los grados de libertad del sistema. El subíndice k que figura en la expresión original de Einstein, nuestra (8), no es más que una forma de indicar que n_k puede tomar diferentes valores discretos; ello no guarda ninguna relación con los grados de libertad del sistema ni con posibles multiplicidades de esta regla.

En cuanto a su carácter invariante, baste recordar que el primer miembro de (8) es fácilmente reconocible como uno de los invariantes integrales canónicos de Poincaré [GOLDSTEIN , 1965, cap. 8], lo que garantiza la invariancia de la regla ante transformaciones canónicas. Como una transformación usual de coordenadas puede representarse mediante una transformación canónica, se deduce sin mayores dificultades que la condición (8) resulta invariante ante cambios de coordenadas.

Extraña, quizá, no encontrar ningún comentario de Einstein en torno al carácter de invariante adiabático del primer miembro de (8), y así justificar más su regla de cuantización. Máxime si se tiene en cuenta, no sólo el conocimiento que Einstein tenía de los intereses científicos y de los trabajos de Ehrenfest, sino también la visita que Einstein hizo a Leiden poco antes de publicar el trabajo que venimos comentando[11]. Pero es que, además, la visita de Einstein a Leiden, insistentemente invitado por Ehrenfest, tuvo lugar en la primera quincena de octubre de 1916 [KLEIN, 1970, pp. 302-305], previsiblemente cuando Burgers, a sugerencia de Ehrenfest, debía estar trabajando en la demostración del carácter de invariante adiabático de la integral de acción, pues los correspondientes resultados positivos constan como leídos en sesiones académicas de noviembre, diciembre y enero [BURGERS, 1917]. Así no parece que Einstein se enterara a tiempo de la aportación de Burgers, a pesar de las circunstancias favorables y de que el trabajo de Einstein no llegó a la revista que lo publicó hasta el 11 de mayo de 1917.

6.2 Naturaleza de las trayectorias

En el segundo apartado de su trabajo Einstein indica reiteradamente que la integración de (8) se refiere a una línea cerrada [EINSTEIN, 1917, pp. 84-85]. Pero en el cuarto apartado, según hemos comentado ya, afirma no considerar el caso de trayectorias cerradas y, en su lugar, dedica el resto de su análisis al caso en que la trayectoria no se cierra exactamente, por lo que no puede ser reducida a un espacio de dimensión menor al número de grados de libertad. Resulta así una aparente contradicción que ha contribuido, en nuestra opinión, a crear cierta confusión sobre el verdadero alcance de la regla de Einstein, por lo que la cuestión merece ser aclarada.

Tras analizar detenidamente el trabajo, no nos cabe la menor duda de que Einstein siempre considera que la regla (8) sólo se formula exactamente para movimientos periódicos en el espacio de configuración racional. Pese a ello, Einstein cree que la condición (8) también es aplicable a otros movimientos acotados; de hecho son los movimientos multiperiódicos no cerrados los que considera con mayor sentido físico. En estos, tras un tiempo suficientemente elevado, el sistema se encontrará tan próximo a su posición inicial como se desee prefijar. Pero nuestra percepción de la posición está últimamente condicionada por el carácter aproximado de toda medida; así, a efectos prácticos, es como si todos los movimientos acotados fueran periódicos, aunque con períodos ciertamente grandes en la mayoría de los casos.

Así pues, si Einstein parece despreocuparse de los sistemas estrictamente periódicos no es porque su regla de cuantización no les sea aplicable. De hecho la deducción que él presenta, insistamos, sólo es rigurosamente válida para éstos, en los cuales el período está perfectamente definido, sin la ambigüedad que se da en el caso de los multiperiódicos y a la que nos hemos de referir más adelante, al relacionar la regla de Einstein con las ideas de De Broglie. En los movimientos periódicos, a veces, se dan ciertas simplificaciones. Por ejemplo, la multivaluación de las p_i no siempre aparece. En el oscilador armónico unidimensional los momentos son funciones bivaluadas de las coordenadas. Pero en el problema clásico de Kepler, planteado en coordenadas polares y sin corrección relativista, a cada posición representada por el par de coordenadas (r, φ) le corresponde un solo par (p_r, p_φ); no es necesario recurrir a las superficies de Riemann, al coincidir el espacio de configuración racional con el espacio de configuración ordinario[12].

6.3 Extensión a sistemas no separables

Hemos indicado ya cómo Einstein, al final de su trabajo, propone una posible aplicación de (8) a ciertos casos en los que la separabilidad del sistema no está garantizada. Ello, sin embargo, no representa una innovación importante. Burgers, como también hemos comentado, había generalizado unos meses antes el formalismo de las variables acción-ángulo, y con ello la aplicabilidad de (1), para sistemas no necesariamente separables, pero que se ajustaban a ciertas hipótesis [BURGERS, 1917, pp. 163-169]. Ciertamente Einstein procede de forma distinta a la de Burgers, pero también exige el cumplimiento de una condición previa adicional: la existencia de f constantes de movimiento independientes, expresables en la forma (10).

La extensión apuntada por Einstein carece de interés en cuanto a su posible aplicación a los sistemas atómicos. Como él mismo indica en su trabajo [EINSTEIN, 1917, p. 92], en el caso de tres cuerpos, Poincaré ya había demostrado que existen menos constantes de movimiento que las requeridas para la generalización propuesta; así ni el átomo de helio sería abordable según la extensión sugerida por Einstein.

6.4 Relación con las reglas de cuantización precedentes

En el artículo de Einstein que venimos analizando no aparece comparación explícita, ni relación de jerarquía, con las reglas de cuantización surgidas entre 1913 y 1916. La valoración que hizo Einstein de su trabajo, en el tiempo de su publicación, puede deducirse a partir de ciertas afirmaciones suyas al respecto. En el mismo artículo presenta su aportación como *...una pequeña modificación de la condición de Sommerfeld-Epstein...*, que evita el inconveniente de que las reglas de cuantización se expresen de forma dependiente de las coordenadas [EINSTEIN, 1917, p. 84]. Según Einstein, el trabajo no contiene tanto una generalización de reglas de cuantización precedentes como un enunciado más conveniente de las de Sommerfeld y Epstein.

Que ésta era la sincera opinión de Einstein, y no una forma precavida de expresarse en una publicación científica, lo prueba su comentario a Besso, su amigo y confidente, en relación con el contenido del trabajo que nos ocupa[13]:

"Hier j'ai exposé aux rangs clairsemés de notre société de physique une petite question concernant la théorie des quanta d'après Sommerfeld et Epstein. Je la rédigerai prochainement".

A pesar de que, como veremos más adelante, la regla de Einstein jugó cierto papel en la formulación de la mecánica ondulatoria, Einstein no pareció modificar su valoración de *contribución menor* acerca de su trabajo de 1917. De hecho, ni en la correspondencia ulterior con Besso, por ejemplo, ni tampoco en su autobiografía científica [SCHILPP, 1969], Einstein volvió a referirse a su regla de cuantización.

7. Influencia de la regla de Einstein en la formulación de L. de Broglie

Se trata, ahora, de poner de manifiesto la influencia que la regla de cuantización de Einstein, de 1917, pudo ejercer en la formulación de las ideas de L. de Broglie acerca de la universalidad de la asociación de un movimiento ondulatorio a toda partícula material, expuestas con suma claridad en su tesis doctoral, defendida en la *Sorbonne* el 25 de noviembre de 1924 [DE BROGLIE, 1924].

Es en el capítulo III (*Les conditions quantiques de stabilité des trajectoires*) donde podemos encontrar las claves sobre la cuestión que nos interesa, pues allí se cita la regla de Einstein como una formulación de la condición de cuantización que resulta invariante ante cambios de coordenadas. De Broglie la escribe para tres dimensiones e indica expresamente que la enuncia para trayectorias *cerradas* (las itálicas figuran en el original), poniendo de manifiesto una peculiaridad de dicha regla que la hace particularmente interesante para sus objetivos. Veamos.

De Broglie destaca que la integral que figura en (8) es la misma que aparece en el principio de Maupertius:

$$\delta \int_{A}^{B} \sum_{i} p_i dq_i = 0 \qquad (11)$$

Dado que este principio es equivalente al de mínima acción, ley básica de la que se puede deducir la mecánica, De Broglie concluye afirmando que la integral de acción juega un papel relevante tanto en la mecánica clásica (principio de Maupertius) como en la teoría cuántica (regla de cuantización de Einstein) [DE BROGLIE, 1924, p. 63].

Esta conclusión era importante dentro del esquema del joven físico francés, pues sus objetivos básicos consistían esencialmente en tratar de incorporar las peculiaridades cuánticas a la mecánica clásica, teniendo en cuenta las analogías existentes entre ésta y la óptica geométrica, así como el hecho de que esta última se puede concebir como una aproximación de la teoría general (ondulatoria) del campo electromagnético. Llevando esta línea de analogías hasta sus últimas consecuencias De Broglie consideraba la siguiente cuestión: ¿No será posible formular una mecánica general (ondulatoria) de la cual la mecánica clásica fuera una aproximación, análogamente a como la óptica geométrica resulta una aproximación de la teoría electromagnética? Planteado así el problema, no cabe duda que la regla de Einstein merece atención especial, pues en ella aparece la integral de acción, una magnitud que se presta a explotar ventajosamente un aspecto de esta clase de analogías, como comprobaremos inmediatamente.

Para cada movimiento multiperiódico existen infinitos pseudoperíodos, siendo cada uno de ellos aproximadamente igual a múltiplos enteros positivos de los períodos de los diferentes movimientos simples que lo integran. Tras cada pseudoperíodo el móvil se encuentra en una posición tan próxima a la inicial como se haya prefijado. Considerando este caso, De Broglie incluye una demostración de que la regla (8) de Einstein, aplicada a movimientos multiperiódicos, conduce a las reglas (1) de Sommerfeld; nos detendremos en esta demostración porque conviene hacer algunas precisiones sobre un aspecto problemático de la misma.

Sea un movimiento tridimensional de este tipo con períodos simples T_1, T_2, T_3, para el cual τ es un pseudoperíodo (*período aproximado*, para De Broglie), determinado de acuerdo a las características del problema en cuestión. Por ejemplo, si un electrón, en lugar de un punto matemático, se considera un objeto físico de dimensiones esféricas de radio 10^{-13} cm., cada vez que la trayectoria del electrón penetre en una esfera prefijada de este tamaño, afirmaremos con pleno sentido físico que la trayectoria ha vuelto a pasar por el mismo punto. Con los tiempos anteriores se verifica una relación del tipo

$$\tau = n_1T_1 + \varepsilon_1 = n_2T_2 + \varepsilon_2 = n_3T_3 + \varepsilon_3 \qquad (12)$$

Los n_i representan números enteros positivos y los tiempos ε_i pueden elegirse arbitrariamente pequeños, todos ellos menores que un cierto tiempo η prefijado. Naturalmente, cuanto menor sea η, mayor será el menor período aproximado τ posible; en cualquier caso existe un número infinito de períodos aproximados [DE BROGLIE, 1924, p. 66].

Aplicando la condición de Einstein (8) durante uno de estos τ resulta:

$$\int_0^{\tau} \sum_{i=1}^{3} p_i dq_i = nh \tag{13}$$

Sustituyendo (12) en (13), y considerando un período aproximado τ tal que las contribuciones de los diferentes ε_i a la suma que resulta sea despreciable, frente al resto de las contribuciones, De Broglie llega a la expresión

$$n_1 \int_0^{T_1} p_1 \dot{q}_1 dt + n_2 \int_0^{T_2} p_2 \dot{q}_2 dt + n_3 \int_0^{T_3} p_3 \dot{q}_3 dt = nh \tag{14}$$

Como para cada τ, determinado de acuerdo a la aproximación impuesta a través de la elección de η, existe una terna (n_1, n_2, n_3) y, a su vez, son posibles infinitos valores de τ, de acuerdo a esa misma elección de η (deducible a partir del radio de la esfera en el ejemplo del electrón), la relación (14) se ha de satisfacer para infinitas ternas (n_1, n_2, n_3). Para lo cual, concluye De Broglie, es necesario y suficiente que cada una de las integrales de la última expresión sea igual a un múltiplo entero de h, lo que conduce a las condiciones de Sommerfeld (1).

De Broglie incluye una aclaración relativa a los tiempos que intervienen en el problema. Para llegar a la estabilidad del movimiento multiperiódico en cuestión se requerirá un tiempo del orden del más corto de los intervalos de tiempo τ. Pero ¿cuál es el orden de magnitud de estos tiempos? Si fuera del orden de millones de años, por ejemplo, la estabilidad no llegaría a manifestarse en nuestra escala de tiempos, lo que plantearía una objeción casi insalvable.

Para De Broglie tal dificultad no existe, por lo que a la estabilidad atómica se refiere. Ciertamente los intervalos de tiempo τ son muy grandes comparados con los períodos simples T_i; no obstante, aún resultan muy pequeños comparados con nuestra capacidad de apreciación en las medidas habituales de intervalos temporales. En el átomo los periodos T_i son del orden de 10^{-15} a 10^{-20} segundos; en el átomo de hidrógeno tratado relativísticamente, el período aproximado mínimo τ es del orden de 10^5 veces el período de la variable radial, que es del orden de 10^{-15} segundos. Así resulta un período aproximado mínimo del orden de 10^{-10} segundos; un *tiempo prácticamente inaccesible a nuestra experiencia*, por lo que las trayectorias que no se ajusten a la selección impuesta por la regla de cuantización de Einstein es como si no existieran, a efectos prácticos [DE BROGLIE, 1924, p. 68]. De Broglie acaba este capítulo señalando que la demostración anterior se ha basado en la tesis de Léon Brillouin, donde éste escribió [DE BROGLIE, 1924, pp. 68-69]:

"Pour que l'intégrale de Maupertius prise sur toutes les périodes approchées τ soit un multiple entier de h, il faut que chacune des intégrales relatives à chaque variable et prise sur la période correspondante soit égale à un nombre entier de quanta; c'est bien de cette façon que Sommerfeld écrit ses conditions de quanta".

Darrigol ha puesto de manifiesto que esta forma de razonar de De Broglie no es correcta [DARRIGOL, 1993, pp. 364-365]. Es fácil comprobar que, tanto en el caso general como en el degenerado, especialmente en este último, las condiciones de Sommerfeld no son necesarias, aunque sí suficientes, para que se cumpla (8). Además, se puede aplicar la regla de Einstein a ciertos sistemas no separables, a los que nos hemos referido en 6.3, sin que las condiciones de Sommerfeld sean válidas para éstos. De todo ello se deduce que las reglas (1) y (8) no son completamente equivalentes.

Aún suponiendo que la demostración de De Broglie hubiera sido rigurosa y que la regla de Einstein fuera equivalente a las de Sommerfeld, ¿cuál era la razón para que De Broglie primara tan absolutamente el enunciado de Einstein? ¿Era simplemente el carácter invariante de éste lo que le interesaba? Veamos que existían otros aspectos ventajosos de la formulación einsteiniana; entre ellos el que se prestaba a una interpretación física plenamente concordante con las ideas de De Broglie, lo que no sucedía con los restantes enunciados.

De Broglie, como es ampliamente conocido, asocia a cada punto material una *onda de fase,* cuyos rayos representan los caminos posibles para el móvil. La frecuencia ν de esta onda y su velocidad de propagación V_f se relacionan con la energía E y con la velocidad V_p de la partícula por las expresiones

$$E = h\nu \quad ; \quad V_f = \frac{c}{\beta} \quad ; \quad \text{siendo}\, \beta = \frac{V_p}{c} \tag{15}$$

y donde c representa la velocidad de la luz en el vacío. La onda de fase, como su nombre indica, sólo representa la distribución de la fase del fenómeno periódico asociado a cada punto material; esta onda no transporta energía.

Si se considera un grupo de ondas de frecuencias próximas comprendidas en el intervalo $(\nu,\ \nu + \delta\nu)$ y con velocidades de propagación, dependiente cada una de la respectiva frecuencia, en el intervalo $(V_f,\ V_f + \delta V_f = V_f + \frac{\partial V_f}{\partial \nu}\,\delta\nu)$, es fácil demostrar que la velocidad del grupo de ondas V_g verifica la relación

$$V_g = \beta c \tag{16}$$

por lo que procede identificar la velocidad V_g del grupo con la velocidad V_p del móvil, deduciéndose, además, de (15) y de (16), que se verifica

$$V_g V_f = V_p V_f = c^2 \tag{17}$$

Es decir, que la velocidad de propagación de la fase y la del grupo (que es la del móvil) resultan inversamente proporcionales. En lenguaje de De Broglie, V_f indica cómo se propaga la fase y V_g cómo se desplaza la energía.

Razonamientos adicionales permiten a De Broglie justificar que la propagación de una onda de fase es análoga a la de una onda líquida en un canal que se cierra sobre sí mismo y de profundidad variable. Para que resulte un régimen estable en el canal la longitud de este l y la longitud de onda λ deben cumplir $l = n\lambda$ (siendo n un número natural), si la longitud de onda es constante, o bien la relación

$$\oint \frac{v}{V_f}\, dl = n \tag{18}$$

para el caso general.

Admitiendo *une extensión de la relation du quantum un peu hypothetique,* De Broglie justifica la analogía entre la integral de acción maupertiusiana dividida por h, y la integral que interviene en el principio de Fermat, expresado en (18)[14]. Obtiene como conclusión que la condición de estabilidad que impone la teoría cuántica a los estados de un sistema, según la regla de Einstein, es análoga (idéntica, escribe De Broglie) a la condición de resonancia que implica (18) para la onda de fase. O con lenguaje más intuitivo: las órbitas permitidas en virtud de la regla de cuantización (8) tienen su analogía en los caminos que siguen los rayos emitidos por una fuente luminosa.

Hay otras formas de poner de manifiesto esta interpretación de la regla de Einstein. En la analogía entre óptica geométrica y dinámica clásica, la fase de la vibración óptica ϕ, y por tanto la de la onda de fase de De Broglie, tiene como magnitud correspondiente a la representada por $2\pi W/h$, siendo W la acción. Teniendo presente dicha analogía, junto con la expresión (9), se obtiene que la condición equivalente en óptica geométrica a la regla de Einstein (8) es

$$\Delta\phi = 2\pi n \tag{19}$$

que es la forma habitual de representar una condición de resonancia óptica. En virtud de ello, la interferencia destructiva que se asocia a las vibraciones que no se ajustan a (19) se correspondería con las órbitas prohibidas en TOQT.

8. Epílogo

Creemos haber puesto así de manifiesto la razón esencial para que De Broglie se inclinara con rotundidad por esta personal y poco difundida regla de cuantización de Einstein. El mayor atractivo no radicaba en su invariancia ante cambios de coordenadas, sino en que la regla de Einstein, teniendo en cuenta la comentada analogía óptica-mecánica, tenía una imagen con fuerte sentido físico: representaba una condición de resonancia para las onda de fase asociadas a los puntos materiales, lo que a su vez constituía una forma usual de representar el carácter estacionario de un movimiento ondulatorio. Esta interpretación parecía dotar a las innovadoras ideas de De Broglie de un mayor grado de plausibilidad [DE BROGLIE, 1924, p. 65]:

> "Ce beau résultat dont la démonstration est si immédiate quand a admis les idées du précédent chapitre est la meilleure justification que nous puissions donner de notre manière d'attaquer le problème des quanta".

Por otra parte, y dado que para De Broglie la regla de Einstein era equivalente a las de Sommerfeld, y que éstas habían sido aplicadas con éxito a la resolución de diversos problemas sobre aspectos varios del espectro del hidrógeno, la solidez de (8) aparecía suficientemente garantizada, tanto por sus elegantes propiedades matemáticas como por sus aplicaciones físicas.

También conviene dejar constancia de que De Broglie no considera la regla de Einstein como un instrumento puramente formal, que tan sólo le interesa para la justificación antes indicada. De hecho también utiliza en su tesis la condición (8) para tratar el movimiento general de dos cargas eléctricas, teniendo en cuenta las prescripciones cuánticas y las de la relatividad [DE BROGLIE, 1924, pp. 69-75].

La alta apreciación que De Broglie sintió por la regla de cuantización de Einstein tampoco fue algo coyuntural, simplemente porque le proporcionaba un prestigioso soporte adicional para sus innovadoras ideas, sino que se mantuvo más allá de su utilización en la tesis doctoral. Por ejemplo, en 1926, en un artículo destinado a exponer la nueva formulación de la mecánica ondulatoria recién presentada por Schrödinger, en un apartado sobre *The old quantum conditions of stability,* recoge la regla de Einstein como un enunciado de las reglas de cuantización que *...constitute the natural form in* *which quantum stability must be stated in the language of the old mechanics* [DE BROGLIE, 1926, pp. 65-66].

Bien pudo haber incluido De Broglie en su tesis doctoral alguna observación acerca del presumible carácter aproximado de las condiciones de cuantización de TOQT, pues disponía ya entonces de todos los elementos necesarios para hacerlo, especialmente tras haber interpretado en términos ondulatorios la condición de Einstein. En efecto, el principio de Fermat es un resultado válido dentro de unos ciertos márgenes de aproximación (los de la óptica geométrica); en virtud de las comentadas analogías mecánico-ópticas, las reglas de cuantización de TOQT, y la de Einstein en particular, deberían representar una aproximación por concretar, dentro de un esquema mecánico-ondulatorio más general. Pero de hecho, fuera por precaución o por no haber reparado en ello, De Broglie no se refiere a esta posibilidad en su tesis de 1924[15].

Tal vez fue Lanczos el que, por primera vez, reivindicó desde una perspectiva histórica el papel de la regla de Einstein, considerándola un puente esencial entre TOQT y las ondas de materia de De Broglie, precedente inmediato de la mecánica ondulatoria por Schrödinger [LANCZOS, 1974, pp. 113-115]. Precisamente quisieramos finalizar este trabajo con un ligero comentario en torno a la posible influencia de la regla de cuantización de Einstein en la formulación de Schrödinger.

La regla de Einstein aparece expresamente citada en el primer apartado de la segunda memoria de Schrödinger [1926], que es donde analiza la analogía entre la óptica geométrica y la mecánica clásica. En concreto aparece la expresión

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k} \tag{20}$$

para justificar que los rayos, líneas ortogonales a las superficies de onda W=*cte*., se pueden identificar con las trayectorias del punto material, tal como también había anticipado De Broglie. La referencia a Einstein es a propósito de esta última relación (20) para los momentos p_k, derivables de la acción W entendida como un potencial. La cita figura en una nota de pie de página y reza textualmente [SCHRÖDINGER, 1926, p. 17]:

"The framing of the quantum conditions here is the most akin, out of all the older attempts, to the present one. De Broglie has returned to it".

Así, no se puede afirmar que la regla de Einstein tuviera una influencia directa y relevante en la formulación de Schrödinger de la mecánica ondulatoria. Sí hubo influencia notoria de Einstein, a través de sus trabajos mecánico-estadísticos de 1924-1925 sobre la teoría cuántica del gas ideal, como reconoció posteriormente el mismo Schrödinger y nosotros hemos tratado en alguna ocasión [NAVARRO, 1992, pp. 195-205]. Pero este tema no guarda relación directa con el que aquí nos ocupa.

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Silvio Bergia sus comentarios críticos sobre el contenido de este trabajo que, en su mayor parte, fue diseñado y realizado durante una estancia en la Universidad de Bologna, a lo largo del mes de abril de 1997, gracias a una ayuda económica concedida a tal fin por la Direcció General de Recerca de la Generalitat de Catalunya.

NOTAS

1 A lo largo del trabajo utilizaremos la expresión *física clásica* para designar al conjunto de las teorías físicas ampliamente aceptadas a comienzos del siglo XX, lo que no siempre se ajusta al sentido actual de aquella expresión. Para una exposición crítica del uso que en la historia se ha venido haciendo del término *clásico* puede verse el prólogo de Allan Needle en PLANCK [1988].

2 Por ejemplo, no aparece referencia alguna a esta regla de cuantización de Einstein en el célebre tratado de JAMMER [1966].

3 La demostración corrió a cargo de EPSTEIN [1918].

4 Para más detalles sobre las respectivas aportaciones de Wilson y de Ishiwara puede verse, por ejemplo, JAMMER [1966, pp. 91-92].

5 También se les llama, según otras nomenclaturas, sistemas quasi-periódicos, semiperiódicos, o condicionalmente periódicos.

6 Para un resumen de la teoría de Hamilton-Jacobi, variables acción-ángulo incluidas, puede verse GOLDSTEIN [1965, cap. 9].

7 Loc. Cit.

8 Véase BURGERS [1917, pp. 149-157, para el caso de ausencia de degeneración; pp. 158-162, para el caso en que existe degeneración; y pp. 163-169, para cuando no existe separabilidad].

9 No confundir esta acción W con la variable de acción J_i, ni con la integral de acción, que es la que figura en el primer miembro de (8).

10 El movimiento, obviamente, ha de ser acotado, aunque Einstein no lo indique expresamente.

11 No hay que olvidar que fue el propio Einstein quien, en 1914, propuso el nombre de *hipótesis adiabática* de Ehrenfest para lo que aquí, siguiendo la terminología habitual, hemos venido denominando *principio adiabático*. Véase EINSTEIN [1914, 826].

12 No confundir lo anterior con el caracter bivaluado de p_r si se expresa como función de *r*.

13 Carta de Einstein a Besso, 29 de abril, 1917. Véase SPEZIALI [1979, p. 64].

14 Véase DE BROGLIE [1924, p. 55]. En el fondo se introduce *h* un tanto *ad hoc*: así se homogeneizan dimensiones y, sobre todo, se hace factible la relación $E=h\nu$.

15 Fue en 1926 cuando se obtuvieron las reglas de cuantización de TOQT a partir del formalismo de la nueva mecánica cuántica, mediante una aproximación de primer orden en el parámetro *h*. Véase, por ejemplo, BRILLOUIN [1926].

BIBLIOGRAFIA

BOHR, N. (1918) "On the quantum theory of line spectra, part I: On the general theory". *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-Fysiske Meddelser, 4(1),* 1-36.

BRILLOUIN, L. (1926) "Observations on the wave mechanics". *Le Journal de Physique et le Radium, 7,* 353. En: L. de Broglie & L. Brillouin (1928), *Selected papers on wave mechanics.* London, Blackie, 79-100 [En las notas nos hemos referido a esta reproducción].

BURGERS, J.M. (1917) "Adiabatic invariants of mechanical systems". *Proceedings of the Amsterdam Academy, 20,* 149-157; 158-162; 163-169.

DARRIGOL, O. (1992) *From c-numbers to q-numbers: the classical analogy in the history of quantum theory.* Berkeley, University of California Press.

DARRIGOL, O. (1993) "Strangeness and soundness in Louis de Broglie's early works". *Physis, XXX(2-3),* 303-372.

DE BROGLIE, L. (1924) *Recherches sur la théorie des quanta. Tesis doctoral. Reproducida en Annales de la Fondation Louis de Broglie, 17,* 21-128 (1992) [En las notas nos hemos referido a esta reproducción].

DE BROGLIE, L. (1926) "The principles of the new wave mechanics". *Le Journal de Physique et le Radium, 7,* 321. En: L. de Broglie & L. Brillouin (1928) *Selected papers on wave mechanics.* London, Blackie, 55-78 [En las notas nos hemos referido a esta reproducción].

EHRENFEST, P. (1913) "A mechanical theorem of Boltzmann and its relation to the theory of energy quanta". *Proceedings of the Amsterdam Academy, 16,* 591-597.

EHRENFEST, P. (1916) "On adiabatic changes of a system in connection with the quantum theory". *Proceedings of the Amsterdam Academy, 19,* 576-597.

EINSTEIN, A. (1914) "Beitrage zur Quantentheorie". *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 16,* 820-828.

EINSTEIN, A. (1917) "Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein". *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 19,* 82-92.

EPSTEIN, P.S. (1916) "Zur Theorie des Starkeffekts". *Annalen der Physik, 50,* 489-520. "Zur Quantentheorie". *Annalen der Physik, 51,* 168-188.

EPSTEIN, P.S. (1918) "Über die Struktur des Phasenraumes bedingt periodischer Systeme". *Berliner Berichte,* 435-446.

GOLDSTEIN, H. (1965) *Classical mechanics.* Cambridge, Mass., Addison-Wesley.

HERMANN, A. (1971) *The genesis of quantum theory (1899-1913).* Cambridge, Mass., MIT Press. Edición original, 1969.

JAMMER, M. (1966) *The conceptual development of quantum mechanics.* New York, Mc-Graw Hill.

KLEIN, M.J. (1970) *Paul Ehrenfest. The making of a theoretical physicist.* Amsterdam, North-Holland.

LANCZOS, C. (1974) *The Einstein decade (1905-1915).* London, Elek.

NAVARRO, L. (1992) *Einstein profeta y hereje.* Barcelona, Tusquets.

NAVARRO, L. (1995) "Sobre el principio adiabático de Ehrenfest". En: *Actes de les III Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica als Països Catalans.* Barcelona, SCHCT, 339-345.

PLANCK, M. (1915) "Die Quantenhypothese für Molekeln mit mehreren Freiheitsgraden". *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 17,* 407-418, 438-451.

PLANCK, M. (1988) *The theory of heat radiation.* Los Angeles, Tomash. Edición original, 1914.

SCHILPP, P.A. (ed.) (1969) *Albert Einstein: philosopher-scientist.* La Salle, Open Court. Edición original, 1949.

SCHRÖDINGER, E. (1926) "Quantisierung als Eigenwertproblem". *Annalen der Physik.* "Erste Mitteilung", *79,* 361-376. "Zweite Mitteilung", *79,* 489-527. "Dritte Mitteilung", *80,* 437-490. "Vierte Mitteilung", *81,* 109-139. En: E. Schrödinger (1982) *Collected papers on wave mechanics.* New York, Chelsea Pub [En las notas nos hemos referido a esta reproducción].

SCHWARZSCHILD, K. (1916) "Zur Quantenhypothese". *Berliner Berichte,* 548-568.

SOMMERFELD, A. (1916) "Zur Theorie der Balmerschen Serie". *Münchener Berichte,* 425-458. "Die Feinstruktur der wasserstoff- und wasserstoffahnlichen Linien". *Münchener Berichte,* 459-500. "Zur Quantentheorie der Spektrallinien". *Annalen der Physik, 51;* 1-94, 125-167.

SOMMERFELD, A. (1922) *La constitution de l'atome et les raies spectrales.* Paris, Blanchard. Traducción de la tercera edición de *Atombau und Spektrallinien.* Edición original, 1919.

SPEZIALI, P. (ed.) (1979) *Albert Einstein. Correspondance avec Michele Besso 1903-1955.* Paris, Hermann.

TER HAAR, D. (1967) *The old quantum theory.* Oxford, Pergamon.