Cuestiones Económicas Vol 18, No 2:3, 2002

Condiciones iniciales en la Curva de Lorenz: un análisis a partir de la Catenaria*

MIGUEL ACOSTA[1]

Resumen

El objetivo de esta investigación es proveer una visión adicional sobre las condiciones iniciales que se derivan de la Curva de Lorenz. Como se señala en la literatura económica, las condiciones iniciales de la distribución del ingreso tienen grandes efectos en el proceso de desarrollo de una economía. Aquí, el concepto de la *catenaria* es usado para entender, en un análisis exploratorio, la estructura inicial que se desprende de la distribución del ingreso en el caso específico de la Curva de Lorenz. Pese a que existen algunas deficiencias en la aproximación de esta curva, a través de la forma funcional definida por la *catenaria*; la intuición sugerida a partir de la utilización de este método, permite establecer las causas por las cuales ratios similares (como la proporción de pobres con respecto a la proporción de ricos) pueden conducir a senderos de crecimiento totalmente distintos y por tanto a diferentes equilibrios.

Abstrac

The objective of this paper is to provide an additional view of the initial conditions prevailing in the Lorenz's Curve. As noted in the economic literature, the initial conditions of the income distribution have strong effects in the process of development of an economy. Here, a *catenary* approach is used to understand, in an exploratory research, the initial structure of the distribution of income, in this specific case of the Lorenz's Curve. While there are some deficiency in the fit of this curve through the *catenary* functional form; the intuition suggested from these approach allows to explain why similar ratios (as the proportion of poor respect to the proportion of rich people) would drive different growth paths and thereby different equilibrium.

1. Introducción

Los economistas con frecuencia resumen la distribución del ingreso usando la Curva de Lorenz y el Coeficiente de Gini. Esta curva es una representación que acumula porcentualmente en el eje vertical al ingreso total ganado por varias porciones de la población, cuando la población es ordenada por el tamaño de sus ingresos en el eje horizontal. Mientras que el coeficiente de Gini es la razón entre dos áreas: la formada entre la Curva de Lorenz y la línea de perfecta equidad

* Quisiera agradecer al Dcotor Jordi Casabó Gispert de la Universitat Politècnica de Catalunya, quien motivó mi interés en los conceptos de la catenaria, a la Doctora Beatriz Rumbos y Beatriz Sánchez del Instituto Tecnológico Autónomo de México por sus invaluables comentarios. Las advertencias usuales aplican.

1 Economista de la Dirección General de Estudios del Banco Central del Ecuador.

representada por la línea de 45 grados, y el área del triángulo debajo de la línea de 45 grados.[2]

A partir de la Curva de Lorenz, razones como la proporción de ingreso en manos del 20 por ciento de la población más rica respecto a la proporción de ingreso en manos del 60 por ciento de la población pobre, pueden ser fácilmente calculadas. En algunos modelos, razones de este tipo son usadas para describir a la distribución del ingreso y constituyen el punto de partida a la hora de hablar de los efectos de determinada distribución en el desarrollo económico de un país.[3] O en el sentido opuesto, razones como éstas son consideradas como las condiciones iniciales sobre las cuales se evalúa el impacto del desarrollo en la distribución del ingreso.

Sin embargo, se pueden encontrar dos problemas relacionados a la Curva de Lorenz. El primero de ellos se refiere a la falta de acuerdo entre los investigadores sobre la forma funcional para representar a esta curva. Aunque la Curva de Lorenz puede ser calculada directamente a partir de los datos de ingreso y población, estimaciones paramétricas de la Curva de Lorenz siguen siendo útiles y son comúnmente usadas en estudios sobre el ingreso. Si bien las primeras investigaciones sobre este tema trataban de explicar como la distribución del ingreso personal es generada, la mayoría de los trabajos realizados en esta área son principalmente un ejercicio estadístico en busca de un buen ajuste para la distribución. En esta línea de investigación, las diversas formas funcionales propuestas han tratado de cumplir con el doble objetivo: de especificar una distribución estadística hipotética para aproximar la distribución empírica del ingreso; y, de elegir una medida de desigualdad que describa de la mejor manera el nivel de desigualdad dada esta distribución estadística. El segundo problema se relaciona con la utilización de razones que pueden ser derivadas de la Curva de Lorenz, como condiciones iniciales en una economía. Ratios similares que describen a la distribución del ingreso pueden conducir a senderos de crecimiento totalmente distintos y por tanto a diferentes equilibrios. Entonces una pregunta surge de estos problemas ¿Acaso la misma distribución acumulada del ingreso, representada por ejemplo con una forma funcional de la Curva de Lorenz, no debería arrojar luces específicas sobre éstas discrepancias?

El objetivo de este estudio es hacer uso del *concepto de la catenaria,* utilizado principalmente en la Ciencia Física, a fin de proveer una visión alternativa de las condiciones iniciales que se desprenden de la distribución del ingreso en un momento deteminado; específicamente, para aquellas condiciones derivadas de la

---

2 Una excelente primera referencia en estos tópicos es Ray (1998).

3 Un ejemplo, al cual se hará referencia con mayor detalle más adelante, es el modelo presentado por Banedee y Newman (1993). En el análisis de estos autores, razones entre el porcentaje de población pobre respecto a la población rica son utilizadas para establecer los efectos de la distribución del ingreso sobre el desarrollo.

Curva de Lorenz, con el objeto de identificar las causas por las cuales similares condiciones iniciales pueden conducir a resultados distintos. Para ello bajo el análisis que se propone, se requiere incorporar alguna intuición económica a la forma funcional propuesta para describir a esta curva.

No es nuevo el intento de adaptar problemas resueltos en la Física o la Ingeniería a aspectos específicos de la Teoría Económica. Por ejemplo, el problema de la entropía es establecer un orden al "desorden" y la solución consiste en determinar ciertas propiedades que el conjunto y los elementos que pertenecen al "desorden", deben cumplir a fin garantizar la existencia de una función que mapee los elementos de este conjunto con los números reales. A los ojos de un economista, esto no es otra cosa que el establecimiento de las condiciones que las preferencias de los individuos deben cumplir a fin de poder ser representadas por una función de utilidad. En este sentido, la adaptación propuesta del problema físico de la catenaria a la forma funcional de la Curva de Lorenz y al establecimiento a partir de esta forma funcional de condiciones iniciales alternativas para evaluar distintos senderos de crecimiento, tiene un carácter exploratorio.

Además, puesto que es del interés de cualquier hacedor de política identificar aquellos sectores que requieran de manera urgente la implantación de medidas de política, se sugiere que el análisis propuesto sobre la interpretación de la distribución del ingreso podría ser también útil en este tema.

El análisis que aquí se realiza parte, de la misma manera que el trabajo de Kuznets (1955), tratando de detertninar cuales son las fuerzas que actúan a través de la estructura de la población y del ingreso, en el marco de la Curva de Lorenz. En primer lugar se busca presentar una posible interpretación económica a la forma funcional propuesta para representar a esta curva. Pero no se pretende establecer nuevas relaciones con el Desarrollo Económico, ni determinar nuevas medidas de desigualdad donde una extensa literatura puede ser considerada. En su lugar se trata solamente de proveer una nueva herramienta que use mediante la adaptación del problema de la catenaria, las fuerzas que actúan a través de la población y del ingreso para determinar las condiciones iniciales de la distribución acumulada del ingreso, a partir de la Curva de Lorenz.

En la Sección 2, se realiza una breve revisión de la teoría que ha sido expuesta tratando de determinar formas funcionales para la Curva de Lorenz. También, en esta sección, se hace referencia a cierta literatura que ejemplifica el uso de razones derivadas de la Curva de Lorenz, como condiciones iniciales de una economía que son necesarias para obtener resultados particulares. En la Sección 3 se presentan algunas características de dos variables: población e ingreso, y se explica en detalle lo que se entiende por un *análisis con catenaria*. La derivación de *la función de la catenaria* es presentada en la Sección 4, que además muestra que las condiciones funcionales típicas de la Curva de Lorenz pueden ser satisfechas con esta función.

Al final de esta sección, las condiciones iniciales que se derivan de la forma funcional de la catenaria son presentadas y comparadas con la razón de pobres respecto a ricos. Esta razón es utilizada en el trabajo presentado por Banerjee y Newman y es la determinante en la evolución de la economía. Por último, en la Sección 5, se presentan la evidencia empírica sobre la aproximación de la Curva de Lorenz utilizando *la catenaria* y las deficiencias en la utilización de este método. Las conclusiones son expuestas en la Sección 6, conjuntamente con algunas sugerencias para futuras extensiones del análisis propuesto.

2. La Curva de Lorenz y las Condiciones Iniciales, un breve recorrido por la Literatura Económica

2.1 Formas Funcionales de la Curva de Lorenz

La población y el ingreso se encuentran relacionadas en la Curva de Lorenz y por tanto constituyen las dos variables de nuestro interés. La Curva de Lorenz acumula porcentualmente al ingreso total ganado por varias porciones de la población, cuando la población es ordenada por el tamaño de sus ingresos.

Existe una larga literatura considerando formas funcionales para aproximar la Curva de Lorenz. En esta área de investigación se ha tratado de cumplir con un doble objetivo: de especificar una distribución estadística hipotética para aproximar la distribución empírica del ingreso; y, de elegir una medida de desigualdad que describa de la mejor manera el nivel de desigualdad dada esta distribución estadística. No obstante, no se ha alcanzado un acuerdo respecto a cual debe ser la forma apropiada de esta función.

Las propiedades matemáticas típicas de la Curva de Lorenz,[4] junto con las medidas de desigualdad que provienen de una determinada especificación han sido utilizadas para establecer formas funcionales. Un buen ejemplo de este tipo de análisis es presentado por Kakwani y Podder (1976), quienes proponen un método que utiliza el sistema de coordenadas para derivar una forma funcional. Estos autores suponen que el ingreso es una variable aleatoria, X, con distribución $F(X)$ y que la media de la distribución, μ, existe. Con la variable X definida solo para valores positivos, el primer momento de la distribución de X está dado por:

$$F_1(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x Xg(X)dX \qquad (1)$$

donde $g(X)$ es la función de densidad.

---

[4] La curva de Lorenz puede ser representada por una función $y = f(x)$ la cual debe satisfacer: a) $f(0) = 0$, b) $f(1) = 1$, c) $f(x) < x$, y d) $f'(x) \geq 0$ y $f''(x) \geq 0$ para $0 < x < 1$.

La Curva de Lorenz es la relación entre $F(X)$ y $F_1(X)$ y dado que la línea egalitaria, representada por la línea de 45 grados, está definida por $F_1 = F$, tomando cualquier punto P sobre la curva con coordenadas (F, F_1) se tiene que:

$$(2) \qquad \pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(F + F_1) \text{ ; y, } \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(F - F_1)$$

donde η es la distancia ortogonal entre el punto P y la línea egalitaria, mientras que π es la distancia sobre la línea de 45 grados desde el origen hasta la ortogonal. Puesto que la curva de Lorenz siempre cae bajo la línea de 45 grados $(F \beta F_1)$ lo que implica que $\eta \geq 0$, y dado que el ingreso es siempre positivo se sigue de la ecuación (2) que $\eta \beta \pi$. Y la ecuación de la Curva de Lorenz puede ser escrita como:

$$(3) \qquad \eta = f(\pi)$$

donde π toma valores desde cero hasta $\sqrt{2}$.

En base a esta especificación el ratio de concentración de Gini (RC) medido como el doble del área entre la Curva de Lorenz y línea de 45 grados puede ser fácilmente expresado como:

$$(4) \qquad RC = 2\int_0^{\sqrt{2}} f(\pi)\,d\pi$$

Otras propuestas, tales como la explorada en Basmann et al. (1990), presentan formas funcionales generales menos restrictivas para aproximar la Curva de Lorenz, con casi ninguna interpretación económica en ellas. El objetivo de estos estudios es el de obtener una buena aproximación de la distribución del ingreso observada a partir una forma funcional de la Curva de Lorenz. En el árticulo de Basmann se propone directamente la siguiente forma funcional:

$$(5) \qquad y = x^{x^{\cdot} c_1 + c_2} e^{-c_3(1-x)^2 - c_4(1-x)^2 + \upsilon}$$

que constituye una forma anidada de otras formas funcionales presentadas con anterioridad, entre las que se encuentra la propuesta realizada Kakwani y Podder (1973),[5] la cual tampoco presenta argumentos económicos para su definición.

[5] La forma funcional de Kakwani y Podder (1973) es obtenida a partir de la ecuación (5) cuando $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ y $c_3 = 0$.

En uno de los últimos estudios realizados en esta área, Ogwang y Rao (2000) construyen híbridos de la Curva de Lorenz combinando dos o más modelos tradicionales de esta curva que ajustan bien diferentes proporciones de la distribución del ingreso. Las formas funcionales que estos autores proponen son de dos clases: aditivas (combinaciones convexas) o multiplicativas (productos ponderados) de los modelos tradicionales. Estas representaciones de la Curva de Lorenz parecen en general comportarse mejor que las formas funcionales establecidas.

El problema persiste y algunas de ellas ajustan bien solo las colas de la distribución mientras que otras solo lo hacen en el centro de la misma, con casi ninguna interpretación económica de la forma funcional considerada o de los parámetros que son estimados en la función.

2.2 Condiciones Iniciales a partir de la Curva de Lorenz

En el análisis que a continuación se realiza, es de igual importancia entender como las razones entre la proporción de ingreso en manos de los individuos ricos respecto a la de los pobres, son utilizadas en el análisis económico. Desde que Kuznets (1955) presentó su trabajo pionero acerca de los efectos del crecimiento económico sobre la desigualdad de la distribución del ingreso, la razón entre la proporción del ingreso en manos del 20 por ciento de los ricos y la proporción del ingreso en manos del 60 por ciento de los pobres, denominada como el Ratio de Kuznets, ha sido en general considerada como el punto de referencia inicial para hablar de la estructura de la distribución del ingreso. Aunque el resultado presentado por Kuznets, referido a la forma de U invertida de la desigualdad cuando el ingreso per cápita aumenta, ha sido rechazado mediante análisis de series de tiempo o usando paneles de datos,[6] él muestra varias características especiales sobre las causas de los cambios de largo plazo en la distribución del ingreso personal.

Para Kuznets, la estructura del ingreso está determinada por al menos dos grupos de fuerzas que tienden a incrementar la desigualdad en la distribución del ingreso. El primer grupo se relaciona con la concentración del ahorro en la porción de la población con ingresos altos y el hecho de que, dada una determinada distribución, el ahorro total de los grupos por debajo del decil superior tiende a decrecer rápidamente llegando a cero. Entonces, el efecto acumulado de la desigualdad del ahorro conduce a la concentración de una porción creciente de los

---

[6] Lindert y Williamson (1985) rechazan el resultado de Kuznets para Estados Unidos y algunos países de Europa. Deininger y Squire (1996) utilizan un panel de datos poniendo en duda los resultados sobre la forma de U invertida de la desigualdad a medida que una economía crece. Fields y Jakubson (1994) encuentran que la desigualdad ha caído en el curso del desarrollo, al menos dentro del siglo 20.

activos que producen ingreso en manos de los grupos superiores. Como resultado, la desigualdad en el ahorro incrementa la razón de la proporción de ingreso en manos de los ricos respecto a la de los pobres. El segundo grupo de fuerzas se refiere a la estructura industrial de la distribución del ingreso. El crecimiento en países desarrollados ha estado acompañado de un cambio, que implica el abandono de la agricultura en un proceso al cual usualmente nos referimos como Industrialización y Urbanización. Entonces, la distribución del ingreso personal de la población total puede ser vista como una combinación de las distribuciones del ingreso en las poblaciones rural y urbana. Estas dos poblaciones tienen significativas diferencias como las presentadas en su ingreso per cápita promedio o la desigualdad en los porcentajes de ingreso dentro de su distribución, que parecen menos significativas en la población rural que en la urbana. Este segundo grupo de fuerzas es propio del proceso de desarrollo y en la medida que este se presenta en una economía se da más peso a la población urbana que tiene un mayor grado de desigualdad.

Finalmente, Kuznets identifica otros factores como las interferencias legales, factores demográficos y retornos decrecientes, los cuales actúan a manera de cancelar el efecto acumulativo de la concentración del ingreso provocado por el ahorro de los individuos más ricos. Según lo expuesto por Kuznets, las interferencias legales tienden a limitar las posibilidades de acumular mayor riqueza, esto mediante el establecimiento de impuestos u otras cargas tributarías explícitas sobre el capital, reduciendo el nivel de concentración del ingreso en el grupos de población rica. Los factores demográficos y los retornos decrecientes actúan básicamente de la misma manera, a medida que las tasas de crecimiento de la población se incrementan en aquella porción de la población donde la proporción de ingreso es más alta, la concentración de la riqueza disminuye. A su vez, los beneficios de cualquier actividad son cada vez menores en la media en la cual aumenta la población dedicada a esta actividad, a causa de los rendimientos decrecientes.

Otro trabajo con el mismo énfasis que el de Kuznets, es presentado por Ahluwalia (1976) quien además de considerar los determinantes de la distribución personal del ingreso, analiza algunos hechos estilizados de esta distribución y el impacto que el Desarrollo tiene sobre ésta. Ahluwalia distingue los diferenciales de ingreso de largo plazo, a los que hace referencia Kuznets, de aquellos diferenciales que reflejan factores estructurales de largo plazo como la escasez de servicios de trabajo con cierto tipo de habilidades, dentro de distintas regiones, estos factores estructurales también tienen incidencia en la concentración del ingreso en determinados segmentos de la población.

Es importante hacer referencia en primer término al trabajo de Kuznets en la medida que este enfatiza las características de la distribución del ingreso y el impacto que el desarrollo económico tiene en está distribución. Este impacto se evalúa precisamente utilizando el cambio en la razón de la proporción de ingresos de ricos respecto a pobres que puede ser calculada a partir de la Curva de Lorenz. En el análisis a continuación el primer objetivo se centra en proporcionar alguna interpretación económica a la forma funcional de la Curva de Lorenz que se propone, la cual se basa en la funcional establecida por la *catenaria*, utilizando para esto los determinantes de la distribución del ingreso considerados por Kuznets. Una vez alcanzado este objetivo se busca establecer una forma alternativa de representar las condiciones que prevalecen en un determinado momento del tiempo en la distribución del ingreso.

Siguiendo el análisis en la dirección opuesta al análisis de Kuznets, el impacto de la distribución del ingreso sobre el crecimiento económico también ha sido explicado usando razones similares como la proporción de población de pobres con respecto a la proporción de ricos. Banerjee y Newman (1993) siguen esta línea de investigación y resaltan la importancia que tiene la estructura inicial de la distribución del ingreso en el desarrollo económico. Estos autores están interesados en dos temas: la elección entre distintas alternativas de trabajo por parte de los individuos y el proceso de desarrollo. En su estudio extienden un equilibrio estático, en el cual la elección de ocupaciones depende de la distribución del ingreso y de la riqueza a un modelo dinámico de cambio institucional, considerando que la estructura de elección de ocupaciones a su vez determina la nueva distribución del ingreso.

Para Banerjee y Newman, la distribución inicial del ingreso y de la riqueza es la determinante en la evolución de la economía. Su análisis se basa en la existencia de imperfecciones en el mercado de capitales, que limitan la cantidad de crédito que puede ser otorgado a un agente por la falta de medios legales para dar cumplimiento a los contratos de crédito. Por tanto, bajo estas condiciones es posible que un deudor decida no pagar.

Ellos presentan dos casos especiales que admiten una considerable reducción de las dimensiones del problema. En uno de ellos, señalan que si un país tiene inicialmente una razón alta entre población muy pobre y población muy rica, aún cuando el ingreso per cápita inicial sea alto, el proceso de desarrollo puede salir de la tendencia creciente y terminar en una situación de bajo empleo. Por el contrario, si una economía parte con poca población pobre, puede emerger y converger a un estado estacionario con alto salario y alto empleo. Y esto puede ocurrir aún cuando el ingreso per cápita inicial sea bajo.

En el otro caso presentado por estos autores, la distribución inicial de la riqueza también determina la evolución de la economía y el estado estacionario, similares condiciones iniciales a aquellas consideradas en el primer ejemplo, relativas a la razón de la proporción de individuos pobres respecto a la proporción de individuos ricos, conducen a un distinto equilibrio. Específicamente, una economía que parte con un número grande de población relativamente pobre, es más probable que desarrolle empleos asalariados y una economía de gran escala, en comparación con una economía que parte con poca gente pobre. Es aquí donde se resalta el hecho de que aparentemente las mismas condiciones iniciales resultan en distintos equilibrios, y por tanto la estructura misma de la distribución del ingreso debería ser reconsiderada para identificar otros factores que determinen las diferencias en estos resultados.

Existen otros ejemplos en los cuales condiciones iniciales específicas son necesarias para alcanzar un resultado particular. En Murphy et. al. (1989), la estructura de la demanda por mercancías depende de la proporción de riqueza en manos de la clase media, como fuente de poder de compra de manufacturas domésticas. No obstante, en este caso al igual que en el caso anterior no es claro cuales son los factores que garantizan o no una suficiente proporción de ingreso en manos de una porción determinada de la población, pero esta propoción es necesaría a fin de alcanzar ciertos resultados. Más aún como estos autores lo señalan, además de la proporción de ingreso en la clase media otros determinantes importantes del tamaño del mercado deben ser considerados, entre los que señalan al tamaño de la población y al ingreso promedio. Estos factores se encuentran relacionados en la Curva de Lorenz y por tanto nuestro propósito es proponer una interpretación alternativa de la forma funcional de esta curva, haciendo uso de la *catenaria,* esperando que de ésta se desprenda una visión más completa a la hora de establecer las condiciones iniciales que son las determinantes de los resultados propuestos.

Nuestro objetivo final es por tanto, proponer una representación alternativa de las condiciones iniciales consideradas por Banerjeeee y Newman, que permitan explicar las diferencias en estos resultados a partir de características propias de la distribución del ingreso.

3. La Catenaria

Antes de presentar el método de la *Catenaria* y su derivación como nuestra forma funcional alternativa de la Curva de Lorenz, es conveniente tener en mente algunas de las características de la población y del ingreso.

3.1 Población e Ingreso

La población y el ingreso constituyen campos completos en la Ciencia Económica. Por un lado, la Teoría Económica ha mostrado que el proceso de desarrollo puede ser alentado o retardado por el tamaño de la población de una economía.[7] Y por el lado del ingreso, el crecimiento sostenido es una de las principales metas de toda sociedad. Por ello es conveniente mirar de cerca estas variables, al menos en forma tangencial, antes de entrar en el análisis de la catenaria.

La población mundial a mediados del año 2000 alcanzó los 6.1 mil millones de habitantes, de acuerdo con el World Population Prospects de las Naciones Unidas, y está creciendo a una tasa anual del 1.2 por ciento. Para el año 2050, se espera que la población del mundo sea de 9.3 miles de millones.[8] Existen diferencias importantes en el tamaño y la tasa de crecimiento de la población entre países desarrollados y países en desarrollo y estas diferencias también pueden ser encontradas dentro de estos grupos de países. Otros aspectos interesantes en esta arena están relacionados, por ejemplo, con la estructura de la población, pero estos son temas de estudio de la Estadística Demográfica.

En la Tabla 1, se presenta la población y el Producto Nacional Bruto (PNB) medido considerando la Paridad del Poder de Compra (PPC) para algunos países seleccionados.[9] El PNB per cápita para los Estados Unidos es 74 veces mayor que el de Sierra Leona, el cual es el país más pobre del mundo en el año de 1999. India, con un PNB 1.7 veces mayor que el del Reino Unido, es agrupado dentro de los países pobres con un PNB per cápita entre 0 y 3,000 dólares. Pero más dramática es la consideración hecha por el Banco Mundial en el World Development Report 2000/2001, donde se señala que "En los países ricos de Europa la fracción de población viviendo con menos de un dólar por día se ha vuelto casi nula. En China, donde el crecimiento ha sido menor, menos del 20 por ciento de la población vive ahora con menos de un dólar por día. En el sur de Asia, donde el crecimiento ha sido menor todavía, alrededor del 40 por ciento de la población lo hace. Actualmente, aproximadamente un quinto de la población mundial cae debajo de esté austero límite de ingreso."

Aun cuando los temas mencionados anteriormente son importantes, nosotros no hacemos consideraciones directas sobre la desigualdad en el análisis presentado. Si bien la desigualdad juega un rol importante en el análisis económico, sabemos que, el crecimiento no se mueve de manera paralela con la igualdad, el crecimiento se concentra en regiones particulares o sectores y genera significativos diferenciales de ingreso. Estos diferenciales pueden ser vistos como necesarios para superar

---

7 Ray (1998) dedica un capítulo entero a este tema.

8 Las predicciones para el año 2050 sobre la población mundial realizadas por las Naciones Unidas consideran tres casos: 7.9 mil millones en la variante baja, 10.9 mil millones en la variante alta y 9.3 mil millones en la variante media.

9 El Banco Mundial usa la metodología propuesta por Heston y Summers en las Perm World Tables, que miden el ingreso por la Paridad del Poder de Compra, con el objeto de corregir subestimaciones para los países pobres que se presenta al utilizar el Método del Tipo de Cambio. En este último método, los precios de las mercancías son considerados iguales entre países sin importar si estos corresponden a bienes transables o no transables.

cualquier resistencia friccional en la persecución de altas tasas de crecimiento y ésta es la parte interesante a ser considerada para el uso de la *catenaria.*

Tabla No. 1

Producto Nacional Bruto para países seleccionados

País	Población Millones 1999	PNB medido en PPC: Miles de Millones de dólares 1999	PNB medido en PPC: Dólares Per capita 1999
0-3000 PPC			
Sierra Leona	5	2.0	414
Uganda	21	24.4	1.136
India	998	2.144.1	2.149
Ecuador	12	32.3	2.605
Albania	3	9.8	2.892
3000-9000 PPC			
Sri Lanka	19	58.0	3.056
Bulgaria	8	40.4	4.914
Brasil	168	1.061.7	6.317
México	97	752.0	7.719
Chile	15	125.7	8.370
9000+ PPC			
República de Eslovaquia	5	52.9	9.811
Argentina	37	414.1	11.324
Reino Unido	59	1.234.4	20.883
Japón	127	3.042.9	24.041
Estados Unidos	273	8.350.1	30.600

FUENTE: *World Development Report 2000/2001 (Banco Mundial)*

El hecho de no hacer consideraciones directas sobre la desigualdad obedece a varios factores, en primer término existen más desacuerdos que acuerdos en la teoría expuesta sobre este tema. En segundo lugar, la utilización de medidas como el Ratio de Kuznets pueden generar resultados ambiguos, tal como se señaló anteriormente para el modelo de Banerjee y Newman, en el cual las mismas condiciones iniciales de la distribución del ingreso resultan en distintos equilibrios. Por esta razón, una vez que se hayan establecido las condiciones iniciales basadas en la estructura propia de la población y el ingreso representados en la Curva de Lorenz y que éstas sean equivalentes al Ratio de Kuznets, son estas nuevas condiciones iniciales las que deben compararse con las distintas medidas de desigualdad existentes en un análisis específico de estos temas.

3.2 El Análisis con Catenaria

Existen pocas referencias considerando el uso de *la función catenaria* en Economía.[10] No obstante, a continuación se presentan los elementos de esta forma funcional que pueden ser usados para tomar ventaja de sus características y de la noción de equilibrio que la derivación de la *catenaria* implica, y entonces ser aplicados al análisis de la Curva de Lorenz.

La catenaria puede ser vista como la curva que determina la forma de una cuerda suspendida de dos puntos, existe otra interpretación la cual es igualmente interesante en cierto tipo de problemas, en la cual la forma de equilibrio de la *catenaria* minimiza la energía potencial de la cuerda que cuelga.

La catenaria proviene de un problema de física y constituye uno de los primeros problemas en el cálculo de variaciones. En este problema se trata de representar la curva que pasa por dos puntos fijos y que genere la menor superficie de revolución cuando es rotada alrededor del eje horizontal. La solución de este problema es una forma modificada de la *curva catenaria,*

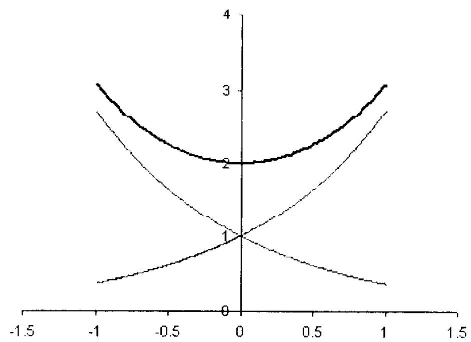
$$(1) \qquad y = \frac{1}{2}\left[e^{x} + e^{-x}\right]$$

la cual es el promedio de dos términos exponenciales, uno de los cuales es la conjugada del otro. El término con exponente positivo da lugar a una curva que crece a una tasa creciente, mientras que el término con exponente negativo produce una curva siempre decreciente, estas dos curvas son presentadas en la Figura 1, junto con la suma de los dos términos. El promedio de ambos, dado por la ecuación (1), tiene la forma general de una *cadena* flexible que cuelga de dos puntos y de la cual se origina su nombre, *catenaria.*

---

[10] Aunque en un problema diferente, Paul Samuelson explota las características de la función catenaria en su artículo *A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule*, y enfatiza que las catenarias tienen un gran futuro en Economía.

Figura No. 1



Una simple cuerda con un peso determinado, que es igual a su masa multiplicada por la fuerza de la gravedad, está colgando de dos puntos cualquiera. La fuerza de gravedad empuja a la cuerda hacia abajo y junto con la tensión horizontal, provocada por el hecho de que la cuerda se encuentra sujeta en sus extremos, conducen al equilibrio de la cuerda, de tal forma que estas fuerzas están balanceadas.

En la ecuación (1), la variable y mide la altura que va alcanzando la cuerda a medida que seguimos aumentando la distancia horizontal entre los dos puntos, representada por la variable x, hasta que esta distancia llega a su máximo valor determinado por el espacio horizontal que separa dichos puntos. Entonces la cuerda tiene *la forma de catenaria.*

Podemos entonces suponer que la Curva de Lorenz está colgando de los puntos *(0, 0)* y *(1, 1)*. Pero restan algunos problemas por resolver. Primero una curva no tiene peso, lo cual es requerido para el uso de la catenaria. De otra forma, la fuerza de gravedad no podría empujar la cuerda hacia abajo. En segundo lugar, es necesario establecer la existencia de un concepto equivalente en la teoría económica a la fuerza de gravedad, digamos una *fuerza de ingreso,* que empuje de manera vertical a la distribución del ingreso hacia abajo.[11] Y por último, debe darse una interpretación

[11] Es también posible considerar una fuerza horizontal, equivalente a una gravedad horizontal, la cual está empujando la curva hacia la derecha de la distribución, y también que ambas fuerzas de gravedad, horizontal y vertical están actuando simultáneamente. No obstante, éstos interesantes casos, no proveen una forma funcional sencilla que haga posible seguir el mismo análisis, y éstos son dejados para un futuro análisis, puesto que la catenaria tradicional es suficiente para explicar las condiciones iniciales en la Curva de Lorenz.

a la tensión horizontal que garantiza en la catenaria el equilibrio de la cuerda. A continuación nos referimos a cada uno de estos problemas a fin de establecer que el uso de la catenaria puede ser apropiado para la Curva de Lorenz.

Para la Curva de Lorenz tenemos que cada punto porcentual del ingreso está ordenado con un punto porcentual de la población, el peso de un cuerpo esta dado por la masa multiplicado por la fuerza de la gravedad. Entonces supondremos que la masa de la curva por unidad de largo puede ser normalizada a uno, sin pérdida de generalidad. De esta forma el peso de la cuerda por unidad de largo está dado por $w=1g$, donde g representa la gravedad o como veremos *la fuerza de ingreso*.

El segundo problema puede resultar más complejo. Los términos *tensión, presión o fuerza* son frecuentemente usados en Economía. No obstante, su significado es vago: La *tensión* en general refleja una situación con dos ideas opuestas, como el libre comercio versus el proteccionismo, otro uso de este término se relaciona con las condiciones que prevalecen sobre una clase social específica de una economía. El término *presión* se encuentra en variables como la inflación, tipo de cambio o la presión ejercida por determinados grupos políticos. Y por último, el adjetivo *fuerza* es principalmente usado para calificar a los mercados o al trabajo. Existe solo una excepción tratando de capturar una medida de estos términos en Cullison (1975), donde un Indice de Presión de Empleo (EPI, por sus siglas en inglés) es construido para medir las condiciones del mercado de trabajo. Cullison deriva el EPI dividiendo los niveles actuales de empleo por un valor de ajustade de la tendencia de la población. Teóricamente, el índice mide el exceso de demanda o de oferta, suponiendo que el empleo actual es una variable proxy de la demanda de trabajo y que la tendencia mide la oferta de trabajo de largo plazo.

Como se mencionó, con el objeto de hacer factible el uso de la catenaria, es necesario reconocer en economía un concepto equivalente a la fuerza de gravedad. Recordemos que la gravedad es la atracción ejercida por un objeto hacia el centro de la tierra, en física la gravedad no es otra cosa que la aceleración constante que un objeto tiene cuando es soltado en caída libre. El término *aceleración* es usado en economía para identificar cuando un país experimenta diferencias en sus tasas de crecimiento, medidas respecto a la tendencia o dentro del ciclo económico. Si bien esta idea nos acerca en algo a establecer una equivalencia, es necesario precisar con mayor claridad como una fuerza equivalente a la gravedad actúa en la economía empujando hacia abajo a la distribución del ingreso.

Algunos hechos que pueden encontrar fácil consenso, se refieren a que una economía con mayor ingreso es más fácil que enfrente una desaceleración o promueva una mayor aceleración en su crecimiento, que otra que cuente con mínimos recursos. Es decir ésta aceleración depende del tamaño del ingreso. Pero esta aceleración debe empujar a determinada porción de la población otorgando una diferente porción de ingreso, a fin de que actúe de manera equivalente a la fuerza de gravedad y podamos denominarla apropiadamente *como fuerza de ingreso.*

Regresando a Kuznets, a medida que el proceso de crecimiento avanza, es decir a medida que la aceleración de una economía es importante, él identifica varias fuerzas que actúan sobre la distribución del ingreso y deben estar balanceadas a fin de alcanzar el equilibrio. Cuando una economía se acelera de manera significativa, la concentración de ahorro, incrementa la proporción del ingreso en el decil superior de la población, otorgando una porción de ingreso baja a la gente pobre. Por tanto en el marco del análisis de Kuznets, es posible identificar este grupo de fuerzas como parte de *la fuerza de ingreso.*

Así podemos considerar que cuando el crecimiento se concentra en regiones o sectores particulares, producto de la aceleración de la economía, existe una fuerza que concentra al ingreso en una porción particular de la población y esta concentración puede ser necesaria para superar algunas resistencias friccionales y alcanzar altas tasas de crecimiento.

Suponga, por ejemplo, que existen imperfecciones en el mercado de capitales, el segmento de individuos ricos puede usar una porción de su ingreso, o más precisamente una porción de sus activos como colateral, para convertirse en empresarios que demandan trabajo de los individuos pobres. Sin concentración del ingreso, se puede producir un equilibrio en el cual ningún individuo en la economía pueda ofrecer el colateral y solo el empleo propio o de subsistencia prevalece en el estado estacionario.

Por tanto la aceleración de una economía, implica *una fuerza de ingreso* que determina la estructura de la distribución del ingreso presionando sobre la proporción de ingreso en manos de cada porción de la población, esta fuerza es por tanto equivalente a la fuerza de gravedad en el análisis de la catenaria. No obstante, como se mencionó anteriormente, la *fuerza de ingreso* agrega otros factores a más de la concentración del ahorro, como son el tamaño del ingreso o la estructura de la producción que puede requerir tipos específicos de fuerza de trabajo, los cuales también presionan al ingreso hacia cierta porción de la población. Cuando el tamaño del ingreso es grande entonces la economía tiene más recursos a su disposición y estos recursos pueden ser compartidos por todos los individuos suavizando la distribución del ingreso. Por el otro lado la estructura de la producción, tiene los mismos efectos que el proceso de Industrialización y Urbanización, al cual hace referencia Kuznets, cuando ciertas actividades emergen rápidamente se crean enormes diferenciales en la proporción del ingreso en manos de ciertos grupos de la población.

Por último, nos resta dar una interpretación a la tensión que actúa de manera horizontal en la Curva de Lorenz, la cual mide en esta dirección a la población ordenada por el tamaño de su ingreso. Esta fuerza horizontal es necesaria a fin de balancear las fuerzas verticales y alcanzar el equilibrio en la distribución, de la misma manera que lo señala Kuznets. Para él estas fuerzas se relacionan con factores demográficos y con retornos decrecientes y están contra balanceando aquellas fuerzas que tienen efectos acumuladores sobre la concentración del ingreso.

La interpretación que aquí se hace de esta tensión que actúa de manera horizontal es un tanto neoclásica, puesto que en este eje se mide la población y dada la diferencia en esta variable entre los distintos países, suponemos que la población representa al factor trabajo. En la medida en que este es un factor abundante en la economía esperamos que la tensión de asignarlo de manera eficiente sea menor. Para reconocer este hecho, tal vez sea suficiente pensar en la tensión que se tiene para asignar el recurso escaso, tiempo, cuando tenemos cientos de tareas por cumplir. Por tanto, nuestra interpretación se basa en suponer que sobre cualquier recurso escaso se crea una tensión. El trabajo, representado por la población es un recurso escaso, y esta característica implica que existe sobre él una tensión para ser asignado de manera eficiente. A medida que el recurso se vuelve más escaso la tensión de asignarlo de manera eficiente aumenta. En el análisis presentado a continuación el recurso escaso será relacionado con la población y nos referiremos a esta tensión como *la tensión poblacional.*

Establecida la existencia de *la fuerza de ingreso,* equivalente a la fuerza de gravedad, que empuja a la distribución hacia abajo. La *tensión poblacional* que actúa en dirección horizontal debe balancear a la *fuerza de ingreso* para alcanzar el equilibrio de la distribución. Entonces, la *función catenaria* se convierte en una forma funcional para explicar primero la forma de la Curva de Lorenz, que va acumulando porcentualmente, en el eje vertical al ingreso total ganado por varias porciones de la población cuando la población es ordenada por el tamaño de sus ingresos en el eje horizontal; y en segundo lugar las condiciones iniciales que se derivan de ella.

4. La Función de la Catenaria y la Curva de Lorenz

Como se mencionó que existen al menos dos posibles interpretaciones de la catenaria, cada una de las cuales provee una forma equivalente de establecer la forma funcional de la curva. A continuación se sigue la idea de que la curva está colgando de dos puntos, puesto que esto permite una comparación directa con las propiedades funcionales de la Curva de Lorenz, y de ahí a la determinación de las condiciones iniciales prevalecientes en la distribución acumulada del ingreso. Quizás, pueda resultar interesante la solución del problema de optimización, con el objeto de presentar de manera un poco más completa las alternativas de derivación de la función definida por la catenaria, el problema de optimización es presentado en el Apéndice A.

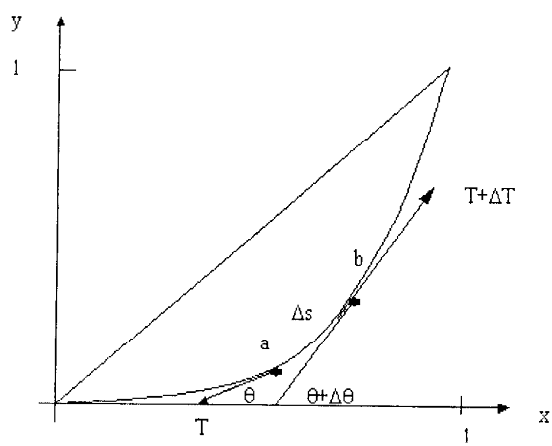
4.1 Derivación de la Función Catenaria

Aquí se presenta la derivación de la función de la catenaria. Como se vio, ésta permite considerar nociones adicionales de equilibrio estático de la *fuerza de ingreso* y de la *tensión poblacional.*

De manera general, se busca determinar la forma de una cuerda que cuelga de dos puntos *(0,0)* y *(1,1)*, considerando que existe una fuerza que presiona a la cuerda hacia abajo, que denominamos *la fuerza de ingreso*. En el eje de las y se mide la altura acumulada de la cuerda a medida que la distancia horizontal, en el eje de las x, aumenta.

En la Figura 2, se consideran dos puntos a y b separados por una porción de cuerda Δs. Denotamos a T y $T+\Delta T$ como los vectores de tensión en los puntos a y b, respectivamente, y por w, al peso por unidad de largo de la cuerda. Puesto que la cuerda está en equilibrio, todos los componentes de las fuerzas que actúan sobre cualquier porción Δs deben estar balanceados.

Figura No. 2



Igualando los componentes horizontal y vertical de la tensión en los dos puntos tenemos:

$$(1)\qquad T\cos\theta = (T+\Delta T)\cos(\theta+\Delta\theta)$$

$$(2)\qquad T\,\mathrm{sen}\,\theta = (T+\Delta T)\,\mathrm{sen}(\theta+\Delta\theta) - w\Delta s$$

Los componentes horizontales de los dos puntos a y b son considerados en la ecuación (1). Es claro que estos componentes no están afectados por la "gravedad" que empuja la cuerda hacia abajo y entonces la ecuación no depende de Δs. Además, la porción de la curva, $g\Delta s$, es tomada de forma arbitraria y por tanto se puede considerar que la tensión horizontal es una constante, T_0, en cualquier punto de la curva. En la Curva de Lorenz hemos supuesto que ésta es precisamente la tensión poblacional que está actuando de una manera constante a lo largo de la curva. En la ecuación (2), para hacer que los componentes verticales sean iguales se necesita considerar, en el punto más alto b, el peso de la cuerda en la porción del cable analizada, el cual está dado por $w\Delta s$. Note que, el peso de la cuerda está determinado por la masa multiplicada por la fuerza de gravedad. Para la Curva de Lorenz se tiene que cada punto porcentual del ingreso está ordenado con un punto porcentual de la población, entonces la masa de la curva por unidad de largo puede ser normalizada a uno, sin pérdida de generalidad. Por tanto el peso de la cuerda está dado por $w=1g$, donde g representa la gravedad o la fuerza de ingreso. Y las dos ecuac'ones pueden ser reescritas como:

$$(1')\qquad T\cos\theta = (T+\Delta T)\cos(\theta+\Delta\theta) = T_0$$

$$(2')\qquad T\,\mathrm{sen}\,\theta = (T+\Delta T)\,\mathrm{sen}(\theta+\Delta\theta) - \Delta s$$

En los puntos a y b, los componentes horizontales son iguales a una constante, la cual es precisamente *la tensión poblacional* que actúa en esa dirección. Las componentes verticales son iguales cuando el peso de la porción de la cuerda, $g\Delta s$, es descontado de la tensión en el punto más alto, b; esto es a causa de que la gravedad está operando sobre la cuerda, y nuestra fuerza equivalente es *la fuerza de ingreso.*

Dividiendo (2') para (1') y luego de algunas manipulaciones tenemos:

$$(3)\qquad \frac{tg(\theta+\Delta\theta) - tg\theta}{\Delta\theta} = \frac{g}{T_0}\frac{\Delta s}{\Delta\theta}$$

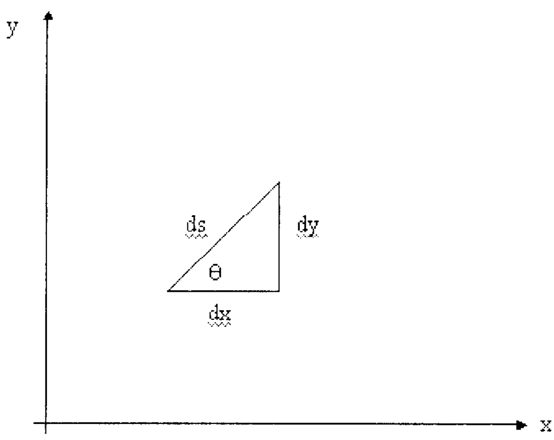
Tomando el límite cuando $\Delta\theta$ tiende a cero en la ecuación (3), se obtiene:

$$(4)\quad \sec^2\theta = \frac{g}{T_0}\frac{ds}{d\theta}$$

Ahora, si se considera la Figura 3, vemos que $\mathrm{tg}\,\theta = dy/dx$, y que $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(dy/dx)$, por tanto sigue que:

$$(5)\quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y/dx^2}{1+(dy/dx)^2}$$

Figura No. 3



Además, sabemos que $\sec^2\theta = (dy/dx)^2$, y:

$$(6)\quad \sec^2\theta = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Denotando la razón entre la tensión horizontal (T_0) y la fuerza de ingreso (g) como L y substituyendo las ecuaciones (5) y (6) en la ecuación (4), se obtiene:

(7) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

la cual es una ecuación diferencial que puede ser resuelta obteniendo:

(8) $$y = \frac{L}{2}\left[e^{\frac{x}{L}+c_1} + e^{-\frac{x}{L}-c_1}\right] + c_2$$

Las constantes c_1 y c_2 en la ecuación (8) están determinadas por la condición de que la curva pase por los puntos *(0,0)* y *(1,1)*. Por tanto, el ratio L es el único determinante de la forma de la curva, el cual es a su vez la única condición inicial en el análisis propuesto, esta razón está determinada por la *tensión poblacional* y por la *fuerza de ingreso* que actúan sobre la Curva de Lorenz. Y es a éste ratio al que denominamos el *Ratio de Lorenz.*

4.2 Propiedades Funcionales de la Curva de Lorenz

Siguiendo a Rasche et. al. (1980), la Curva de Lorenz puede ser representada por una función $y = f(x)$ y debe satisfacer las siguientes condiciones:

a) $f(0) = 0$,
b) $f(1) = 1$,
c) $f(x) < x$, and
d) $f'(x) \geq 0$ *and* $f''(x) \geq 0$ *for* $0<x<1$.

Estas cuatro condiciones pueden ser satisfechas por la función de la *catenaria* dada en la ecuación (8). Primero los valores de las constantes c_1 y c_2, pueden elegirse de tal forma que satisfagan las condiciones a) y b). Esto significa que las dos siguientes ecuaciones deben cumplirse:

(9) $$c_2 = -\frac{L}{2}\left[e^{+c_1} + e^{-c_1}\right]$$

y,

(10) $$1 - c_2 = \frac{L}{2}\left[e^{\frac{1}{L}+c_1} + e^{-\frac{1}{L}-c_1}\right]$$

De estas dos ecuaciones podemos expresar las constantes c_1 y c_2 en términos de un solo parámetro, el Ratio de Lorenz, *L*.

La condición c) se cumple puesto que la función de la catenaria siempre cae bajo la línea 45 grados. Finalmente, tenemos como condición suficiente que $(1/L < c_1)$ para que la ecuación (8) sea una función no decreciente y convexa, de forma que satisfaga la condición d). Los detalles del cumplimiento de estas condiciones son presentados en el Apéndice B.

4.3 Propiedades Axiomáticas de la Curva de Lorenz

Es importante notar que la Curva de Lorenz cumple con el llamado *Criterio de Lorenz*, el cual establece que si la Curva de Lorenz de una distribución tiene todos sus puntos a la derecha de la Curva de Lorenz de otra distribución, entonces la última debe ser juzgada más desigual que la primera. Adicionalmente, una medida de desigualdad es consistente con este criterio si y solo si cumple de manera simultánea con los principios de anonimato, población e ingreso relativos y con el Principio de Dalton.

En este sentido la forma catenaria de la Curva de Lorenz no aporta criterios adicionales sobre la desigualdad. Si bien la forma de la curva bajo este método está determinada por las estructuras de la población y el ingreso, la aplicación del Criterio de Lorenz sigue siendo la misma, a pesar de que tratemos de establecer algún grado de comparación entre dos curvas que se crucen utilizando las condiciones derivadas con el método de la catenaria, éstas seguirán fallando en el Principio de Dalton.[12]

4.4 El Ratio de Lorenz

Ahora analizaremos algunas de las características de la forma catenaria de la Curva de Lorenz, representada en la ecuación (8). Se mencionó anteriormente que las constantes c_1 y c_2 pueden elegirse de forma que la curva cruce por el origen y por el punto $(1, 1)$; entonces el coeficiente que determina la forma de la Curva de Lorenz es el *Ratio de Lorenz*, el cual se asume constante a lo largo de toda la curva y determina el balance de las fuerzas que actúan a través de población y del ingreso. Este balance es necesario para alcanzar equilibrio en la distribución acumulada del ingreso.

---

12 El principio de Dalton sobre las medidas de desigualdad establece que si una determinada distribución del ingreso puede ser alcanzada a partir de otra mediante la aplicación de transferencias regresivas, entonces la primera distribución debe ser calificada de más desigual que la última.

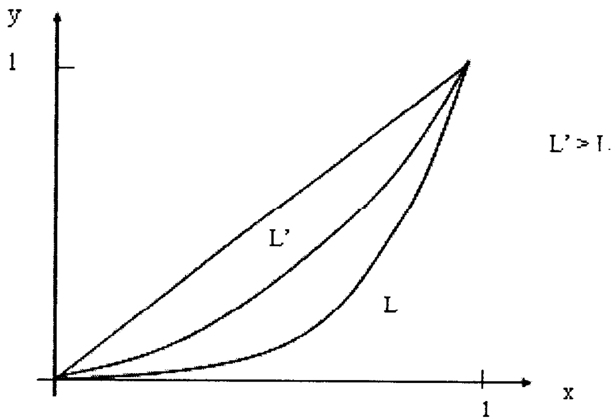
Nótese que en la derivación de la función de la catenaria, la densidad de la cuerda determina el peso por unidad de largo de la misma, dada la fuerza de gravedad. Puesto que la Curva de Lorenz está agrupando un punto porcentual del ingreso con un punto porcentual de la población, la normalización de la densidad de la curva hecha en la derivación, es aplicable para todos los países.

Entonces, el *Ratio de Lorenz* es el único parámetro de la función propuesta que permite aproximar a la Curva de Lorenz, y nosotros poseemos una interpretación propia de este coeficiente la cual puede ser aplicada a las condiciones iniciales consideradas por Banerjee y Newman. Es interesante notar que, si se conoce el largo de la curva, es posible arribar a este resultado, como se presenta en el Apéndice A, para cualquier valor de *la fuerza de ingreso* (gravedad), la cual en el problema de control óptimo aparece explícitamente y no es necesaria para la minimización de la energía potencial de la curva. No obstante, solo podemos saber el largo de la Curva de Lorenz una vez que se obtiene el valor del *Ratio de Lorenz* y éste considera *la fuerza de ingreso.*

El Ratio de Lorenz determina la forma de la Curva de Lorenz y representa la tasa a la cual la tensión poblacional y la fuerza del ingreso están balanceadas para alcanzar el equilibrio en la distribución del ingreso.

La Figura 4, muestra la forma de la Curva de Lorenz para diferentes valores del Ratio de Lorenz. Cuando éste ratio aumenta de L a L' la Curva de Lorenz se mueve hacia la diagonal. Además, si se considera la relación negativa entre el tamaño de la población y la tensión poblacional, si el tamaño de la población disminuye el Ratio de Lorenz aumenta, para el mismo valor de la fuerza de ingreso. Cuando el tamaño del ingreso aumenta, la fuerza del ingreso disminuye puesto que existen más recursos en la economía y las posibilidades de repartir parte de estos recursos a cada individuo en la economía son mayores. No obstante, los otros factores considerados, como la desigualdad del ahorro o la presión ejercida por el proceso de industrialización, tienen una relación positiva con la fuerza del ingreso, y al incrementarse el Ratio de Lorenz disminuye empujando a la Curva de Lorenz lejos de la diagonal.

Figura No. 4



El análisis de la catenaria para la Curva de Lorenz permite la comparación entre dos curvas diferentes usando una medida alternativa, el Ratio de Lorenz, aun cuando las curvas comparadas se crucen. Una vez más esta comparación se realiza sin consideraciones de desigualdad, toda vez que está establecido claramente que principios de desigualdad como el de Dalton no se cumplen cuando dos Curvas de Lorenz se cruzan.

De otro lado, el mismo análisis puede ser efectuado separando las poblaciones rural y urbana o sectores específicos de la economía con el fin de identificar aquellos sectores que requieran de la instrumentación de políticas, dependiendo del valor del Ratio de Lorenz en cada sector. Un menor valor del Ratio de Lorenz provee una primera guía acerca de que sector debería ser atendido con mayor urgencia y las políticas implementadas podrían ser evaluadas ex-post con respecto a su impacto en el Ratio de Lorenz.

Se puede apreciar en la Figura 4, que cuando el Ratio de Lorenz es bajo, la Curva de Lorenz está más lejos de la diagonal y la razón entre la proporción de individuos pobres respecto a la proporción de individuos ricos tiende a incrementarse. Por lo tanto, es posible reescribir las condiciones iniciales en Banerjee y Newman en términos del Ratio de Lorenz como sigue: Si un país inicialmente tiene un bajo Ratio de Lorenz (en lugar de una razón alta entre población muy pobre y población muy rica), aún cuando el ingreso inicial per cápita sea alto, el proceso de desarrollo puede salir de la tendencia creciente y terminar en una situación de bajo empleo. Por el contrario, si la economía tiene un alto Ratio de Lorenz (en lugar de partir con poca población pobre), puede emerger y converger a un estado estacionario con alto salario y alto empleo, esto puede ocurrir aún si el ingreso per capita inicial es bastante bajo.

De manera más general, las condiciones iniciales que se desprenden de la formulación catenaria de la Curva de Lorenz siempre pueden ser expresadas en términos de un solo coeficiente, propio de la estructura de la distribución y equivalente a la razón de individuos pobres respecto de individuos ricos.

Sin embargo, es importante señalar que las condiciones iniciales dadas por el Ratio de Lorenz están afectadas por las dos fuerzas que actúan a través de la estructura de la población y del ingreso. El Ratio de Lorenz podría ser bajo si la tensión poblacional es poca o por causa de una gran fuerza de ingreso; similares Ratios de Lorenz, pueden conducir a diferentes resultados, tal como en el segundo ejemplo presentado por Banerjee y Newman. Por tanto no siempre un alto valor del Ratio de Lorenz puede ser deseable. Pero podemos hacer una distinción entre los diferentes Ratios estimados.

5. Evidencia Empírica

Con el objeto de obtener algunos resultados empíricos se consideraron dos casos. En el primero, la Curva de Lorenz para México fue construida utilizando los datos de población e ingreso del censo realizado en el año 2000, por el Instituto Nacional de Estadística Geográfica e Informática de México, INEGI; y luego se procedió a realizar la estimación de los parámetros correspondientes para aproximar esta distribución. En el segundo caso, las estimaciones se realizaron a partir de las Curvas de Lorenz construidas por Ray (1998) para algunos países seleccionados, las cuales usan la base de datos presentada por Deininger y Squire (1996).

5.1 La Curva de Lorenz para México, año 2000

Los datos de la distribución porcentual de la población mexicana por grupos de ingreso total, usados para la construcción de la Curva de Lorenz para el año 2000, fueron tomados del XII Censo General de Población y Vivienda 2000, Tabulados de la Muestra Censal: Cuestionario Ampliado, publicados por el INEGI.

La Tabla 2, presenta un resumen de la distribución de la población por grupos de ingreso totales. Puesto que existen datos disponibles sobre la distribución de la población por grupos de ingreso para cada entidad federativa dentro de México, fue posible considerar el Salario Mínimo (SM) en cada una de estas entidades a fin de calcular la Curva de Lorenz. Los datos del salario mínimo general por área geográfica están disponibles a febrero del 2000.[13]

Tabla No. 2

Población y su Distribución Porcentual por Grupos de Ingreso Totales Datos Censales para el año 2000

Total D< 0
sm 2SM hasta menos sm hasta 10 SM ms

Total	Sin Ingreso	Menos de un SM	De 1 hasta 2 SM	Más de 2 hasta menos de 3 SM	De 3 hasta 5 SM	Más de 5 hasta 10 SM	Más de 10 SM	No especificado
100.00	5.17	10.89	16.54	14.49	19.78	19.58	11.37	2.18
97,014,867	5,015,669	10,564,919	16,046,259	14,057,454	19,189,541	18,995,511	11,030,590	2,114,924

FUENTE: INEGI.
SM = Salario Mínimo

La Tabla 2 permite considerar de manera directa en el eje de las x a la población ordenada por el tamaño de su ingreso. No obstante, la distribución acumulada de la población fue reescalada dejando de lado el 2.18 por ciento de la población cuyo ingreso no está especificado. Con el objeto de completar la construcción de la Curva de Lorenz se determinó el porcentaje de ingreso correspondiente a cada proporción de la población utilizando el salario promedio del grupo para cada por entidad federativo, el cual fue ordenado en el eje y. De esta forma se obtuvieron seis proporciones acumuladas en el eje vertical del ingreso total ganado por las proporciones correspondientes de población, en el eje horizontal. Estos seis puntos de referencia sirvieron de base para construir dos grillas de datos la primera conformada por cien puntos y la segunda por doscientos puntos.

Una segunda propuesta de la Curva de Lorenz para México fue realizada utilizando de manera directa las proporciones de la población ordenada por el tamaño de su ingreso para cada uno de los quintiles de la población. En este caso se utilizó un valor del salario mínimo promedio de 1,057 pesos mexicanos para obtener la proporción de ingreso acumulada correspondiente a cada una de estas proporciones acumuladas de la población. En base a estos cinco puntos de referencia se estableció una grilla de cien puntos. Con el objeto de diferenciar entre las dos

[13] El promedio del salario mínimo a febrero del año 2000 es 1,057 pesos Mexicanos, y existen solo tres salarios mínimos por área geográfica en México (981, 1,053 y 1,137 pesos Mexicanos).

Curvas de Lorenz presentadas para México, denotaremos a la primera y segunda construcción por LC1 y LC2, respectivamente.

La forma catenaria definida en la ecuación (8) fue utilizada para aproximar a las dos Curvas de Lorenz calculadas para México.

Los resultados encontrados fueron comparados con la forma funcional propuesta por Basmann, que aparece como un buen candidato para este propósito, puesto que ésta es una forma anidada de otros modelos.[14] Como se mencionó, la funcional de Basmann está dada por la siguiente ecuación, sin interpretación económica de los parámetros en ella:

$$(11) \qquad y = x^{x*c_1+c_2} e^{-c_3(1-x)^2-c_4(1-x)^2+\upsilon}$$

La estimación de los tres parámetros (*L*, c_1 y c_2, de la ecuación (8)) de la catenaria y de los parámetros de la función de Basmann fue realizada con un procedimiento de Mínimos Cuadrados No Lineales. Para estas dos formas funcionales, la variable *y* representa el ingreso acumulado ganado por los individuos en cada grupo; de acuerdo a la Tabla 2 la variable *x* representa el porcentaje de la población ordenada por el tamaño de sus ingresos. Estas variables están medidas en el eje vertical y horizontal, respectivamente.

Un primer problema de la utilización de la catenaria, como la forma funcional para aproximar la Curva de Lorenz, se presenta al incluir las ecuaciones (9) y (10) en la ecuación (8), a fin de asegurar que la curva pase por el origen y el punto *(1, 1)*. A partir de estas dos ecuaciones los coeficientes c_1 y c_2, pueden ser expresados en términos del Ratio de Lorenz, L, resultando:

$$(12) \qquad c_1 = \frac{1}{L}\left[-1 + (\ln(\rho))L\right]$$

y,

$$(13) \qquad c_2 = -\frac{L}{2}\left[e^{\frac{-1+(\ln(\rho))L}{L}} + e^{-\frac{-1+(\ln(\rho))L}{L}}\right]$$

---

[14] Ver Basmann et al. (1990).

y donde ρ es la raíz del polinomio:

$$(14) \qquad (Le^{\frac{1}{L}} - L)Z^2 - 2Ze^{\frac{1}{L}} + Le^{\frac{1}{L}} - Le^{\frac{2}{L}} = 0$$

No obstante las ecuaciones (12) y (13), no definen una función de estos coeficientes respecto al parametro L, sino más bien a dos correspondencias, las cuales no pueden ser sustituidas de manera directa en la ecuación (8).

Pero puesto que nuestro objetivo es el establecer alguna evidencia empírica que permita evaluar si la intuición sugerida sobre el comportamiento del Ratio de Lorenz es correcta, y a fin de superar este inconveniente que arroja aproximaciones de la Curva de Lorenz con valores porcentuales del ingreso acumulado negativos para los primeros deciles la población. Se hizo uso de dos alternativas más sencillas. En la primera de ellas, dos coeficientes son estimados, considerando la ecuación:

$$(15) \qquad y = \frac{L}{2}\left[e^{\frac{x}{L}+c} + e^{-\frac{x}{L}-c}\right] - \frac{L}{2}\left[e^{c} + e^{-c}\right]$$

esto es, computando la Curva de Lorenz mediante la estimación de los parámetros *L* y *c* de ésta ecuación.

En la segunda alternativa, los tres parámetros de la función de la catenaria, *L*, c_1 y c_2 de la ecuación (8), son estimados sin considerar las restricciones establecidas por las ecuaciones (9) y (10), que aseguran que la curva pase por los puntos *(0, 0)* y *(1, 1)*.

Adicionalmente, una tercera aproximación de la Curva de Lorenz puede ser considerada para el caso de que la función catenana no sea balanceada, esto es permitiendo una diferencia en los exponentes de la función,[15] en este caso un cuarto parámetro debe ser estimado para la forma funcional dada por:

$$(16) \qquad y = \frac{L}{2}\left[e^{\frac{x}{L}+c} + e^{-\frac{x}{L}-c}\right] + c_3$$

---

15 En la función catenaria no balanceada dada en la ecuación (15) se asume que c_1 es diferente de c_2, para obtener la función balanceada se requiere que $c_1 = c_2$ para arribar a la ecuación (8).

La comparación de la bondad de ajuste de los dos modelos, definidos por la forma funcional de la catenaria en las alternativas mencionadas y el de la funcional propuesta por Basmann, se realizó usando un test de formas no anidadas y considerando una grilla de cien puntos.[16] Pero en ninguno de los casos analizados un modelo aparece como el verdadero modelo cuando es comparado respecto al otro, pese a las deficiencias existentes en las estimaciones en base de la función de la catenaria.

Para el caso en que los tres parámetros de la ecuación (8) son estimados sin restricciones y en razón de que los coeficientes c_1 y c_2 de la catenaria deben satisfacer las condiciones de la Curva de Lorenz dadas por las ecuaciones (9) y (10), se efectuó un test de sobre identificación de restricciones con una grilla de doscientos puntos, para la curva LC1. Los resultados mostraron que la función catenaria en este caso no sobre identifica los parámetros a ningún nivel de significancia. De otro lado se verificó que dentro de los intervalos de confianza construidos para los coeficientes c_1 y c_2 se encuentren los valores para los cuales la curva pase por los puntos *(0,0)* y *(1, 1)* dado el valor del Ratio de Lorenz, verificándose que este valor cae dentro del intervalo construido al 95 por ciento de confianza, esto también para la curva LC1.

Los resultados de la aproximación para las dos Curvas de Lorenz construidas para México son presentados en la Tabla 3 y en la Figura 5, y se refieren básicamente a aquellos establecidos por la estimación de los parámetros sin restricciones sobre ellos. La estimación del valor del Ratio de Lorenz en este caso es 0.543 y de 0.545 para las Curvas de Lorenz LC1 y LC2, respectivamente. El valor para alcanzar casi la línea de 45 grados es 20.

---

[16] Si consideramos la funcional:
$y=x^{mx+p}\{qo*exp[c3(1-x)^2+c4(1-x)+v)]+q1*exp[-c3(1-x)^2-c4(1-x)+\upsilon u]\}+c2+\mu$,
ambos modelos están anidados.
Para $qo=0$, $q1=1$ y $d=0$, se tiene la función de Basmann; y para $qo=q1=a/(2x^{mx+p})$ y $c3(1-x)^2+c4(1-x)=x/a+c$, donde $a=L$ y $c=c1$, la función catenaria. No obstante, el análisis considera que ambos modelos son formas no anidadas.

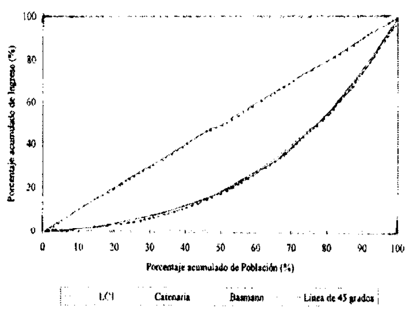
Tabla No. 3

Resultados de la estimación de los parámetros

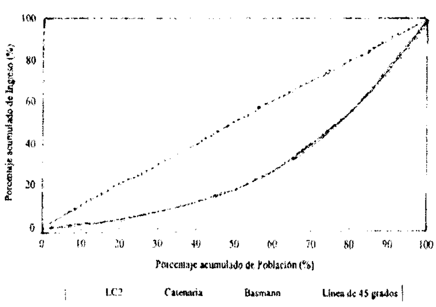
	Estimación LC1		Estimación LC2	
	Catenaria	Basmann	Catenaria	Basmann
C(1)	0.543151	17.03634	0.544631	4.266653
	(0.006276)	(1.184396)	(0.005384)	(0.517070)
C(2)	-0.163322	4.889339	-0.147936	1.563166
	(0.012699)	(0.194185)	(0.010861)	(0.062133)
C(3)	-0.525411	8.423865	-0.524247	3.055680
	(0.007995)	(0.717469)	(0.006937)	(0.369858)
C(4)		-19.37645		-3.331590
		(1.433709)		(0.619816)
R-cuadrado	0.998348	0.999234	0.998821	0.999424
Suma resid. Cuadrados	0.013086	0.133778	0.009682	0.114095

Figura No. 5

Curva de Lorenz para México LC1, año 2000



Curva de Lorenz para México LC2, año 2000



Como se mencionó, la Tabla 3 presenta las estimaciones de los coeficientes para los dos modelos que se comparan. Para la catenaria C(1) es el *Ratio de Lorenz;* y, C(2) y C(3) son iguales a las constantes c_1 y c_2 de la ecuación (8), respectivamente; mientras que para la funcional de Basmann, los coeficientes se refieren exactamente a aquellos expresados en la ecuación (11). Varios hechos pueden ser resaltados. Para los dos casos de la Curva de Lorenz presentados para México, los resultados son similares. Aunque el R cuadrado es ligeramente inferior para la forma catenaria de la Curva de Lorenz, menos coeficientes son estimados, todos los parámetros son estadísticamente significativos y presentan menores desviaciones estándar, presentadas en paréntesis, comparados con los coeficientes estimados para Basmann.

Por tanto, de las estimaciones realizadas con la forma funcional de la catenaria, se puede establecer que ésta no cumple con las condiciones a), b), d) de la Curva de Lorenz que se presentaron en la Sección 4.2.

5.2 Aproximaciones de la Curva de Lorenz para países seleccionados

Volviendo atrás a la Tabla 1, el Reino Unido tiene un PNB tan solo 16 por ciento más grande que Brasil. Pero la población de Brasil es casi 3 veces la población en el Reino Unido, entonces esperamos que el Ratio de Lorenz será mayor en el Reino Unido que en Brasil, principalmente a causa de la tensión poblacional. Con el objeto de hacer éste tipo de comparaciones y dada la limitación en los datos, se realizaron estimaciones del Ratio de Lorenz para seis países usando las Curvas de Lorenz construidas por Ray (1998) para países seleccionados para el año de 1993, las cuales usan la base de datos presentada por Deininger y Squire (1996). Considerando las Curvas de Lorenz presentadas por Ray, se utilizó una grilla de cien puntos para cada una de las estimaciones.

En las Tablas 4 y 5, la estimación del Ratio de Lorenz para Brasil, Estados Unidos, Kenia, India, México y el Reino Unido es presentada considerando la forma funcional de la Curva de Lorenz, estos resultados se refieren a las estimaciones de este ratio a partir de las ecuaciones (15) y (8), respectivamente.

Tabla No. 4

Ratio de Lorenz para países selecionados, Ecuación (15)

	Brasil	**Estados Unidos**	**India**	**Kenia**	**México**	**Reino Unido**
Ratio de Lorenz	0.4860	0.6699	0.8949	0.5347	0.5390	0.8247
	(0.0131)	(0.0069)	(0.0174)	(0.0155)	(0.0133)	(0.0134)
R-cuadrado	0.9666	0.9980	0.9960	0.9690	0.9790	0.9967
Basmann: R-cuadrado	0.9985	0.9993	0.9996	0.9980	0.9985	0.9996

Tabla No. 5

Ratio de Lorenz para países selecionados, Ecuación (8)

	Brasil	Estados Unidos	India	Kenia	México	Reino Unido
Ratio de Lorenz	0.4086	0.6281	0.8043	0.4503	0.4626	0.7491
	(0.0118)	(0.0080)	(0.0191)	(0.0145)	(0.0128)	(0.0146)
R-cuadrado	0.9777	0.9986	0.9969	0.9783	0.9852	0.9976
Basmann:						
R-cuadrado	0.9985	0.9993	0.9996	0.9980	0.9985	0.9996

Es importante notar que cualquiera de las dos aproximaciones realizadas ordena el Ratio de Lorenz de estos países de la misma manera, aunque con una salvedad, la aproximación de la Curva de Lorenz bajo estas dos alternativas no asegura que la curva pase por el origen y el punto $(1,1)$. En la primera parte del Apéndice C, las figuras comparando la estimación realizada a partir de la forma catenaria de la Curva de Lorenz, representada por la ecuación (15), y la forma funcional de Basmann para los países seleccionados es presentada. Mientras que en la Parte II de este apéndice, se utiliza la ecuación (8) para realizar esta comparación.

Un inconveniente adicional de las estimaciones presentadas en la Tabla 4 considerando la ecuación (15) y las figuras de la Parte I del Apéndice C, es que los valores del porcentaje de ingreso en los países que presentan una Curva de Lorenz alejada de la diagonal (Brasil, Kenia y México) tienden a ser negativos para los primeros deciles de la población y las estimaciones para estos países realizada en base a la ecuación (15) y la ecuación (8) del coeficiente c_l, arrojan un signo contrario al esperado para cumplir con la condición funcional de la Curva de Lorenz de que el valor de este coeficiente sea positivo y la función sea no decreciente.

No obstante, como se esperaba Brasil tiene un Ratio de Lorenz menor que el del Reino Unido. El Ratio de Lorenz de la India, un país con gran población, es el mayor de los ratios, y el menor de ellos está dado para Brasil, otro país con una población de gran tamaño. Aunque los datos difieren en sus fuentes, México parece presentar en el año 2000 un Ratio de Lorenz más grande, esté país había presentado una desigualdad creciente entre los años 1984 y 1994 como se señala en el World Development Report 2000/2001 del Banco Mundial.

Dada la estimación del Ratio de Lorenz presentada en la Tabla 5, usamos el PNB per capita como una variable proxy de la fuerza de ingreso, para obtener un aproximación de la tensión poblacional existente en estos países para el año de 1993. Este cálculo de la tensión poblacional se presenta en la Tabla 6.

Tabla No. 6

Cálculo de la Tensión Poblacional para países seleccionados

	Ratio de Lorenz	PNB per capita en PPC 1993	Tensión Poblacional
India	0.8043	1,120.0	981.2
Reino Unido	0.7491	17,210.0	12,892.0
Estados Unidos	0.6281	24,740.0	15,539.2
México	0.4626	6,810.0	3,150.3
Kenia	0.4503	1,310.0	589.9
Brasil	0.4086	5,370.0	2,194.2

Estados Unidos tiene la tensión poblacional más alta contraria a la más baja presentada para Kenia. Y la tensión poblacional del Reino Unido es mayor que la de Brasil de acuerdo a lo esperado. El caso de la India es interesante, aunque el Ratio de Lorenz Ratio es el mayor entre los países seleccionados este tiene una baja tensión poblacional. Aunque el Ratio de Lorenz indique que la Curva de Lorenz está cerca de la diagonal hay que recordar que esto se debe a que todos son igualmente pobres en un país como la India. Un valor alto de la tensión poblacional es por tanto siempre preferible a un valor bajo de la misma.

Finalmente, es importante resaltar que una mayor bondad de ajuste puede ser encontrada considerando una catenaria no balanceada en lugar de la balanceada. En la Parte II del Apéndice C, la aproximación de la forma no balanceada para Brasil, Kenia y México se compara con la aproximación de la funcional de Basmann. No obstante, la estimación de los parámetros difiere y no permite una comparación directa como la realizada en la Tabla 6, puesto que distintos pesos están asociados a los exponentes de la catenaria. La estimación del coeficiente de L es en este caso 0.2158, 0.2420 y 0.2608, para Brasil, Kenia y México, respectivamente. Y entonces, no se puede realizar una interpretación del Ratio de Lorenz de la misma manera que la efectuada anteriormente, aunque el orden de los coeficientes se mantenga entre éstos países.

6. Conclusiones

En la Teoría Económica con frecuencia se resume una determinada distribución personal del ingreso ya sea utilizando la Curva de Lorenz o por medio de medidas de desigualdad, que pueden ser calculadas directamente de los datos de población e ingreso o a partir de esta curva. No obstante razones similares (como la proporción de ingreso en manos de cierta porción de individuos ricos respecto a la proporción del ingreso en manos de cierta porción de individuos pobres) tomadas como condiciones iniciales de una economía pueden conducir a senderos distintos de desarrollo y por tanto a diferentes equilibrios.

Las distintas formas funcionales propuestas para aproximar la Curva de Lorenz, en general carecen de una interpretación propia, de la forma funcional misma o de los parámetros que se estiman en ella y por tanto no permiten explicar, a partir de la estructura de la distribución del ingreso, el por qué similares condiciones iniciales de una economía pueden conducir a resultados distintos.

El análisis presentado busca proporcionar alguna interpretación económica a la forma funcional que se propone, a través de la adaptación del problema en Física de la catenaria a la economía. El establecimiento de esta forma funcional dotada de interpretación económica permite entonces, obtener una representación alternativa de las condiciones que prevalecen en un determinado momento del tiempo en la distribución del ingreso, proporcionando una idea del por qué de las discrepancias entre puntos de partida similares y distintos equilibrios.

La determinación de las fuerzas que actúan a través de la estructura de la población y del ingreso, de igual manera que lo propuesto por Kuznets, son usadas dentro del análisis de la catenaria para establecer una forma funcional que aproxime la Curva de Lorenz.

Con el objeto de hacer aplicable el análisis de la catenaria, se estableció que una *fuerza de ingreso*, equivalente a la fuerza de gravedad que empuja a la distribución del ingreso hacia abajo puede ser encontrada dentro de la Literatura Económica, y se consideró que existe una *tensión poblacional* que actúa en dirección horizontal a fin de balancear a *la fuerza de ingreso* para alcanzar el equilibrio de la distribución.

En base a este método la forma funcional de la catenaria para la Curva de Lorenz, permite representar las condiciones iniciales derivadas de la distribución del ingreso con una nueva herramienta y una interpretación adicional. Puesto que sobre cualquier recurso se genera una tensión mayor a medida que éste es más escaso, la tensión generada sobre la población junto con la fuerza de ingreso que empuja a la distribución hacia abajo, son las responsables de la forma de equilibrio en la Curva de Lorenz. Más aún, en la forma catenaria el Ratio de Lorenz, dado por la tensión poblacional sobre la fuerza de ingreso, es el parámetro que determina la forma de la curva.

El Ratio de Lorenz es usado para expresar las condiciones iniciales de la distribución del ingreso en forma equivalente al Ratio de Kuznets y una interpretación económica puede ser considerada para los parámetros en la forma catenaria de la Curva de Lorenz, que permiten identificar por que ratios similares conducen a distintos equilibrios. Las condiciones iniciales dadas por el Ratio de Lorenz están afectadas por las dos fuerzas que actúan a través de la estructura de la población y del ingreso. El Ratio de Lorenz podría ser bajo si la tensión poblacional es poca o por causa de una gran fuerza de ingreso; similares Ratios de Lorenz, pueden conducir a diferentes resultados. Y por tanto no siempre un alto valor del Ratio de Lorenz puede ser deseable, pero es posible hacer una distinción entre los diferentes Ratios estimados.

Existen algunas falencias en la estimación de los parámetros de la catenaria para el caso de México y para los países seleccionados, que muestran que ésta no funciona como otras formas funcionales consideradas en la literatura, principalmente porque es superada en el hecho de no alcanzar el origen y el punto (1, 1) o en el cumplimiento de otras de las condiciones funcionales aceptadas para la Curva de Lorenz.

Pese a estos inconvenientes, los valores del Ratio de Lorenz estimados al aproximar distintas Curvas de Lorenz, pueden ser ordenados de acuerdo a la intuición sugerida. El mismo análisis puede ser fácilmente extendido para conocer la tensión poblacional en diferentes sectores de la economía y ser usada para identificar que sector requiere de manera prioritaria la implantación de políticas de acuerdo con el valor del Ratio de Lorenz y al valor de la tensión poblacional que puede calcularse a partir de éste considerando al ingreso per capita como una variable proxy de la fuerza del ingreso.

Otras extensiones requieren hacer consideraciones adicionales, la primera de estas se refiere a tratar de superar los problemas de estimación que la catenaria tradicional presenta, ya sea mediante la utilización de una catenaria no balanceada, que proporciona un mejor ajuste, pero sobre la cual no es posible realizar las mismas comparaciones que pueden ser hechas a partir de la estimación del Ratio de Lorenz de la catenaria balanceada.

Se mencionó también que existen otros casos interesantes, como el de considerar una fuerza actuando en forma de una gravedad horizontal, o el caso en el cual las dos gravedades vertical y horizontal (fuerzas de población e ingreso) estén operando al mismo tiempo. Pero estos casos no proveen una forma funcional sencilla.

Finalmente, puesto que pocas consideraciones sobre medidas de desigualdad han sido realizadas, se propone para un trabajo posterior analizar las relaciones entre la tensión poblacional, la fuerza de ingreso y la extensa literatura en este campo.

Apéndice A: Derivación de la Función de Catenaria en un Problema de Control Óptimo

El objetivo de este apéndice es el de presentar el problema de control óptimo relacionado a la derivación de la función catenaria y establecer que en el caso de conocer la longitud de la cuerda, no importa cual sea el valor supuesto para la fuerza de gravedad (la fuerza de ingreso en nuestro análisis). En este caso la forma de la catenaria minimiza la energía potencial que actúa sobre la curva.

Considere como en la Figura 1, que la curva pasa por los puntos *(0,0)* y *(1,1)*. Además, suponga que el largo de la cuerda está dado por *C*. Puesto que la forma de equilibrio debe ser tal que la fuerza potencial que actúe sobre la curva sea mínima, se minimiza la siguiente funcional:

$$J = mg \int_0^1 y ds = mg \int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

donde, nuevamente *m ds,* es la masa del elemento del arco *ds,* y *g* es la fuerza de gravedad. Y la función *y* está sujeta a la siguiente restricción:

$$C = \int_0^1 ds = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Entonces, para cualquier valor de *mg,* se puede formar la función *H*, y entonces resolver la ecuación de Euler-Lagrange del problema de control óptimo.

$$H(y,y',x) = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

La ecuación de Euler-Lagrange está dada por:

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = k$$

y la solución de esta ecuación diferencial es:

$$y+\lambda = k\cosh\frac{x+h}{k} = \frac{k}{2}\left[e^{\frac{x+h}{k}} + e^{-\frac{x+h}{k}}\right]$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación (8), tenemos que: $L=k$, $c_1=h/k$; y, $c_2=-\lambda$.

Apéndice B: Las Propiedades Funcionales de la Curva de Lorenz

Como se mencionó, la Curva de Lorenz puede ser representada por una función $y = f(x)$ que satisface cuatro condiciones, a continuación se expone el cumplimiento de cada una de ellas por parte de la forma funcional de la catenaria representada en la ecuación (8).

Condiciones a) $f(0) = 0$; y, b) $f(1) = 1$

Los valores de las constantes c_1 y c_2, de la ecuación (8), pueden elegirse de tal forma que la función de la catenaria pase por los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. Esto implica que la elección de estos dos parámetros debe realizarse de manera que las siguientes ecuaciones se cumplan:

$$c_2 = -\frac{L}{2}\left[e^{+c_1} + e^{-c_1}\right]$$

y,

$$1 - c_2 = \frac{L}{2}\left[e^{\frac{1}{L}+c_1} + e^{-\frac{1}{L}-c_1}\right]$$

Condición c) $f(x) < x$

Esta condición se cumple de manera trivial, puesto que la función definida por la catenaria siempre cae bajo la línea que une los dos puntos de los cuales la cuerda se encuentra suspendida.

Condición d) $f'(x) \geq 0$; y, *$f''(x) \geq 0$* para $0 < x < 1$

Con el objeto de verificar el cumplimiento de esta condición, tomamos la derivada de y respecto a x en la ecuación (8) la cual debe ser mayor igual a cero, por lo tanto tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{L}+c_1} - e^{-\frac{x}{L}-c_1}\right] \geq 0$$

Entonces la función definida por la catenaria es no decreciente si:

$$e^{\frac{x}{L}+c_1} \geq e^{-\frac{x}{L}-c_1}$$

esta desigualdad se cumple solo si $(x/L)+c_1 > 0$; puesto que x puede tomar valores solo en el intervalo (0,1), en los puntos extremos de este intervalo tenemos que $0 < -L^* c_1$, y que $1 < -L^* c_1$. De aquí se establece que es condición suficiente para el cumplimiento de esta desigualdad que ésta se satisfaga solo en el extremo superior del dominio de la función, de tal forma que:

$$\frac{1}{L} \leq c_1$$

es la condición suficiente para que la función definida por la catenaria sea no decreciente, $f(x0)$.

Ahora al considerar la ecuación (7):

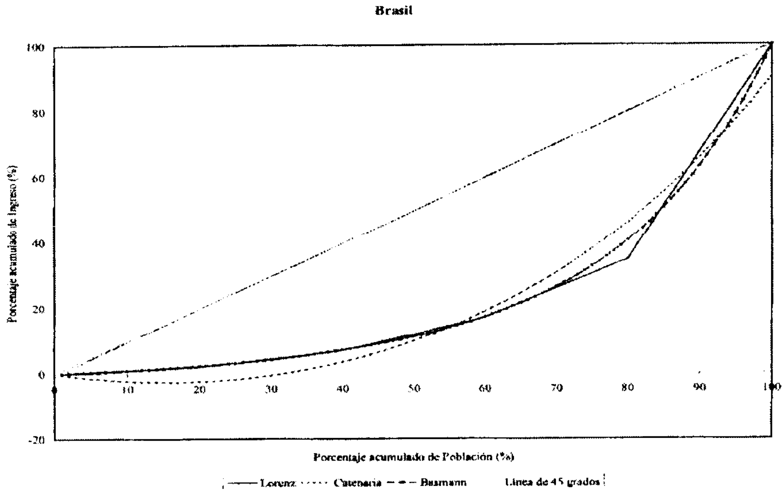
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{L}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

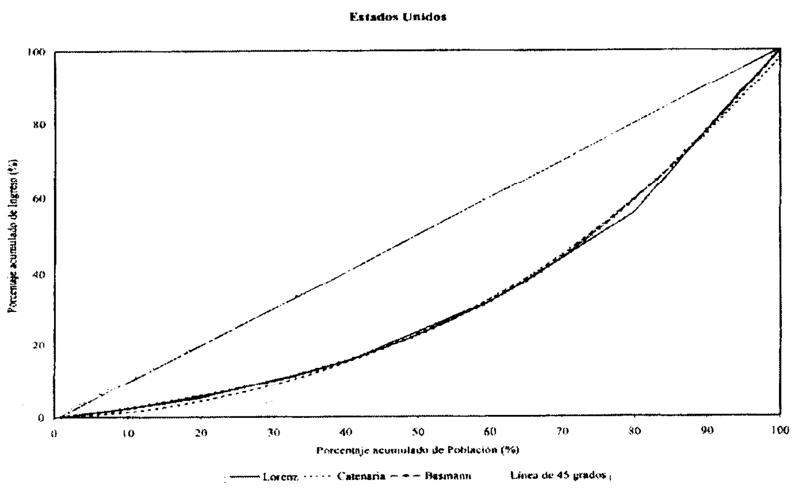
se puede ver que la condición suficiente para que $f'(x) \geq 0$,

garantiza también que $f''(x) \geq 0$.

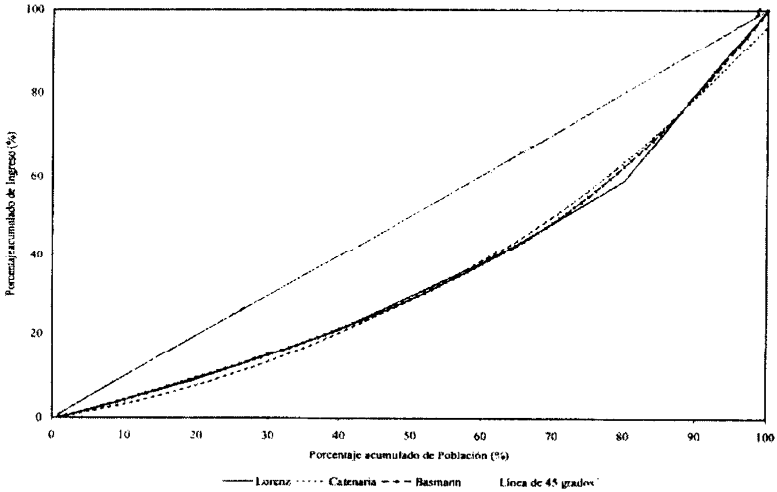
Apéndice C: Figuras

Parte I. Comparación de la Catenaria Balanceada para países seleccionados, Ecuación (15), con la Forma Funcional de Basmann

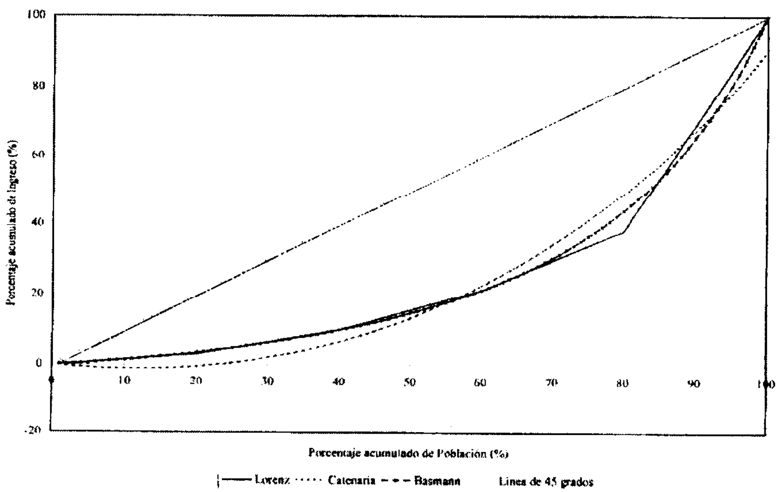




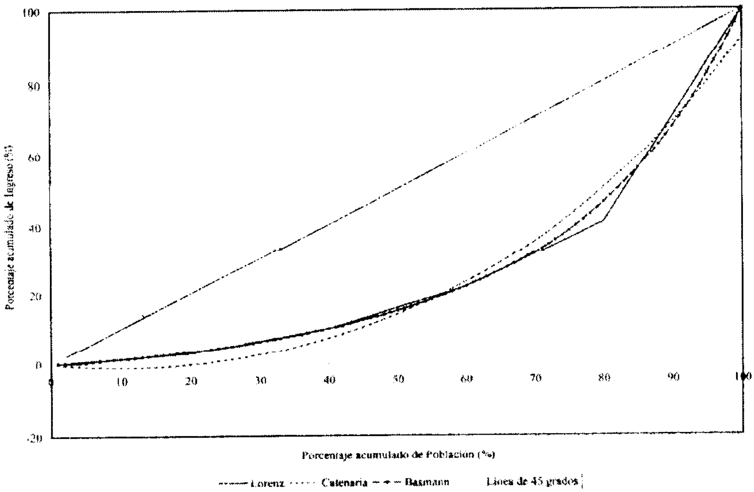
India


100
80
60
40
20
0
Porcentajeacumulado de Ingreso (%)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Porcentaje acumulado de Población (%)
Lorenz
Catenaria
Basmann
Línea de 45 grados

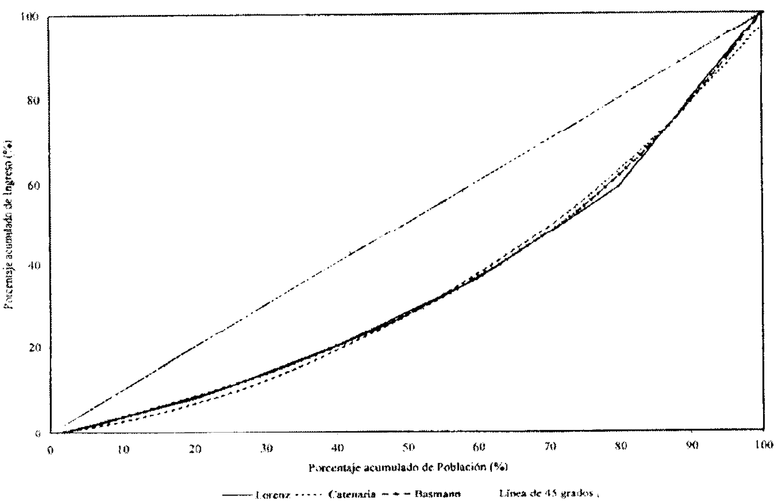
Kenia


100
80
60
40
20
0
-20
Porcentaje acumulado de Ingreso (%)
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Porcentaje acumulado de Población (%)
Lorenz
Catenaria
Basmann
Línea de 45 grados

México

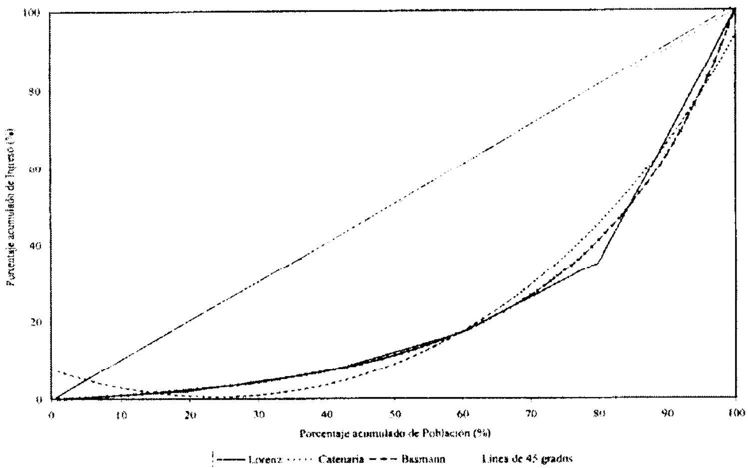


Reino Unido

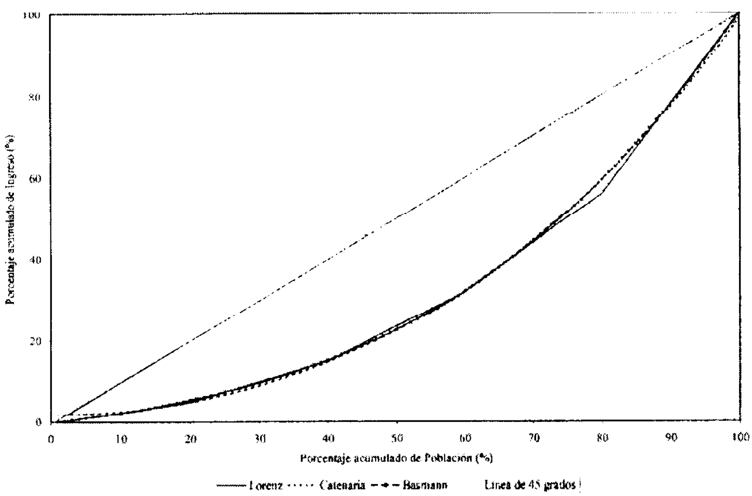


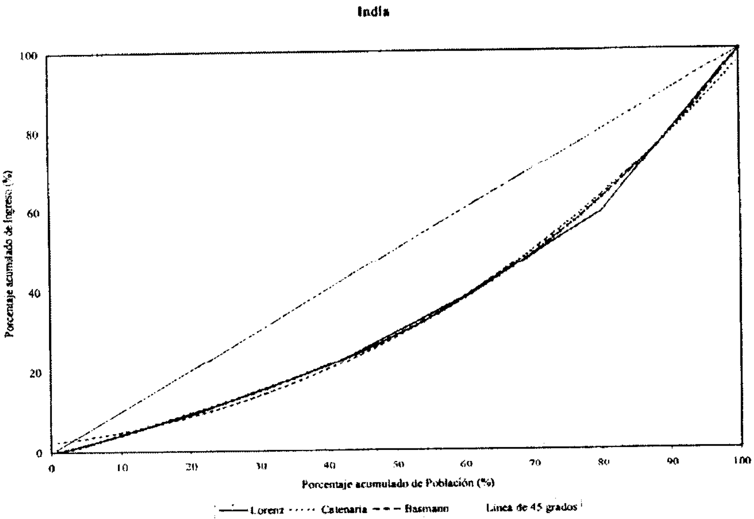
Parte II. Comparación de la Catenaria Balanceada para países seleccionados, Ecuación (8), con la Forma Funcional de Basmann.

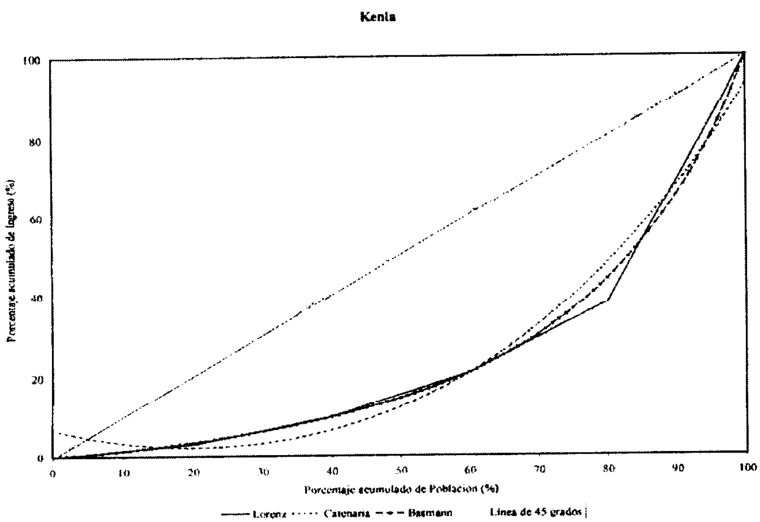
Brasil



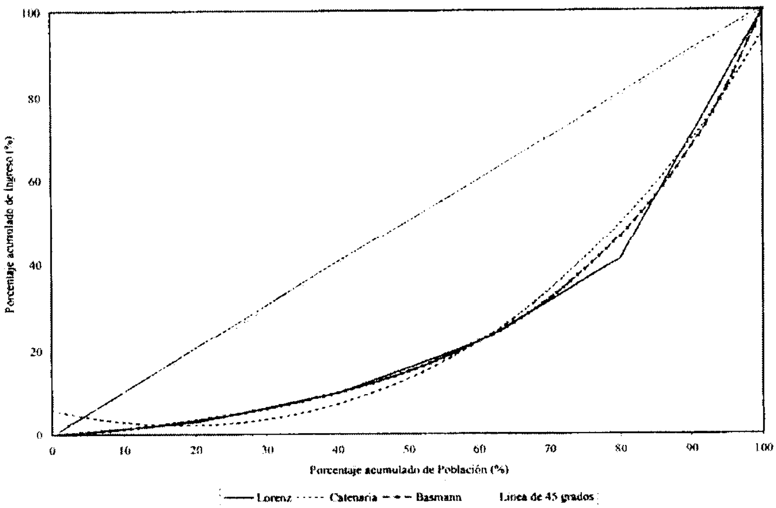
Estados Unidos



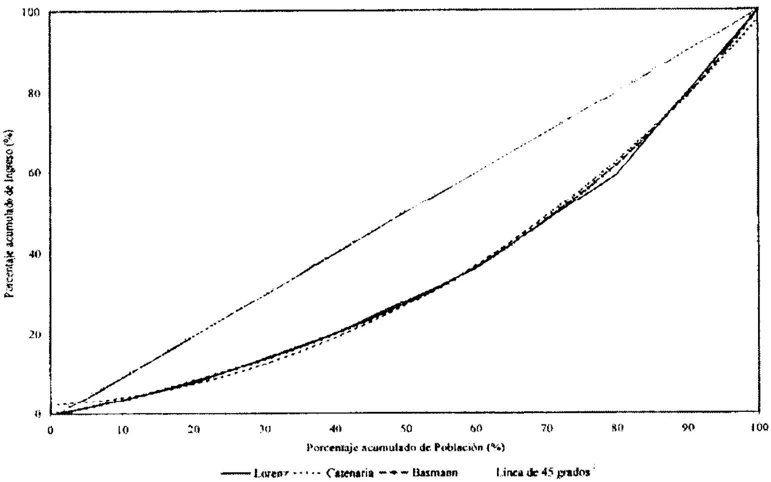

India
Porcentaje acumulado de Ingreso (%)
0
20
40
60
80
100
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Porcentaje acumulado de Población (%)
Lorenz
Catenaria
Basmann
Línea de 45 grados


Kenia
Porcentaje acumulado de Ingreso (%)
0
20
40
60
80
100
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Porcentaje acumulado de Población (%)
Lorenz
Catenaria
Basmann
Línea de 45 grados

México

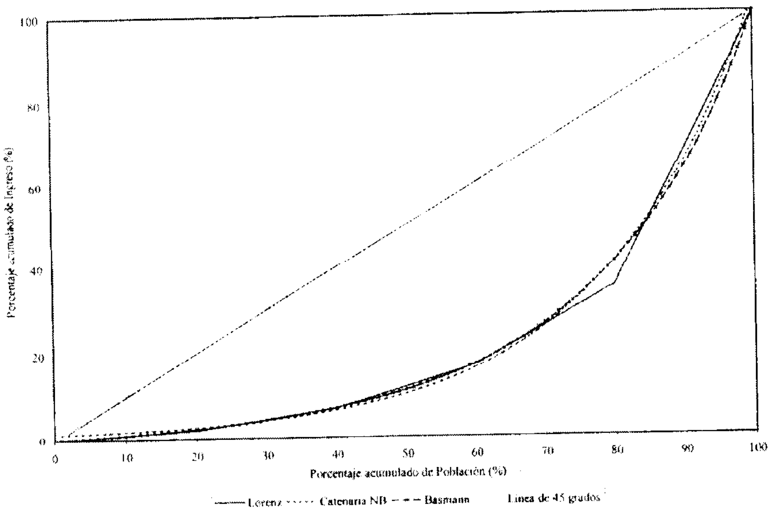


Reino Unido

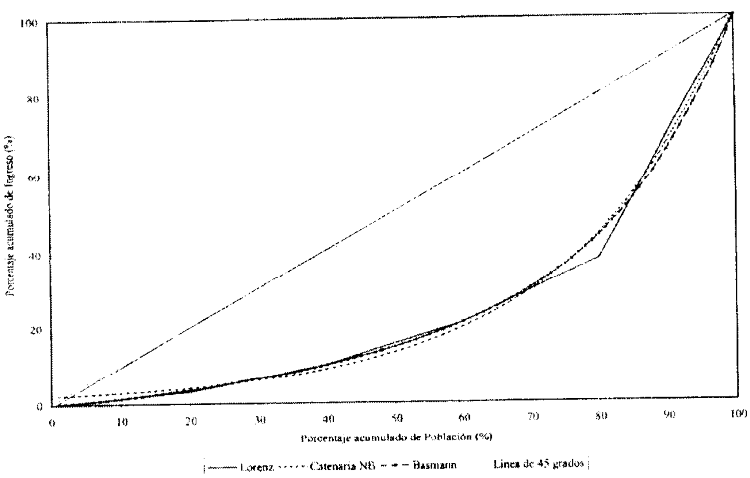


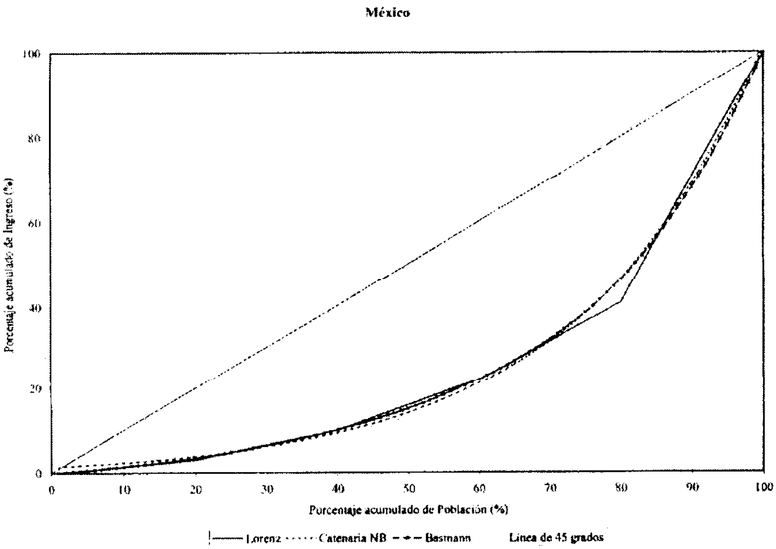
Parte III. Comparación de la Catenaria no Balanceada para Brasil. Kenia y México con la Forma Funcional de Basmann.

Brasil



Kenia




México
100
80
60
40
20
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Porcentaje acumulado de Ingreso (%)
Porcentaje acumulado de Población (%)
Lorenz
Catenaria NB
Basmann
Línea de 45 grados

Bibliografía

Ahluwalia, M.S., (1976), "Income Distribution and Development: Some Stylized Facts", *The American Economic Review*, 66, 128-135.

Banco Mundial, (2000), *World Development Report 2000/2001: Attacking Poverty*.

Banerjee, A.C., and Newman, A.C., (1993), "Occupational Choice and the Process of Development", *Journal of Political Economy*, 101, 274-298.

Basmann, R.L., Hayes, K.J., Slottje, D.J. and Johnson, J.D. (1990), "A General Functional Form for Approximating The Lorenz Curve", *Journal of Econometrics*, 43, 77-90.

Butkov, E. (1968), *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Co.

Chiang, A.C., (1992), *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, Inc.

Cullison, W., E., (1975), "An Employment Preassure Indes as an Alternative Measure of labor Market Conditions", *The Review of Economics and Statistics*, 57(1), 115-121.

Deininger, K., y Squire, L., (1996), "A New Data Set measuring Income Inequality", *World Bank Economic Review*, 3, 183-210.

Fields, G., y Jakubson, G., (1994), "New Evidence on the Kuznets Curve", Mimegraph, Departament of Economics, Cornell University.

INEGI, XII Censo General de Población y vivienda 2000, *Tabulados de la Muestra Censal: Cuestionario Ampliado*.

Kakwani, N., and Podder N., (1973), "On the Estimation of the Lorenz Curve from Grouped Observation", *International Economic Review*, 57(1), 115-121.

Kakwani, N., and Podder N., (1976), "Efficient Estimation of the Lorenz Curve and Associated Inequality Measures from Grouped Observations", *Econometrica*, 44, 137-178.

Kuznets, S., (1955), "Economic Growth and Income Inequality", *The American Economic Review*, 45(1), 1-28.

Lindert, P., H., y Williamson, J., G., (1985), "Growth, Equality, and History", *Exploration in Economic History*, 22, 341-377.

Murphy, K., Shleifer, A., and Vishny, R., (1989), "Income Distribution, Market Size, and Industrialization", *Quarterly Journal of Economics*, 104, 537-564.

Naciones Unidas, (2001), *World Population Prospects: the 2000 Revision.*

Ogwang, T., and Rao, U.,L., (2000), "Hybrid Models of the Lorenz Curve", *Economics Letters*; 69(1), 39-44.

Rasche, R., Gaffney, J., Koo, A., and Obst, N., (1980), "Functional Forms for Estimating the Lorenz Curve", *Econometrica*, 48, 1061-1062.

Ray, D., (1998), *Development Economics*, Princeton University Press.

Samuelson, P., (1965), "A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule", *The American Economic Review*, 55, 486-496.

Socolnikoff, I., and Socolnikoff, E. (1941), *Higher Mathematics for Engineers and Physicists*, McGraw-Hill, N.Y.