

# Retiros extraordinarios: estimación de los requerimientos de liquidez de las entidades bancarias

KLÉBER MEJÍA  
PAULINA GARZÓN\*

---

## Resumen

La presente investigación es una propuesta metodológica para estimar los requerimientos adicionales de liquidez (RAL) de una entidad bancaria cuando los retiros de depósitos superan sus niveles mínimos de stock monetario, definidos por las tenencias en cuentas en el país, en el exterior y títulos valores.

Mediante técnicas de simulación no paramétricas multivariadas se generaron escenarios de estrés bancario, es decir aquellos eventos en los cuales el monto de los retiros de depósitos sobrepasa las tenencias líquidas de las entidades, los mismos que se cuantificaron para construir la distribución de probabilidad de ocurrencia de estos casos y así calcular los faltantes de liquidez. El modelo construido consideró el comportamiento histórico semanal de los depósitos totales así como de los activos líquidos de cada banco del sistema entre el 27 de mayo de 1997 y el 15 de septiembre de 2004.

## Abstract

This research constitutes a methodological proposal to estimate the additional liquidity requirements (ALR) of a financial institution when its deposit withdrawals exceed the minimum levels of its monetary stock, defined by the holdings of national and foreign accounts, and stocks.

By means of multivariate non-parametric simulation procedures we generated various scenarios of financial stress, i.e. events where the amount of deposit withdrawals exceeded the liquid asset holdings of the institutions. These cases were quantified in order to build the probability distribution for the occurrence of financial stress events, allowing us to calculate the liquidity gaps. The model built considered the historical weekly behavior of the total deposits as well as of the liquid assets of each bank in the system between May 27, 1997 and September 15, 2004.

---

---

\* El análisis, los criterios y conclusiones de este trabajo representan exclusivamente la opinión de los autores y son de su exclusiva responsabilidad. Los autores agradecen la dirección del Econ. Wilson Pérez en la conducción del modelo matemático y a los Eco. Miguel Acosta, Pedro Brito, Narciza Granja y Paúl Carrillo por sus valiosos aportes a la estructura general del documento.

## 1. Introducción

La dinámica de los flujos monetarios tiene enorme incidencia en el desempeño real de la economía, la crisis asiática (1997) fue el resultado de una peligrosa combinación de la liberalización de la cuenta de capitales y la existencia de políticas de supervisión y regulación laxas para el sistema financiero, situación que devino en el crecimiento del crédito y el financiamiento de actividades que otrora por su alto riesgo no hubieren sido sujetas al crédito. La crisis argentina (2001) por su parte, mostró cómo la debilidad fiscal podía impactar el balance de las entidades bancarias a través de cortes en el flujo monetario que culminaron en el congelamiento de depósitos por segunda vez en la historia financiera de ese país. México (1994) por su parte, luego de más de una década de registrar tasas de crecimiento sostenidas como resultado de una serie de políticas que utilizaron al tipo de cambio como ancla nominal, registró finalmente déficit sucesivos de la balanza comercial derivados del sostenimiento de una divisa subvaluada, llevando a muchas empresas a la quiebra y evidentemente al impago de sus deudas.

Como se advierte, las crisis financieras devienen de una trágica combinación de factores macro y microeconómicos pero se convierten en tales cuando se producen cortes en los flujos monetarios. De allí que la condición de liquidez de las entidades bancarias es un elemento de crucial importancia para las autoridades monetarias pues su nivel tiene relación directa con el crédito interno y las tasas de interés, medios a través de los cuales se afecta la actividad real de la economía. El presente trabajo es un esfuerzo inicial para medir en cuánto podrían aumentar los requerimientos de liquidez de las entidades bancarias ecuatorianas si se enfrentan a eventos críticos, contribuyendo así con una herramienta para ampliar el análisis de la liquidez sistémica y el diseño de políticas para su tratamiento en un entorno dolarizado.

En períodos de crisis, los países que mantuvieron su soberanía monetaria y sus bancos centrales con su función de prestamistas de última instancia, tal como sucedió en el caso de México y los países asiáticos, utilizaron la emisión monetaria para aliviar la presión de demanda de dinero de aquellas instituciones financieras privadas que enfrentaban retiros masivos, básicamente con el propósito de evitar que las entidades caigan en un período de cesación de pagos y ello conlleve a un pánico bancario sistémico. La asistencia de liquidez al sistema bancario por parte del sector público es un tema controversial pues si bien podría enviar un mensaje de seguridad para los depositantes, podría también exacerbar el riesgo moral. Mas aún, si las autoridades se enfocan únicamente en prever mecanismos asistenciales de salvataje y no diseñan un conjunto de políticas tanto para la prevención de crisis como para la resolución y administración de las mismas, las líneas de crédito para solventar síntomas de iliquidez podrían más bien alentar la quiebra de una entidad financiera

pues podría esta condición convertir a ésta en un buen negocio. (Akerlof, Romer, 1993).

No es el propósito de este estudio dejar una posición técnica respecto a la existencia de mecanismos de liquidez cuyo origen de fondos sea estatal o de apalancamiento privado mutuo, por ahora únicamente se ha construido un modelo para medir la magnitud de recursos líquidos que puede demandar una crisis en el sistema bancario ecuatoriano sobre la base del comportamiento histórico de los balances bancarios, en estudios posteriores se agregarán al análisis los problemas de contagio y condiciones exógenos que pueden influir en estos requerimientos.

El trabajo está conformado por cuatro secciones: i) Introducción en donde se determina el alcance del documento, ii) Estimación de los requerimientos adicionales de liquidez en donde se explican los fundamentos teórico-matemáticos para el planteamiento del modelo; iii) Esquema de simulación donde se explica el procedimiento de generación de las variables aleatorias teóricas; iv) Resultados obtenidos y, v) Conclusiones.

## **II Estimación de los requerimientos adicionales de liquidez (RAL)**

### **II.1 Base metodológica**

Las corridas de depósitos se caracterizan por ser eventos poco recurrentes en la historia financiera de los países, no obstante, el alto costo fiscal y social que implican<sup>1</sup>, hacen que éstas sean temas de enorme preocupación para las autoridades monetarias.

Desde el punto de vista teórico, los eventos poco recurrentes son tratados con Modelos de Valores Extremos. Esta teoría se basa en los resultados del teorema de Fisher – Tippett el cual especifica la forma de la distribución límite para máximos centrados y normalizados y; en la noción de función de exceso media (Emberchts – 1997) que permiten construir una función de distribución de colas (Distribución Generalizada de Valores Extremos (DGVE) Emberchts - 1997, Resnick S.I.-1987) con las observaciones que sobrepasan un umbral, sin importar que distribución tengan las observaciones originales. En el caso de los requerimientos de liquidez para solventar retiros de depósitos, una vez que se obtuviera la distribución, sería necesario aplicar las técnicas de transformación cuantil, con una cierta probabilidad de aceptación, para así estimar la cantidad de liquidez que se necesita para solventar tales requerimientos.

---

<sup>1</sup> Según el Fondo de Garantías de Instituciones Financieras (FOGAFIN, 2005), el costo de la asistencia fiscal promedio de las crisis financieras registradas en 21 países después de 1990, ha sido en promedio superiores al 13% del PIB.

Con la referida base teórica, se tomaron las tasas de variación semanales de los depósitos para construir funciones de distribución generalizadas de valores extremos para cada entidad bancaria. Lamentablemente los resultados obtenidos fueron poco satisfactorios ya que, al aplicar técnicas de *bloques* (extremos por períodos) o el *acercamiento del índice extremo*<sup>2</sup>, el número de observaciones de las series de depósitos de casi todos los bancos se redujo significativamente, lo cual no permitió la convergencia en la estimación de los parámetros, razón por la cual los resultados obtenidos de la teoría de valores extremos no pudo considerarse para este análisis.

El problema de la falta de datos para estos casos, se superó gracias al desarrollo de técnicas de simulación que, con la ayuda de las computadoras admitieron la generación de una gran cantidad de observaciones en donde fue fundamental, además de conocer el comportamiento estadístico de los datos observados, definir las condiciones y/o escenarios de los resultados esperados.

## II.2 Modelo de simulación

### II.2.1 Generación de variables simuladas

Dado que el propósito del estudio es cuantificar el faltante de liquidez para cada una de las entidades bancarias, el modelo se basó en la construcción de escenarios que simulan el comportamiento de un índice de liquidez, mismo que considera la relación entre el activo líquido, pasivo exigible y la volatilidad de los depósitos calculada con la técnica del valor en riesgo. Para ello, se generaron tres variables que simularon el comportamiento de éstas.

### II.2.2 Función de distribución vs. Función de densidad

La calidad de las variables simuladas depende del ajuste de la función de distribución  $F(\text{act}, \text{pas}, \text{vol})$ , sin embargo, las técnicas de simulación usando funciones de distribución multivariadas resultan complejas y no se desarrollaron en este estudio. En su reemplazo se trabajó con funciones de densidad  $f(\text{act}, \text{pas}, \text{vol})$ <sup>3</sup> para cada entidad bancaria.

---

<sup>2</sup> Estas técnicas se aplican para lograr la independencia de las observaciones usadas, en el primer caso a través de la agrupación por bloques de las observaciones y en el segundo caso a través de la construcción de índices.

<sup>3</sup> En el anexo A6, se muestra cómo usar las funciones de densidad en técnicas de simulación para funciones de univariadas y se explica cómo generalizar para  $n$  variables.

Las funciones de densidad fueron ajustadas a través de modelos paramétricos y no paramétricos a fin de garantizar la calidad de ajuste de los datos y con ello obtener resultados de simulación confiables. Debido a que los datos observados de los activos líquidos y de los pasivos exigibles no se ajustaban a una función de curvas suaves puesto que la distribución de frecuencias de las observaciones mostraban la forma de una letra “m”, se pudo advertir que las funciones de densidad paramétricas no arrojarían buenos resultados<sup>4</sup>.

### II.2.3 Funciones de densidad no paramétricas

Debido a las inconsistencias de ajuste obtenidas en las funciones de densidad y de los resultados de las simulaciones con modelos paramétricos se planteó la alternativa de construir una función de densidad no paramétrica. Evidentemente, este tipo de funciones no tiene parámetros, por tanto no están sujetas a pruebas de bondad de ajuste, pero el grado de confiabilidad de la modelización se obtuvo a través de la realización de diagnósticos de validación de ajuste, los cuales, debido a las técnicas que se utilizó y a la elección del ancho de los Kernel, resultaron ser satisfactorios para este caso. La función de densidad consideró la relación entre las variables utilizadas, pero supuso que las observaciones de los activos líquidos y pasivos exigibles no estaban autocorrelacionadas.<sup>5</sup>

Para el ajuste no paramétrico, se construyeron “histogramas”<sup>6</sup> sin rangos de clases sino creando alternativamente una vecindad en cada dato utilizando las funciones de Kernel<sup>7</sup> (cuadrado, gaussiano y Epanechnikov). El “histograma” quedó definido mediante la función de densidad, para la cual se eligió un ancho óptimo del Kernel con un adecuado *trade – off* entre el sesgo y la varianza.

Para ilustrar se usa el Kernel gaussiano, donde cada observación muestral tiene una vecindad asociada como sigue:

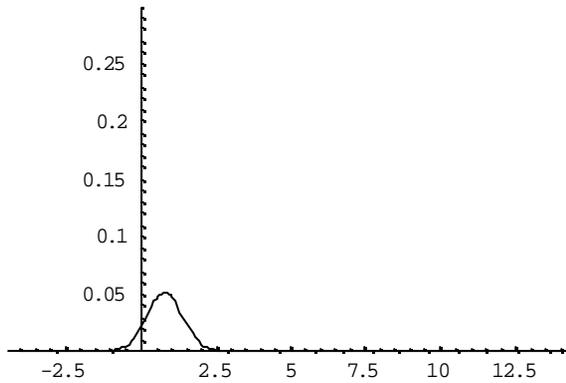
---

<sup>4</sup> Sin embargo se probó los datos con las funciones de densidad paramétricas normal y gamma multivariada, rechazándose las hipótesis mediante las pruebas de bondad de ajuste. Más información en los anexos A3 y A4.

<sup>5</sup> Dado que no se construyen funciones de densidad condicionadas a las observaciones pasadas.

<sup>6</sup> En este caso se deben entender al “histograma” como la suma de las funciones de Kernel que representan una vecindad de cada dato.

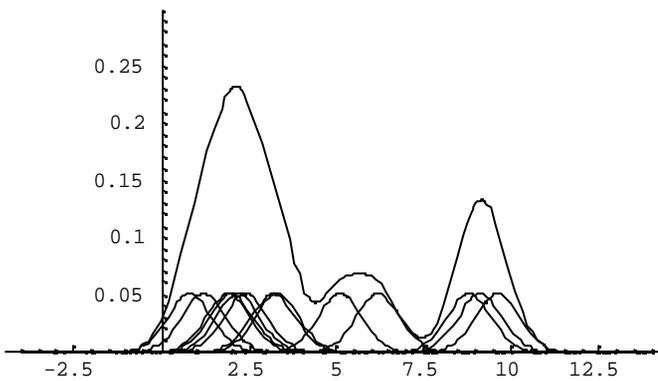
<sup>7</sup> Para ampliar el análisis sobre la definición de los Kernel, ver Anexo No. A8.

**Gráfico No. 2.1**

**ELABORACIÓN:** Los autores.

Bajo el mismo criterio, a cada dato se le construyó una vecindad asociada a una función de Kernel común para toda la muestra y, mediante una relación funcional se construyó la función de *densidad no paramétrica*.

A fin de dejar clara la idea intuitiva de la función de Kernel a aplicar para la construcción de los “histogramas”, a continuación se presentan los resultados de un proceso aplicado a trece observaciones univariantes. En el gráfico se observan los resultados de las vecindades obtenidas y la función de densidad general derivada (curva sobrepuesta a las vecindades).

**Gráfico No. 2.2**

**FUENTE:** Datos generados aleatoriamente.

**ELABORACIÓN:** Los autores.

El mismo procedimiento se puede aplicar a  $m$  variables<sup>8</sup>. En el caso bidimensional las vecindades asociadas no serán superficies sino volúmenes y para los casos donde  $m$  es mayor que dos, evidentemente no es posible una representación gráfica.

La función  $f_X$  con una vecindad alrededor de cada dato se resume así:

$$f_X(X_1, X_2, \dots, X_m) = \frac{1}{\prod_{j=1}^m n_j h_j} \sum_i^{n_1} \dots \sum_{i=1}^{n_m} k\left(\frac{X_1 - x_{i1}}{h_1}, \dots, \frac{X_j - x_{ij}}{h_j}, \dots, \frac{X_m - x_{im}}{h_m}\right) \quad (3.1)$$

donde:

$m$  es el número de variables,

$h_j$  es el ancho del Kernel para la variable  $j$

$k(\cdot)$  es la densidad de Kernel y

$n_j$  es el número de observaciones para la variable  $j$  que puede ser iguales para todo  $j = 1, \dots, m$ .

La función específica para el estudio que nos compete, usando el kernel gaussiano<sup>9</sup>, se definió de la siguiente manera:

$$f_X(act, pas, vol) = \frac{1}{\prod_{j=1}^3 n_j h_j * \sqrt{2p}} * \sum_{k=1}^{n_3} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \exp\left(-\left(\left(\frac{act - act_i}{\sqrt{2}h_1}\right)^2 + \left(\frac{pas - pas_j}{\sqrt{2}h_2}\right)^2 + \left(\frac{vol - vol_k}{\sqrt{2}h_3}\right)^2\right)\right) \quad (3.2)$$

<sup>8</sup> En el Anexo No. A7 se describe los mecanismos y la validación del ajuste para funciones de densidad con  $m$  variables.

<sup>9</sup> Para ver las razones por las cuales se utiliza el Kernel gaussiano, ver el Anexo No. A8.

donde:

$act_i$ ,  $pas_i$  y  $vol_i$  son las variables observadas en el tiempo  $i$  para un banco dado.

$\hat{f}_x$  es una función estimada por máxima verosimilitud (MV), en donde se optimizó la forma de la vecindad y la anchura del kernel, de manera que, las funciones óptimas que describen las vecindades sean céntricas a cada punto de referencia, cumpliéndose de esta forma con los requerimientos teóricos del sesgo y la varianza que se explican enseguida.

### II.2.3.1 El trade-off entre el sesgo y la varianza

Un buen Kernel es el resultado de elegir el valor de " $h$ " que optimice la disyuntiva entre el sesgo y la varianza, por lo cual es necesario conocer las implicaciones que tiene el valor del " $h$ "<sup>10</sup>.

De manera que, si se usa un  $h$  grande para la estimación de la densidad de Kernel, se tienen colas anchas y cumbres planas, sin importar si la densidad original es plana o no. De allí que, una densidad que tiene cumbres altas no puede ser bien ajustada con un  $h$  grande. Entonces, se dice que un estimador con un  $h$  grande es sesgado hacia las densidades que varían suavemente.<sup>11</sup> En este sentido, se recomendaría trabajar con valores de  $h$  pequeños.

Por otro lado, la máxima varianza es lograda para  $h = 0$  (para una estimación de MV sin restricciones), en efecto, en este caso la densidad sería infinita. Sin embargo, dado que  $h$  debe ser mayor a cero, la densidad se hace menos sensible a pequeñas perturbaciones en los datos, por lo tanto la varianza de la estimación decrecerá con  $h$ . En este sentido, se recomendaría trabajar con valores de  $h$  grandes.

Como se puede observar, el tamaño del  $h$  implica una adecuada elección entre el sesgo y la varianza: la minimización del sesgo (lo cual significa reducir  $h$ ) y la minimización de la varianza (esto es aumentar  $h$ ) son objetivos contrarios, de allí la importancia de encontrar un  $h$  razonable y aceptable.

---

<sup>10</sup> Se entiende que un buen ajuste de los datos es aquel que minimiza tanto el sesgo de la función como la varianza.

<sup>11</sup> Ya que  $h$  controla el suavizamiento de la estimación de la densidad resultante, también se lo llama parámetro de suavizamiento.

*El efecto del tamaño de la muestra n.*- El *trade off* entre el sesgo y la varianza puede ser mejorable cuando el tamaño de la muestra es mayor dado que la varianza en estos casos decrece. Además, el sesgo es no decreciente cuando el tamaño de la muestra crece. En tal virtud, es aconsejable utilizar todas las observaciones disponibles.

### III. Esquema de Simulación

#### III.1 Definición de las Variables<sup>12</sup>

Tal como se mencionó anteriormente, las variables utilizadas en el modelo son componentes de un índice de liquidez que relaciona el activo líquido (*act*), el pasivo exigible (*pas*) y la volatilidad de los depósitos (*vol*). Las series de datos corresponden a valores semanales de 21 bancos<sup>13</sup> para el período comprendido entre el 27 de mayo de 1997 y el 15 de septiembre de 2004.

##### a) Activo líquido.- *Compuesto por*<sup>14</sup>:

- Fondos disponibles: caja y depósitos en el país y en el exterior.
- Fondos interbancarios netos y pactos de reventa menos pactos de recompra; *e*,
- Inversiones en papeles públicos y privados menores de 90 días.

##### b) Pasivo exigible

El pasivo considerado son las obligaciones de las instituciones financieras con terceros que implican el desembolso real de efectivo para su cancelación, de allí que en este grupo no se encuentran registrados los pasivos diferidos.

##### c) Volatilidad de los depósitos

El comportamiento de los depósitos se analizó a través de su volatilidad dinámica calculada con la metodología de *RiskMetrics* desarrollada por JP Morgan,

---

<sup>12</sup> Para ver el detalle de las cuentas contables utilizadas para esta sección, ver Anexo No. A1.

<sup>13</sup> A febrero de 2005, existen 25 bancos que conforman el sistema financiero ecuatoriano, para efectos de este trabajo no se consideró 4 de ellos por tratarse de bancos que, por ser recientemente constituidos, no cuentan con información histórica suficiente.

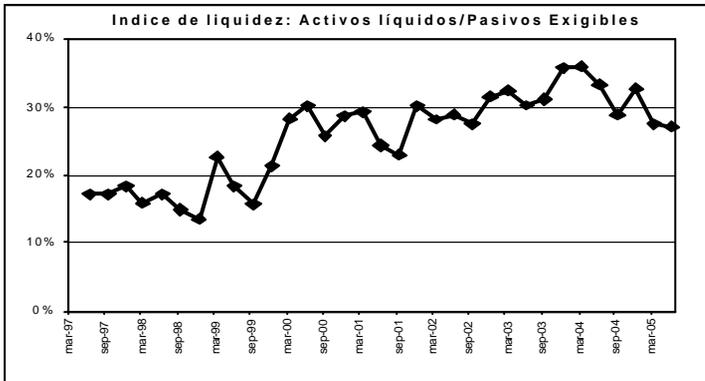
<sup>14</sup> Debido a los ajustes realizados por la Superintendencia de Bancos al catálogo de cuentas, en enero de 2000 y julio de 2002, se utilizó indicadores con diferentes cuentas contables para cada período tratando de homologar los criterios financieros.

la cual utiliza los modelos de las familias GARCH.<sup>15</sup> Puesto que las series de los depósitos a la vista fueron más erráticas que los depósitos a plazo, se calculó la volatilidad total de las parciales.<sup>16</sup>

**III.2 Relación entre las variables y comportamiento histórico**

Dado que el índice de liquidez determinado como la relación entre el activo líquido y pasivo exigible recoge el comportamiento de las dos variables, cuando el pasivo disminuye más aceleradamente que el activo líquido, como fue el caso de la crisis de 1999, el índice mejora sin necesariamente reflejar una condición de salud bancaria, todo lo contrario (ver Gráfico No.3.1). De allí la importancia de que la posición de liquidez de las entidades financieras se encuentre más bien relacionada con una medida que permita recoger el comportamiento del riesgo del mercado, tal como la volatilidad de los depósitos. De manera que, la relación de 2 veces<sup>17</sup> la volatilidad del pasivo como umbral mínimo del índice parece un criterio razonable para evitar el riesgo de iliquidez, sin embargo, no se debe perder de vista que, ello no evita la dificultad de que el índice crezca en épocas críticas.

**Gráfico No. 3.1**



<sup>15</sup> Para ampliar sobre el cálculo del VaR de los depósitos ver Anexo No. A2

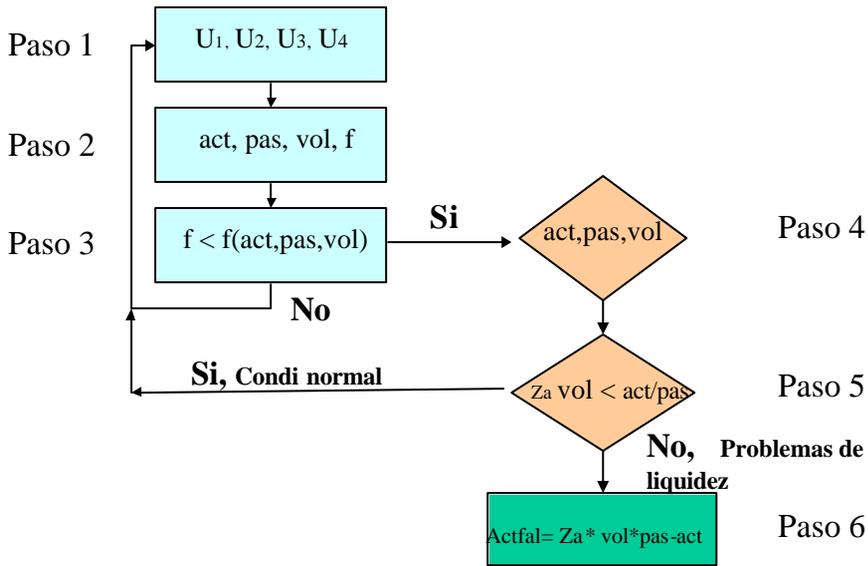
<sup>16</sup> Desde el punto de vista financiero, las volatilidades grandes son una medida de “pérdida” asociada a un evento extremo y se la mide con el VaR en condiciones normales de mercado, por lo cual la aplicación del VaR para conocer la pérdida máxima asociada a los depósitos de las entidades financieras sería adecuado.

<sup>17</sup> Dado que el percentil 2 es un valor aproximado a 1,96 que corresponde al valor crítico de la distribución normal estándar con probabilidad del 95%.

### III.3 Esquema de simulación

El proceso de simulación aplicado fue el siguiente:

Gráfico No. 3.2



**ELABORACIÓN:** Los autores.

El proceso señala en el paso 1 que se generan en forma simultánea cuatro variables aleatorias uniformemente distribuidas entre  $[0, 1]$  ( $U_1, U_2, U_3, U_4$ ) con las cuales, a través de una transformación lineal (paso 2), se obtienen variables aleatorias redimensionadas en el intervalo  $[0, 2 * \max \{X_i\}]$ <sup>18</sup> para el caso de las tres primeras variables y  $[0, \max f(X)]$  para la variable  $f$  que corresponde a aquella que describe el recorrido de la función de densidad.

Donde:

$X_i$  son las variables observadas ( $act, pas, vol$ ) y,

<sup>18</sup> La definición de este intervalo permitiría obtener todos los valores posibles de las variables, optimizando el uso de las herramientas informáticas.

$f(X)$  corresponde a la función de densidad.

Las variables generadas deben cumplir con las mismas propiedades estadísticas que las variables registradas en la historia de cada banco, esta condición puede verificarse cuando la variable aleatoria es menor que la función de densidad  $\hat{f}(act, pas, vol)$  evaluada en las variables simuladas (paso 3):  $act$ ,  $pas$  y  $vol$  y serán éstas las que se sometán a la prueba del umbral definido para el índice de liquidez.

De allí que un punto fundamental en la simulación es la determinación del umbral que define la posición de liquidez de cada entidad bancaria. Al respecto, como antes se anotó, éste considera que la razón entre los activos líquidos y los pasivos exigibles debe ser mayor a dos veces la volatilidad de los depósitos. Por lo tanto, cada vector de datos generado, puede obtener uno de los siguientes dos casos (paso 5):

- Si cumple la condición, los datos simulados se cuantifican y se rechazan y se repite el proceso desde el paso 1 para generar nuevas variables aleatorias. En este caso únicamente se registra el número de veces que ocurren estos eventos.<sup>19</sup>
- Si no se cumple la condición, el algoritmo ejecuta el paso 6 y se contabiliza los casos que no cumplen la condición.

Independientemente que se cumpla o no cumpla la condición, éste proceso se repite 2000 veces.

En el paso 6 se calcula el monto de activos que faltarían en el numerador del índice para que éste sea al menos igual a 2 veces la volatilidad de los depósitos, esto es:

$$act_{sim,j} = 2 * vol_j * pas_j - act_j \quad (3.3)$$

donde,  $act_{sim,j}$  es el monto de los activos faltantes de la  $j$ -ésima generación que no cumple la condición del paso 5.

### III.4 Cálculo del monto de activos faltantes

Con los activos faltantes estimados en el paso 6 del proceso de simulación anterior se construye una función de densidad paramétrica unidimensional condicionada.

---

<sup>19</sup> La teoría recomienda hacer el mismo proceso por al menos 10000 veces (lo cual es factible para procesos de simulación univariados), por limitaciones tecnológicas solamente se realizaron 2000 iteraciones.

$$p = f \left( act_{sim} \left| kvol \geq \frac{act}{pas} \right. \right)$$

con la cual, dada una probabilidad  $P'$  se puede calcular para un cierto banco el monto de liquidez adicional requerido  $act_{fat}$  resolviendo la siguiente ecuación

$$P' = \int_{-\infty}^{act_{fat}} f \left( act_{sim} \left| kvol \geq \frac{act}{pas} \right. \right) dact_{sim}$$

#### IV. Resultados obtenidos

En la tabla siguiente se resume los resultados obtenidos para cada entidad bancaria con probabilidades  $P' = 0.99, 0.95, 0.90$ .

Tabla No. 4.1

#### Resultados de faltantes de liquidez (datos a Septiembre de 2005)

Entidad	Septiembre de 2005				Enero de 2005			
	Porcentaje Faltante	Indice de Liquidez	Pasivos exigibles disponible	Activos Líquidos	Porcentaje Faltante	Indice de Liquidez	Pasivos exigibles disponible	Activos Líquidos
	95%				95%			
Banco 1	30.19	23.29%	176.19	41.03	19.02	34.45%	172.50	59.43
Banco 2	24.29	52.58%	13.73	7.22	9.44	67.44%	13.22	8.91
Banco 3	20.84	41.48%	9.47	3.93	1.86	60.46%	7.51	4.54
Banco 4	15.50	25.18%	1,870.44	471.04	5.35	35.33%	1,783.71	630.27
Banco 5	15.49	40.80%	618.39	252.29	14.65	41.64%	574.64	239.26
Banco 6	15.06	24.81%	129.37	32.10	22.09	17.78%	113.83	20.24
Banco 7	14.52	26.94%	181.49	48.90	19.98	21.48%	107.39	23.07
Banco 8	12.64	27.35%	192.93	52.76	4.54	35.44%	185.36	65.70
Banco 9	12.23	19.89%	1,060.83	211.02	12.33	19.79%	974.69	192.94
Banco 10	11.33	21.77%	28.33	6.17	13.22	19.87%	16.17	3.21
Banco 11	10.53	20.92%	581.14	121.60	0.04	31.41%	552.05	173.38
Banco 12	10.51	74.73%	28.99	21.67	-1.47	86.70%	40.40	35.02
Banco 13	9.25	42.89%	818.96	351.23	5.49	46.65%	833.55	388.87
Banco 14	7.72	27.71%	84.53	23.42	18.20	17.23%	72.23	12.44
Banco 15	5.87	17.03%	248.34	42.30	7.25	15.66%	226.64	35.48
Banco 16	5.58	49.98%	67.57	33.78	-0.57	56.13%	71.49	40.13
Banco 17	2.83	31.88%	92.04	29.34	-2.13	36.84%	81.74	30.11
Banco 18	1.94	47.13%	161.68	76.21	5.33	43.74%	179.83	78.65
Banco 19	1.62	34.37%	296.09	101.76	8.53	27.46%	239.42	65.74
Banco 20	-0.11	28.25%	884.00	249.71	3.53	24.61%	732.88	180.35
Banco 21	-3.79	83.06%	2.30	1.91	-0.38	79.65%	2.59	2.06
Sistema	8.65		7,546.83	2,179.38	7.18		6,981.82	2,289.82

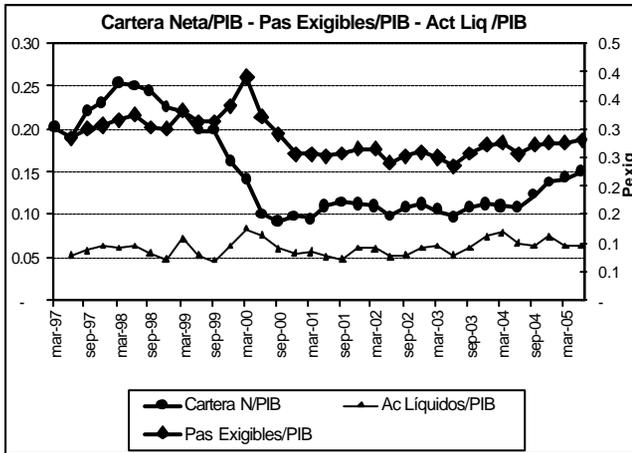
FUENTE: Resultados modelo de simulación y balances de los bancos privados.

ELABORACIÓN: Autores.

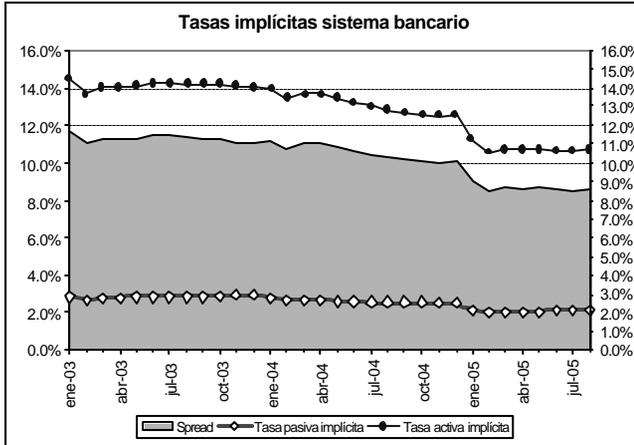
Con datos a septiembre de 2005 se encuentra que con un 95% de confianza, 19 entidades bancarias requieren recursos líquidos adicionales para atender retiros extraordinarios. Los resultados permiten observar la situación obvia de que las entidades financieras no pueden mantener recursos líquidos para cubrir épocas críticas pues existe un costo financiero implícito además del costo social derivado de la disminución de recursos disponibles para el crédito. Las entidades que muestran mayores requerimientos serían aquellas cuyo riesgo de liquidez, medido a través de la volatilidad de sus depósitos, es mayor.

No obstante, a la fecha analizada todas las entidades bancarias cubren sus requerimientos para condiciones normales aún cuando se observa que en el último año existe un cambio en la decisión de los agentes financieros en cuanto a sus tenencias líquidas (en el Cuadro No. 4.1 se puede observar que a nivel de sistema el volumen de depósitos incrementa y el volumen de activos líquidos disminuye entre enero y septiembre de 2005) a favor del incremento del crédito, lo cual puede explicarse por la necesidad de compensar el estrechamiento del margen financiero con volumen de crédito tal como puede observarse en los Gráficos No.4.1 y 4.2.

Gráficos No. 4.1 y 4.2<sup>20</sup>



<sup>20</sup> Para el cálculo de las tasas implícitas no se ha considerado el ingreso que las entidades bancarias registran por concepto de comisiones.



**FUENTE:** Balances bancos privados.

**ELABORACIÓN:** Autores.

Es evidente que una entidad financiera no puede mantener niveles de liquidez considerando la posibilidad de situaciones de crisis, pues ello tendría efectos en el costo y el volumen del crédito así como en el desempeño competitivo de las entidades, por lo cual es necesario que este tema sea objeto de discusión de las autoridades públicas que bien podrían crear incentivos para el funcionamiento eficiente de fondos comunes privados y/o alternativamente diseñar mecanismos de protección para el sistema de pagos.

A nivel de sistema financiero, los resultados del modelo muestran que, con una certeza de cobertura del 95%, sería necesario constituir un fondo de al menos el 8,6% de los pasivos exigibles de las entidades bancarias para poder enfrentar eventos de retiros de depósitos.

## V. Conclusiones

El presente trabajo de investigación constituye un aporte metodológico para el cálculo de recursos líquidos mínimos necesarios para enfrentar eventos críticos en entornos en donde no existen datos históricos suficientes para ser analizados. Dados los niveles de liquidez individual de las entidades, las reservas adicionales se calculan como una función de la volatilidad de los depósitos. Para el caso ecuatoriano se encontró que el sistema bancario en su conjunto requeriría de recursos adicionales para enfrentar eventos críticos. Así mismo, se observó una alta

dispersión en las tenencias y requerimientos entre las diferentes entidades lo que, sumado a comportamientos compensatorios en los movimientos de depósitos entre las entidades, permitiría construir un pool de fondos con niveles de requerimiento de recursos inferiores a la sumatoria de necesidades individuales.

La investigación realizada puede constituirse en una herramienta de soporte para justificar la existencia de un prestamista de última instancia bajo el esquema de pool, mostrando que el riesgo puede ganarle la partida a la supervisión y al esfuerzo individual. No obstante, como todo modelo, éste tiene sus limitaciones y es imprescindible complementar su análisis profundizando en temas como el efecto contagio entre las entidades bancarias y los shocks macroeconómicos sobre el comportamiento de los depósitos. En estudios posteriores se tratará el problema del contagio bancario incorporando en el análisis datos estadísticos y expectativas de los agentes, así como condiciones exógenas que pueden influir en los requerimientos de liquidez. Con los resultados que se obtengan se podrá obtener el valor adecuado de un pool de fondos que desde el punto de vista financiero resulte más eficiente para la administración global de la liquidez en la economía, además de considerar mecanismos alternativos para su funcionamiento (primer llegado primer servido, límites de exposición al riesgo por entidad, pool por clusters, etc.), al margen de su viabilidad política.

## Bibliografía

- Akerlof, George A; Romer, Paul M; Hall, Robert E; Mankiw, N Gregory , “Looting: the economic underworld of bankruptcy for profit”, Brookings Papers on Economic Activity; 1993.
- Allen and Gale (2000). Financial Contagion. JPE.
- Bernake and Blinder (1988). “Política monetaria y sistema bancario”.
- Chen, Yehning (1999), “Banking Panics: The Role of the First-Come, First-Served Rule and Information Externalities”. Journal of Political Economy, vol. 107, N°4.
- Codificación de Resoluciones de la Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extremes*. London: Springer.
- Diamond, D., and H. Dybvig (1983). “Banks Runs, Deposit Insurance and Liquidity”. *Journal of Political Economy*, 91.
- Durbin, J. And Koopman, S.J. (2000). “Time series analysis of Non-Gaussian observations based on state space models from both classical and Bayesian perspectives”. *Journal of The Royal Statistical Society, Series B*, 62, 3-56.
- Elías Albagli I (2002), *Un modelo de Crisis Bancarias*. Editorial.....
- Emberchts, P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Berlin:Spring Verlag
- Farmer Aghion, Bachetta and Bernerjee (1984). “Ciclos económicos y el Valor del colateral”.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993). “Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks”. *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
- Gorton, G., and G. Pennacchi. (2000). “Financial Intermediaries and Liquidity Creation”. *The Journal of Finance*, 45: 49-71.

Hamilton, J.D (1990). "Analysis of time series subject to change in regime". *Journal of Econometrics*, 45, 39-70.

Kevin Dowd, Ph.D., (1999). "The Extreme Value Approach to VaR".

Kim, C.-J and Nelson, C.R (1999). *State Space Models With Regime Switching*. Cambridge: The MIT Press..

Philippe Tassi,(1985), *Methodes Statistiques*, Collection "Économie et Statistiques Avancees » Economica, Paris.France.

## ANEXOS

### Anexo No. A1

#### ACTIVOS LIQUIDOS

Enero de 1996 a Diciembre de 2000	Enero de 2001 a Junio de 2002	Julio de 2002 hasta la actualidad
11 FONDOS DISPONIBLES	11 FONDOS DISPONIBLES	1 ACTIVO
12 FONDOS INTERBANCARIOS VENDIDOS	12 FONDOS INTERBANCARIOS VENDIDOS	110105 Efectivo
1301 BONOS	130105 GOBIERNO NACIONAL	110110 Caja chica
1302 CEDULAS	130110 MUNICIPALIDADES	110205 Banco Central del Ecuador
1303 ACEPTACIONES BANCARIAS	130205 HIPOTECARIAS PROPIA EMISION	110210 Banco Nacional de Fomento
1355 TITULOS VALORES ENTREGADOS EN FIDEICOMISO MERCANTIL	130210 HIPOTECARIAS OTRAS ENTIDADES	110505 Del país
1390 VARIAS	130305 PROPIAS	110510 Del exterior
(+)22 FONDOS INTERBANCARIOS COMPRADOS	130310 OTRAS ENTIDADES	(+)22 OPERACIONES INTERBANCARIAS
(-)2350 CAPTACIONES POR OPERACIONES DE REPORTO	(+)22 FONDOS INTERBANCARIOS COMPRADOS	(-)2101 Depósitos a la vista
	(-)2350 CAPTACIONES POR OPERACIONES DE REPORTO	

#### PASIVOS EXIBILES

Enero de 1996 a Diciembre de 2000	Enero de 2001 a Junio de 2002	Julio de 2002 hasta la actualidad
21 DEPOSITOS A LA VISTA	21 DEPOSITOS A LA VISTA	2101 Depósitos a la vista
22 FONDOS INTERBANCARIOS COMPRADOS	22 FONDOS INTERBANCARIOS COMPRADOS	2102 Operaciones de reporto
23 OBLIGACIONES INMEDIATAS	23 OBLIGACIONES INMEDIATAS	2103 Depósitos a plazo
(-) 2350 CAPTACIONES POR OPERACIONES DE REPORTO	(-)2350 CAPTACIONES POR OPERACIONES DE REPORTO	22 OPERACIONES INTERBANCARIAS
24 DEPOSITOS A PLAZO	24 DEPOSITOS A PLAZO	23 OBLIGACIONES INMEDIATAS
25 ACEPTACIONES EN CIRCULACION	25 ACEPTACIONES EN CIRCULACION	24 ACEPTACIONES EN CIRCULACION
27 CRED. FAVOR DE BANCOS Y OTRAS INSTIT. FINANCIERAS	27 CRED. FAVOR DE BANCOS Y OTRAS INSTIT. FINANCIERAS	26 OBLIGACIONES FINANCIERAS
2801 VALORES EN CIRCULACION	2801 VALORES EN CIRCULACION	27 VALORES EN CIRCULACION

## Anexo No. A2

### Estimación del VaR

Se obtiene los retornos de las series de depósitos a la vista y a plazos. Para el ajuste de la media de los retornos obtenidos se aplicó un modelo lineal utilizando los procesos SARIMA(P,D,Q)(p,d,q). Con el cuadrado de los residuos de este ajuste se estima la varianza mediante modelos heteroscedásticos condicionales autoregresivos generalizados(GARCH(r,s)), con este ajuste simultáneo se pronosticó la media de los retornos así como la varianza. Con las series así obtenidas se puede estimar el VaR de cada serie de depósitos aplicando una probabilidad  $p$ , la pérdida máxima esperada mediante la siguiente expresión<sup>21</sup>:

$$VaR(h) = \hat{r}_t(h) - 1.65\hat{\mathbf{s}}_t(h).$$

La estrategia es, por lo tanto, modelar la media de la serie de retornos  $r_t$  por medio de un modelo SARIMA y después modelar la varianza de los residuos  $a_t$  por medio de la familia GARCH. Por ejemplo, si se usa el modelo GARCH(r,s) para la varianza y un modelo ARMA(p, q) para la media de los retornos, se tiene el modelo ARMA(p,q)-GARCH(r,s)

$$r_t = \mathbf{f}_0 + \sum_{i=1}^p \mathbf{f}_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \mathbf{q}_j a_{t-j}, \quad (A2,1)$$

$$a_t = \mathbf{s}_t \mathbf{e}_t, \quad (A2,2)$$

$$\mathbf{s}_t^2 = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^r \mathbf{a}_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \mathbf{b}_j \mathbf{s}_{t-j}^2. \quad (A2,3)$$

Suponiendo que  $\mathbf{e}_t \sim N(0,1)$ , se obtiene que

$$r_{t+1} | F_t \sim N(\hat{r}_t(1), \hat{\mathbf{s}}_t^2(1)),$$

---

<sup>21</sup> Ecuación explicada más adelante con más detalle.

donde  $\hat{r}_t(1)$  y  $\hat{\mathbf{S}}_t^2(1)$  son las predicciones a un paso de la media y la varianza obtenidas de las ecuaciones A2,1) y (A2, 3) respectivamente.

Para calcular el VaR a un período con probabilidad  $p = 0.05$ , se tiene:

$$VaR = \hat{r}_t(1) - 1.65\hat{\mathbf{S}}_t(1). \quad (A2,4)$$

Para obtener el VaR a  $k$  períodos dado un origen  $T$ , se calcula del computo de los retornos  $r_t[k]$  que se los obtiene de

$$r_t[k] = r_{t+1} + r_{t+2} + \dots + r_{t+k},$$

y usando las ecuaciones (A2,1) y (A2,3) se obtiene la predicción de la media y la varianza de  $r_t[k]$  condicionada a la información  $F_T$  hasta el instante  $T$ .

### Valor en riesgo para la serie de depósitos a la vista y a plazos<sup>22</sup>:

El retorno de los depósitos a la vista y a plazo se representa por la combinación lineal o promedio ponderado de los retornos particulares de cada serie

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2$$

siendo la suma de los ponderadores  $w_1$  y  $w_2$  es igual a 1.

Por su parte, la varianza de la combinación lineal de los depósitos se denota de la siguiente manera:

$$V(r_p) = V(w_1 r_1 + w_2 r_2)$$

---

<sup>22</sup> En esta sección se desarrolla con mayor rigurosidad analítica el concepto del Value at Risk, estructura que servirá para efectuar simulaciones de carteras compuestas con más de una posición financiera.

$$\Rightarrow V(r_p) = w_1^2 V(r_1) + w_2^2 V(r_2) + 2w_1 w_2 \text{Cov}(r_1, r_2)$$

Así mismo, si se define las varianzas por  $\mathbf{s}_{it}^2$  y se aplica la fórmula de covarianza, a la ecuación anterior, se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{s}_{pt}^2 = w_1^2 \mathbf{s}_{1t}^2 + w_2^2 \mathbf{s}_{2t}^2 + 2w_1 w_2 \mathbf{r}_{12} \mathbf{s}_{1t} \mathbf{s}_{2t}$$

A partir de esta expresión se introduce la definición de Valor en Riesgo

$$VaR_p = -Mas_{pt} \text{ ?},$$

donde:

$\mathbf{a}$  es el valor de significancia de la distribución gaussiana (0,1) y  $M$  es el monto total de los depósitos medido en unidades monetarias.

De esta manera

$$VaR = -\mathbf{a} \left[ w_1^2 \mathbf{s}_{1t}^2 + w_2^2 \mathbf{s}_{2t}^2 + 2w_1 w_2 \mathbf{r}_{12} \mathbf{s}_{1t} \mathbf{s}_{2t} \right]^{1/2} M$$

$$VaR = -\left[ \mathbf{a}^2 w_1^2 \mathbf{s}_{1t}^2 M^2 + \mathbf{a}^2 w_2^2 \mathbf{s}_{2t}^2 M^2 + 2\mathbf{r}_{12} (\mathbf{a} w_1 \mathbf{s}_{1t} M)(\mathbf{a} w_2 \mathbf{s}_{2t} M) \right]^{1/2}$$

A la ecuación del VaR así obtenida se incorpora el monto total de los depósitos y el nivel de significancia como sigue:

$$VaR = -\left[ \mathbf{a}^2 w_1^2 \mathbf{s}_{1t}^2 M^2 + \mathbf{a}^2 w_2^2 \mathbf{s}_{2t}^2 M^2 + 2\mathbf{r}_{12} (\mathbf{a} w_1 \mathbf{s}_{1t} M)(\mathbf{a} w_2 \mathbf{s}_{2t} M) \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow VaR_p = -\left[ VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\mathbf{r}_{12} VaR_1 VaR_2 \right]^{1/2}$$

de esta forma, el VaR de los depósitos totales estaría explicado por el VaR de los depósitos a la vista, el VaR de los depósitos a plazos y también por las autocorrelaciones seriales de los dos tipos de depósitos. La representación del VaR para dos series puede generalizarse para  $n$  series tal como sigue:

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} \omega_1 & \dots & \dots & \omega_n \end{bmatrix}_{1 \times n} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \dots \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \dots \\ \dots \\ \omega_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

La notación general a aplicar para la obtención del VaR de n series sería:

$$s_p^2 = wSCsw' = w\Sigma w'$$

donde:

- $\Sigma$  es la matriz de varianzas de orden n, y
- $w$  es el vector fila de n ponderadores
- C la matriz de correlaciones.

Aplicando la definición  $VaR_p = -as_p M$ , se obtiene:

$$VaR_p = -aM \sqrt{(wSCsw')} = \sqrt{((VaR)' C (VaR))}$$

siendo finalmente el VaR un vector de 1xn de VaR individuales para cada serie.

### Anexo No. A3

**Función de densidad Normal multivariante.-** Se construyó una función normal trivariante, estimando sus parámetros mediante métodos de máxima verosimilitud, suponiendo para este caso independencia entre las observaciones de una misma variable<sup>23</sup> es decir no están autocorrelacionadas. Con este modelo, las pruebas de bondad de ajuste en la mayoría de entidades no resultaron satisfactorias<sup>24</sup> y además no cumplieron con las propiedades de esbeltez y simetría que son propiedades fundamentales en funciones de densidad normal. Por tanto, los resultados de la simulación fueron divergentes y con valores altos<sup>25</sup>, especialmente en la volatilidad de los depósitos.

**Función de densidad Gamma multivariante.-** Bajo los supuestos de independencia anteriores, se estimó los parámetros de la función de densidad Gamma<sup>26</sup> mediante métodos de máxima verosimilitud. Los resultados obtenidos con esta función fueron ligeramente mejores que los obtenidos mediante el uso de la función de distribución normal ya que abarca la asimetría presente por la volatilidad de los depósitos, casi la mitad de entidades financieras registraron un nivel de significancia favorable, sin embargo, éstos bancos no representaron ni el 32% de los depósitos del Sistema Bancario.

En el Anexo No. A4 se presentan los valores del estadístico Ji\_cuadrado para las dos funciones de densidad antes estudiadas para cada banco. Tassi (1985) expresa que, cuando los grados de libertad son mayores a 30 se puede admitir que:

$$\sqrt{2}(\mathbf{c}_p^2 - \nu) - 1$$

sigue aproximadamente la ley normal reducida, y  $\mathbf{c}_p^2$  es tal que  $P(X < \mathbf{c}_p^2) = p$ . Con esta consideración se determina que el valor teórico con el que se deben comparar los valores de la tabla del Anexo No. A3 (Ji\_cuadrado) es aproximadamente 214, es decir que para valores mayores a este número se debe rechazar la hipótesis nula de que los datos se ajustan a una función de densidad específica, en este caso Normal o Gamma multivariada.

<sup>23</sup> Tanto para los activos líquidos como para los pasivos exigibles.

<sup>24</sup> Ver Anexo No. A4.

<sup>25</sup> No cumple con las condiciones empíricas, que la frecuencia de volatilidades grandes disminuye, especialmente si se toma un umbral como el índice de liquidez.

<sup>26</sup> Esta función depende de dos parámetros p y q, que hacen que la función de densidad sea simétrica o no, cuando q = p = 0.5, la función Gamma tiende a una distribución normal y cuando p tiende a cero la función de densidad se concentra en el origen o cuando q tiende a cero, la función se concentra en las observaciones grandes (ver Tassi, 1985).

**Anexo No. A4**

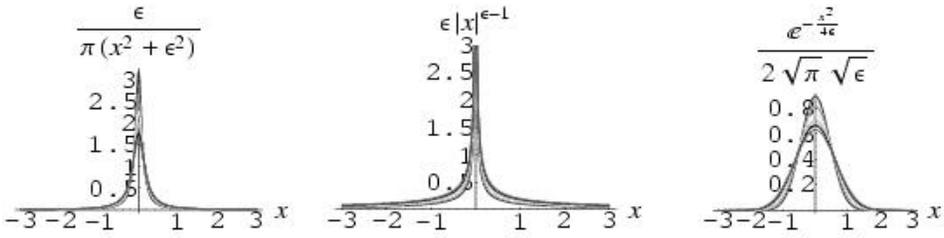
En esta tabla se muestra el valor del Ji\_Cuadrado para dos funciones de densidad que permiten comparar con los valores de las tablas.

Entidades	Valor del Ji Cuadrado	
	Normal	Gamma
Banco 1	319.36	389.66
Banco 2	472.63	345.90
Banco 3	1,054.36	760.23
Banco 4	363.42	207.76
Banco 5	229.07	196.76
Banco 6	519.76	292.42
Banco 7	404.60	515.25
Banco 8	243.55	243.18
Banco 9	130.77	98.73
Banco 10	109.87	72.14
Banco 11	178.43	62.74
Banco 12	361.37	216.15
Banco 13	41.74	25.00
Banco 14	224.66	131.07
Banco 15	312.64	221.93
Banco 16	201.10	238.61
Banco 17	143.19	56.87
Banco 18	58.77	32.42
Banco 19	5,292.13	4,909.40
Banco 20	165.20	74.02
Banco 21	2,287.76	2,478.90

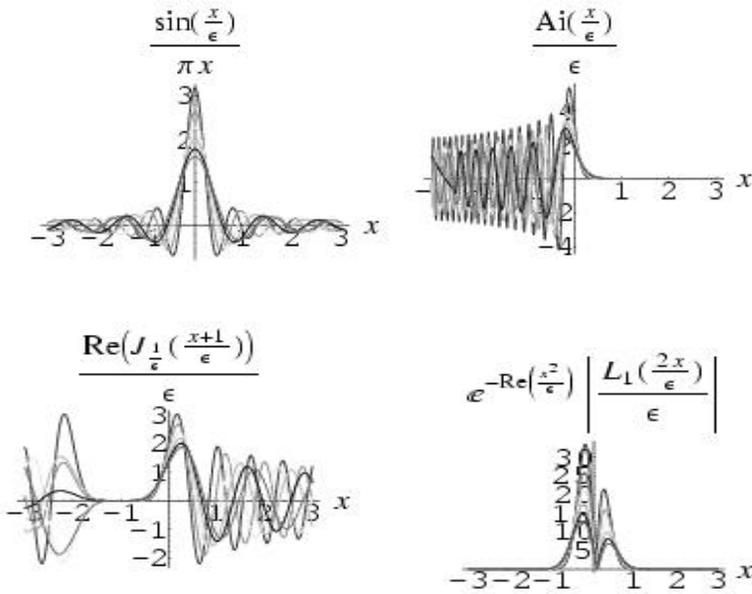
**Anexo No.5**

En los siguientes gráficos se representa la función Delta Dirac usando transformadas de Fourier.

**Gráfico No. A5.1**  
(raíces reales)



**Gráfico No. A5.2**  
(raíces complejas)



### Anexo No. A6

La función de densidad con tres variables se define como

$$f( act, pas, vol) \tag{A6.1}$$

donde:

*act* = activo líquido registrado en el balance de las entidades financieras

*pas* = pasivo corriente

*vol* = valor en riesgo combinado de los depósitos a la vista y a plazo.

El propósito de usar la función de densidad es porque permite emplear de mejor manera los métodos de simulación multivariada. En adelante, se explicará la simulación de funciones de densidad con una variable y luego se generalizará la teoría para funciones de densidad con *n* variables.

Las técnicas de simulación, requieren que las variables aleatorias usadas para ajustar la función de densidad sean finitas, esto es que el rango  $I^{27}$ , es decir, lo que se usa es funciones de densidad truncadas, además, fácilmente se conoce el máximo  $f_{\max}(\cdot)$  de la función de densidad  $f(\cdot)$ .

Con estos dos elementos se puede generar parejas aleatorias  $(x_j, y_j)$  uniformemente distribuidas que se encuentran dispersas en un plano, donde  $x_j \in I$  y  $y_j \in [0, f_{\max}(\cdot)]$ . Los valores de  $x_i$  simulados se comportan como una función de probabilidad  $f(\cdot)$  y son los primeros elementos de cada pareja ordenada que cumple la condición  $y_i \leq f(x_i)$ , esto implica que se toman todos los puntos que están bajo la curva de la función de densidad teórica  $f(\cdot)$ . Gráficamente los puntos corresponden a aquellos que están en la zona sombreada de la campana.<sup>28</sup>

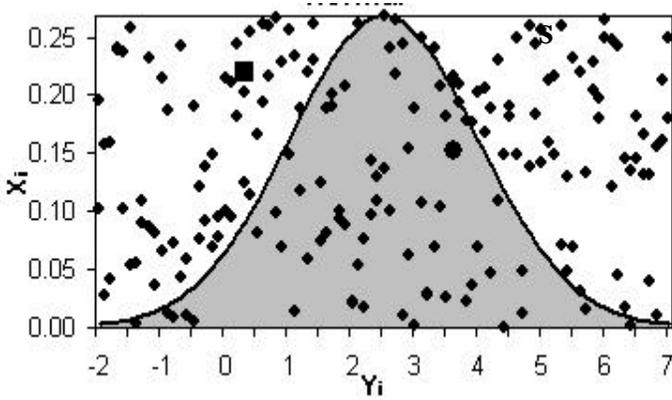
---

<sup>27</sup>  $I$  es el conjunto de valores de las variables aleatorias consideradas en el ajuste.

<sup>28</sup> No es complicado mostrar que los datos simulados  $x_i$  tienden a comportarse como la función de densidad que describe la curva  $f(\cdot)$ , para esta ilustración gráfica, una función de densidad normal.

Gráfico No. A6.1

## Punto de dispersión y densidad normal



El método puede generalizarse a funciones de densidad con  $n$  variables, en las cuales se debe generar vectores  $x \in L^{n+1}$  en un espacio  $(n + 1)$ -dimensional, en donde uno de sus componentes se debe comparar con la función de densidad evaluada en los otros  $n$  componentes restantes, lo cual garantiza que los datos simulados sigan la misma función de densidad  $f(\cdot)$ .

## Anexo No. A7

### Función de Densidad no Paramétrica

El objetivo es estimar una función de densidad  $f_X$  definida sobre los reales, partiendo de un conjunto de observaciones

$$D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

donde:

$n$  es el número de observaciones,

$X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\}$  es la  $i$ -ésima observación con  $m$  componentes de cada una de las variables consideradas y

$m$  en número de variables que intervienen en cada observación.

Para la estimación de la función de densidad se utilizó el método de Máxima Verosimilitud (MV) como se describe a continuación.

### Estimación de densidad por Máxima Verosimilitud

Matemáticamente, la función de máxima verosimilitud se denota:

$$L(f_X / D) = \prod_{i=1}^n f_X(X_i | \cdot) \quad (A7.1)$$

Se conoce que, los valores de  $h^{29}$  que maximizan la función de verosimilitud  $L$  son los mismos que maximizan la función log- verosimilitud  $l$  definida como sigue:

$$l(f_X / D) = \sum_{i=1}^n \log f_X(X_i | \cdot) \quad (A7.2)$$

---

<sup>29</sup> Es el ancho de Kernel, usada en la construcción de funciones de densidad no paramétrica.

Maximizando la función anterior se tiene

$$\hat{f}_X^{MV} = \frac{1}{\prod_{j=1}^m n_j} \sum_{i=1}^{n_1} \dots \sum_{i=1}^{n_j} \mathbf{d}_X (X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (\text{A7.3})$$

donde  $\mathbf{d}_X$  es la función *Delta Dirac* para  $m$  variables, y se define como:

$$\mathbf{d}_X (X_1, X_2, \dots, X_m) = \begin{cases} \infty & \text{para } X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_m^2 = 0 \\ 0 & \text{para } X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_m^2 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A7.4})$$

con esta función se asocia las funciones de vecindad de cada observación a una función de densidad no paramétrica multivariada, la misma que está implícitamente considerada en la estimación de la función de densidad mediante el método de MV (en el Anexo No. A5 se muestra algunos gráficos que puede obtenerse de una función Delta Dirac.)

Por convención, para todo  $j = 1, 2, \dots, m$

$$\int \dots \int_{m \text{ veces } -\infty}^{\infty} \mathbf{d}_X^m (X_1, \dots, X_m) dx_1 \dots dx_m = 1 \quad (\text{A7.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^m \mathbf{d}_X (X_1, X_2, \dots, X_m) g(X_1, X_2, \dots, X_m) dx_1 \dots dx_m = g(x) \quad (\text{A7.6})$$

De ahí, el estimador de MV de  $f$  es una suma ponderada de  $n$  vecindades  $\mathbf{d}_X$  localizadas en cada uno de las observaciones de la muestra y su comportamiento marginal.

**Anexo No. A8**

Ejemplos de la funciones de Kernel para una variable:

- (a) El Kernel Cuadrado (uniforme entre  $[0, 1]$ )

$$k(x) = 1 \text{ con } |x| \leq 0,5.$$

- (b) El Kernel Epanechnikov

$$k(x) = \frac{3}{4\sqrt{5}} (1 - x^2 / 5) \text{ con } |x| \leq \sqrt{5};$$

- (c) El Kernel Gaussiano

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \quad k(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-x^2/2}$$

En los tres casos el área bajo la curva es igual a 1. Obsérvese que tiene distintas holguras como alturas máximas por lo tanto omitiremos las cantidades de suavizamiento para que se iguale a  $h$ .

En el caso del Kernel gaussiano se asegura que  $\hat{f}_x$  es diferente de cero en cualquier valor de  $x$ . Para calcular  $\hat{f}_x$  en un punto  $x$  tenemos que tener evaluado  $k(\cdot)$  en  $n$  elementos de cada observación, el cual puede ser muy importante si el número de datos es grande.

La forma exacta del Kernel no es crítica en la practica. Lo más importante de la forma del Kernel es que sea bien elegido la  $h$  que controla el sesgo y la varianza.

Teóricamente un Kernel debe ser siempre no negativo y su integral debe ser igual a uno y, usualmente es simétrico alrededor de cada observación y en ese punto, tiene un máximo y decrece monótonamente a los lados de ese punto. Además, si un Kernel es cero fuera de las vecindades equidistantes a la observación, se dice que éste tiene una base compacta (intervalos cerrados), los Kernel Uniforme y Epanechnikov cumplen con esta condición.

En el siguiente gráfico se ilustra a manera de ejemplo una función de densidad no paramétrica, construida con dos variables: *act* y *vol*, usando la función Kernel gaussiana bidimensional, para una entidad financiera:

**Gráfico No. A8.1**

