Uniciencia Vol. 36(1), pp. 1-16, January-December, 2022
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

Alfabetización y pensamiento probabilístico en docentes de matemática, en formación inicial y en activo

Literacy and probabilistic thinking in pre-service and in service mathematics teachers

Alfabetização e pensamento probabilístico em professores de matemática em formação inicial e ativos

Francisco Rodríguez-Alveal[1], **Danilo Díaz-Levicoy**[2], **Maitere Aguerrea**[2]

Received: Jun/9/2021 • Accepted: Nov/14/2021 • Published: Feb/14/2022

Resumen

El objetivo del presente artículo es caracterizar las habilidades de alfabetización y pensamiento probabilístico que las personas docentes de matemática, en formación inicial y en activo, utilizan cuando se enfrentan a problemas reales, donde interviene la incertidumbre. Para tal efecto, se siguió una metodología cualitativa, mediante un diseño de estudio de casos y el método de análisis de contenido. Como técnica para obtener información, se aplicó un instrumento de dos situaciones problemas en las cuales se solicitó respuesta a preguntas abiertas. Se realizó la selección de 55 participantes mediante un muestreo del tipo intencionado o por disposición, de los cuales 26 eran docentes en activo y 29 docentes en formación inicial. Entre los principales resultados se destacan que las personas docentes del estudio, tanto en formación inicial como en activo, no han desarrollado una competencia probabilística que transite por lo intuitivo, lo clásico y lo frecuencial, recurriendo esencialmente al significado clásico de probabilidad. Además, se evidencia un escaso desarrollo de ideas conceptuales y argumentativas que permitan comparar resultados empíricos y teóricos. En conclusión, se observa que las personas docentes seleccionadas, en formación inicial y en activo, no han desarrollado habilidades de alfabetización y pensamiento probabilístico, que posibiliten una enseñanza de la probabilidad que vaya más allá de lo algorítmico, promoviendo ambientes de aprendizaje para la alfabetización probabilística de los estudiantes en la etapa escolar.

Palabras clave: Alfabetización Probabilística; Pensamiento Probabilístico, Juegos probabilísticos.

Abstract

The objective of this study is to characterize the literacy and probabilistic thinking skills that trainee and currently active mathematics teachers use when faced with real-world problems, in which uncertainty plays a role. A qualitative methodology was used, applying a case study design and the content analysis method.

Francisco Rodríguez-Alveal, frodriguez@ubiobio.cl, https://orcid.org/0000-0003-2169-0541
Danilo Díaz-Levicoy, ddiazl@ucm.cl, https://orcid.org/0000-0001-8371-7899
Maitere Aguerrea, maguerrea@ucm.cl, https://orcid.org/0000-0002-7513-982X
1 Departamento Ciencias de la Educación, Facultad de Educación y Humanidades, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile.
2 Departamento de Matemática, Física y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile.

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

As a technique to obtain information, an open-question instrument was prepared based on two problem situations, which the participants were asked to complete. The 55 participants were selected through intentional or disposition sampling, 26 of whom were actively teaching, and 29 of whom were trainee teachers. Among the main results, it is worth noting that all teachers that participated in the study, both active and trainees, have not developed probabilistic skills that allow them to consider problems from the intuitive, classical and frequency perspectives, essentially resorting to the classical meaning of probability. In addition, there is little evidence of the development of conceptual and argumentative skills that allow comparing empirical and theoretical results. In conclusion, it was observed that both active and trainee teachers have not developed literacy skills and probabilistic thinking which would allow a way of teaching probability that goes beyond the purely algorithmic, promoting learning environments for the probabilistic literacy of students during their school years.

Keywords: Probabilistic literacy; probabilistic thinking, probabilistic games.

Resumo

O objetivo deste artigo é caracterizar as habilidades de alfabetização e pensamento probabilístico que os professores de matemática, na formação inicial e ativos, utilizam diante de problemas reais, onde a incerteza intervém. Para isso, seguiu-se uma metodologia qualitativa, por meio de desenho de estudo de caso e método de análise de conteúdo. Como técnica de obtenção de informações, foi aplicado um instrumento de duas situações problemáticas em que foram solicitadas respostas a perguntas abertas. A seleção de 55 participantes foi feita por meio de amostragem do tipo intencional ou por disposição, dos quais 26 eram professores ativos e 29 professores em formação inicial. Entre os principais resultados estão que os professores do estudo, tanto na formação inicial quanto ativos, não desenvolveram uma competência probabilística que passa pelo intuitivo, pelo clássico e pela frequência, recorrendo essencialmente ao significado clássico da probabilidade. Além disso, há pouco desenvolvimento de ideias conceituais e argumentativas que permitem comparar resultados empíricos e teóricos. Em conclusão, observa-se que os professores selecionados, na formação inicial e ativos, não desenvolveram habilidades de alfabetização e pensamento probabilístico que possibilitem um ensino de probabilidade que vá além do algorítmico, promovendo ambientes de aprendizagem para a alfabetização probabilística dos alunos na etapa escolar.

Palavras-chave: alfabetização probabilística; pensamento probabilístico, jogos probabilísticos.

Introducción

El saber probabilístico tiene asociado una serie de ideas cardinales, como el de aleatoriedad, el cual es un concepto polisémico que aún se resiste a una definición (Serrano y Batanero, 1995). Al respecto, el *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (Franklin *et al*., 2007) menciona que "La probabilidad es un componente importante de cualquier formación matemática. [...]La probabilidad es una herramienta esencial en matemáticas aplicada y en modelación matemática. Es también una herramienta esencial en estadística" (p. 8). Asimismo, juega un papel importante, como señalan del Pino y Estrella (2012), en las situaciones de incerteza que deben enfrentar diariamente los ciudadanos. Ejemplo de esto, las predicciones meteorológicas, los

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

juegos de azar y, actualmente, producto del COVID-19, las posibilidades de contagio al interactuar con otras personas. Es decir, "la probabilidad es un intento de cuantificar la incertidumbre" (Franklin *et al*., 2007, p. 88), conocimiento que, como mencionan Azcárate y Cardeñoso (2011), no puede ser comprendido aislado de su contexto de aplicación ni utilizado únicamente en problemas abstractos que no se encuentran en la vida real.

No obstante, pese a la relevancia que ha adquirido la probabilidad en la formación de los futuros ciudadanos y las orientaciones de los estudios realizados para la enseñanza de la estadística y la probabilidad, investigaciones han evidenciado que la población estudiantil muestra dificultades para aprender los conceptos afines a la probabilidad, así como los profesores y las profesoras del sistema escolar para enseñarla (Koparan y Kaleli-Yılmaz, 2015). Por lo que existe gran interés por el tratamiento de la probabilidad en los distintos niveles educativos (Ortiz, Batanero y Contreras, 2012), focalizando la atención en su enseñanza en el sistema escolar, lo que continúa siendo un tema no resuelto y necesario de abordar.

En Chile, con el objetivo de evaluar los conocimientos pedagógicos, didácticos y disciplinarios que las personas docentes de matemática en formación inicial han logrado durante su itinerario formativo, se les aplica, desde el año 2016, la Evaluación Nacional Diagnóstica (END) como requerimiento previo a la graduación. Los resultados de estas evaluaciones son descendidos en lo relacionado con el conocimiento disciplinar del eje de Datos y Azar (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2019; Rodríguez-Alveal y Díaz-Levicoy, 2021), evidenciando que los egresados no han logrado adquirir todos los conocimientos y habilidades afines al concepto de probabilidad durante su formación inicial. Al respecto, los estudios también revelan dificultades en el reconocimiento de conceptos y procedimientos, así como en la identificación y análisis de argumentos erróneos, encontrando conflictos al reconocer demostraciones válidas, significando una falencia para la interpretación del pensamiento del alumnado y un obstáculo para los procesos de retroalimentación (TEDS-M, 2013). Lo anterior, en coherencia con la relevancia del rol de la probabilidad en la formación de docentes.

Frente a este escenario, resulta necesario poner atención a las habilidades de alfabetización y de pensamiento probabilístico que las personas docentes, en formación inicial y en activo, han desarrollado, entendiéndolas como la adquisición de un conjunto de ideas y un lenguaje probabilístico, que permiten dar un juicio crítico y tomar decisiones en contextos de la vida real, así como también el reconocimiento y comprensión global de los procesos probabilísticos involucrados (Estrella, 2017).

En este sentido, para atender la necesidad de una enseñanza y un aprendizaje de la probabilidad más significativa, Alsina (2019) propone el uso de secuencias de enseñanza en Educación Primaria, las que se podrían adaptar a nivel de Enseñanza Secundaria, colocando especial atención al diseño de proyectos que den respuesta a situaciones no determinísticas contextualizadas y reales, atendiendo que el contexto es una característica de la estadística y la probabilidad, como se menciona en Cobb y Moore (1997), y favoreciendo la formación de ciudadanos probabilísticamente alfabetizados.

Siguiendo esta línea, la presente investigación tuvo como propósito responder a las siguientes interrogantes: ¿cuáles son los argumentos que utilizan los profesores

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

y profesoras de matemática de la enseñanza secundaria, en formación inicial y en activo, para responder problemas contextualizados y reales donde interviene la incertidumbre? y ¿qué habilidades y conocimientos probabilísticos emplean los profesores y las profesoras en formación inicial y en activo para dar respuesta a las interrogantes planteadas?

A partir de esta problemática se plantea el siguiente objetivo de investigación: Caracterizar las habilidades de alfabetización y conocimientos probabilísticos que las personas docentes de matemática, en formación inicial y en activo, utilizan cuando se enfrentan con problemas reales donde interviene la incertidumbre.

Marco teórico

La probabilidad en el currículo escolar chileno

El saber probabilístico se encuentra asociado al ámbito disciplinar, que ha tensionado cambios en la matemática escolar desde la Enseñanza Básica en la mayoría de los países desarrollados, especialmente los que están en vías de desarrollo (Rivas, Godino y Arteaga, 2019), sugiriendo reforzar contenidos y cambios en la metodología, para propiciar la exploración y el pensamiento intuitivo. En Chile, no se ha estado ajeno a esta tendencia mundial. Al respecto, las Bases Curriculares de Enseñanza Media vigentes (MINEDUC, 2015), entregan orientaciones para el logro de los objetivos de aprendizaje que deben abordar las personas docentes de matemática en el sistema escolar, focalizándose en las habilidades necesarias para comprender y responder a una situación problemática contextualizada, como también, argumentar y comunicar los resultados (MINEDUC, 2012, p. 97). Respecto al eje de Datos y Azar, de estas Bases Curriculares, las habilidades y tópicos vinculados con la probabilidad, se describen en la Tabla 1.

Tabla 1
Habilidades asociadas a probabilidad presentes en el eje de Datos y Azar en el currículo escolar chileno de Enseñanza Secundaria

Nivel	Habilidades
Inicial	Estimar de manera intuitiva y calcular de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; determinar la probabilidad de ocurrencia de eventos en forma experimental y teórica, y construir modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias.
Medio	Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.
Avanzado	Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

Nota: Fuente propia de la investigación.

Asimismo, el MINEDUC ha propuesto estándares orientadores disciplinarios para la formación inicial docente, con el fin de cautelar la calidad de la formación. Al respecto, los estándares disciplinarios afines a los saberes probabilísticos hacen mención a que una persona docente de matemática debe conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas, mediante el uso de recursos tecnológicos, el diagrama de árbol y otras representaciones, así como el uso de juegos en el proceso de enseñanza que faciliten y motiven el aprendizaje de este tema (MINEDUC, 2012). De la misma forma, debe estar preparado para conducir el aprendizaje de la distribución normal y teoremas

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

límites, haciendo uso de simulaciones computaciones y con material concreto. Finalmente, exige de una persona docente la capacidad de conducir el aprendizaje de la inferencia estadística, comprendiendo la Ley de los Grandes Números mediante la resolución de problemas atingentes a esta temática. En resumen, el MINEDUC (2012) entrega un marco conceptual claro acerca de los contenidos y habilidades que los profesores en formación deberían adquirir. Finalmente, para evaluar el nivel de adquisición de estos conocimientos y habilidades, estos estándares son utilizados como referencia para el diseño de la prueba END, que se aplica al egreso de la formación docente.

Alfabetización y Pensamiento Probabilístico

Respecto de la noción de incertidumbre, Pratt y Kazak (2018) indican que “es un concepto amplio que incluye fenómenos que se encuentran fuera del dominio de la estadística, que se centran en la incertidumbre debida a la variación aleatoria, cuando a menudo es posible hacer inferencias y predicciones” (p.193). En la cual, como mencionan Vergara *et al*. (2020), la probabilidad proporciona las herramientas para modelar y cuantificar la incertidumbre, y atendiendo a su significado polifacético, se puede cuantificar desde una mirada intuitiva, clásica, frecuencial, subjetiva y axiomática.

Al respecto, según Batanero (2005), el significado intuitivo de probabilidad de un evento, se entiende como la asignación de conceptos cualitativos, tales como: imposible, poco probable, improbable, casi posible, entre otros. En cambio, al significado clásico de probabilidad se asocia la regla de Laplace, es decir, el cuociente entre la cardinalidad del número de casos favorables al suceso y el total de casos posibles asociados al espacio muestral del experimento aleatorio. Cabe hacer notar que esta definición clásica predomina en el sistema escolar (Vásquez *et al*., 2020). Asimismo, el significado frecuencial es otro enfoque utilizado para explicar la incertidumbre, también denominado experimental o empírico (Sánchez, 2009), donde la probabilidad de un suceso se modela a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones, es decir, se encuentra implícita la Ley de los Grandes Números.

Desde esta perspectiva, la enseñanza de la probabilidad en el sistema escolar, debe propender al desarrollo de una alfabetización y pensamiento probabilístico, como lo enfatizan Vergara *et al*. (2020) en su estudio sobre relaciones entre pensamientos proporcional y probabilístico en la toma de decisiones.

Referente a la alfabetización probabilística, autores como Gal (2005) y Sánchez (2009) la relacionan con el conocimiento probabilístico elemental de la ciudadanía para su interacción en la vida cotidiana. Para tal efecto, Gal (2005, p. 46) propone un modelo donde el componente cognitivo considera los siguientes puntos: (1) Grandes ideas: variación, aleatoriedad, independencia, predictibilidad, incertidumbre; (2) Calcular probabilidades: formas de encontrar o estimar la probabilidad de eventos; (3) Idioma: los términos y métodos utilizados para comunicarse sobre el azar; (4) Contexto: comprender el papel y las implicaciones de los problemas y mensajes probabilísticos en varios contextos y en el discurso público y personal; y (5) Preguntas críticas: cuestiones sobre las que reflexionar cuando se trata de probabilidades. Las que, según Palm (2008), deben promoverse a través de tareas auténticas, que representen contextos de la vida real de la forma más razonable posible, yendo más allá de la resolución de

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

ejercicios descontextualizados y aplicación de fórmulas sin ser comprendidas.

En cambio, el pensamiento estadístico involucra habilidades de orden superior, como la comprensión de las teorías y los supuestos que hay detrás de los métodos estadísticos, los procesos de simulación de fenómenos aleatorios y aplicación a problemas reales y contextualizados (Garfield y Ben-Zvi, 2007). En este camino, Franklin *et al*. (2007) recomiendan para la enseñanza de la estadística y probabilidad, centrarse en la comprensión conceptual, integrar datos reales con un contexto y un propósito, fomentar el aprendizaje activo, utilizar la tecnología para explorar conceptos y analizar datos.

En relación con el desarrollo de la alfabetización y pensamiento probabilístico de los y las docentes de matemática en formación inicial, Rodríguez-Alveal *et al*. (2018) compararon el conocimiento sobre alfabetización probabilística que presentan docentes en activo y en formación inicial, identificando que las personas docentes del sistema escolar presentan porcentajes de logro menos descendidos que las que se encuentran en formación inicial, en relación con identificar secuencias aleatorias y reglas probabilísticas. En cambio, los y las docentes en formación inicial presentan porcentajes de logro superiores en cálculo de probabilidad en enunciados de tipo textual. Además, ambos grupos entregan argumentaciones poco convincentes, evidenciando una formación de carácter procedimental sobre la conceptual, dificultando el desarrollo de la habilidad argumentativa, presente en el eje de Datos y Azar. Este tipo de hallazgos son coherentes con lo mencionado por Batanero *et al*. (2013), evidenciando que las asignaturas de estadística son aprobadas por la población estudiantil, sin comprender correctamente o sin ser capaces de aplicar los conceptos y procedimientos estadísticos.

Por su parte, Dayal y Sharma (2020) aplicaron una secuencia de lecciones para enseñar probabilidad, a docentes en formación inicial, en el contexto de juegos, explorando la relación entre probabilidades experimentales y teóricas en torno de aprendizaje colaborativo. Los datos entregan evidencia que las personas participantes utilizaron una variedad de estrategias para explicar las situaciones problemas, en relación con la equiprobabilidad, revelando que los y las docentes en formación inicial pueden modificar su pensamiento en base a situaciones de enseñanza enriquecedoras y tareas de aprendizaje adecuadas. En cambio, Vergara *et al*. (2020) analizaron el pensamiento probabilístico en estudiantes del sistema escolar, quienes mostraron dificultades en el desarrollo de habilidades procedimentales como el determinar probabilidades y graficar los espacios muestrales asociados a los experimentos aleatorios. De modo similar, Alvarado *et al*. (2018) evaluaron las intuiciones y heurísticas sobre probabilidad en estudiantes de ingeniería. Los resultados indican una alta variación en la asignación cualitativa de la intuición probabilística en situaciones de incertidumbre y la existencia de intuiciones correctas e incorrectas de las personas estudiantes. Producto de lo cual, los investigadores proponen una enseñanza de la probabilidad que relacione la comprensión teórica y práctica de los significados de la probabilidad, que va de lo intuitivo a lo axiomático, a través de la estimación cualitativa de las intuiciones probabilísticas como grado de creencia personal, y la confrontación explícita de las diversas heurísticas con el conocimiento formal de la probabilidad.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Aprendizaje basado en juegos

El aprendizaje basado en juegos (*Game Based Learning*-GBL) se puede definir, según Zabala-Vargas *et al*. (2020), como el diseño de actividades relativas al uso de juegos con la intencionalidad de provocar aprendizajes en los y las estudiantes. Por su parte, para Kamii y Rummelsburg (2008), este tipo de metodología fomenta el pensamiento matemático, atendiendo que los juegos les dan contexto a las actividades y, además proporcionan oportunidades de trabajar en grupo en un ambiente de aprendizaje divertido (Burguillo, 2010). En este contexto, Koparan y Keleli-Yilmaz (2015) realizaron un estudio, en 55 docentes en formación inicial, para evaluar la eficiencia de un ambiente de aprendizaje de actividades de probabilidad basadas en simulaciones. Los hallazgos mostraron que la simulación en la enseñanza de la probabilidad aumentó la predicción y habilidades de inferencia de futuros docentes y, en general, influyó positivamente en el éxito de la población estudiantil. Asimismo, Koparan (2019) en una investigación, haciendo uso de la metodología POE (Predecir, Observar y Explicar), en 40 profesores y profesoras en formación de una universidad estatal de Turquía, evaluó los aspectos básicos acerca del conocimiento de probabilidad, mediante la introducción de juegos y simulación. Los resultados obtenidos plantean que la estrategia de aprendizaje contribuyó al conocimiento de la probabilidad y enseñanza probabilística de los y las docentes en formación inicial, evidenciando una percepción positiva de las personas participantes sobre las actividades.

Metodología

Para desarrollar esta investigación, se utilizó una metodología de tipo cualitativa basada en un diseño de estudio de casos, el cual, según Pérez-Serrano (1994), tiene por "objetivo básico comprender el significado de una experiencia" (p. 81). En esta investigación, experiencias de aprendizaje afines a juegos aleatorios cotidianos.

Contexto y Participantes

El estudio se llevó a cabo en docentes en formación inicial de Pedagogía en Matemática y en activo del sistema escolar para la enseñanza secundaria. La selección de participantes se realizó mediante un muestreo no probabilístico del tipo intencionado (McMillan y Schumacher, 2011). Puntualmente, el estudio consideró a 29 docentes en formación inicial que habían finalizado la línea de formación en estadística y probabilidad en una institución de educación superior del centro sur de Chile. El segundo estamento estuvo compuesto por 26 docentes en activo que participaron de un taller de verano sobre Probabilidad y Estadística, con sesiones sincrónica y asincrónicas, durante enero de 2021. Producto del COVID-19 y las políticas de confinamiento en Chile, ambos estamentos recibieron docencia a distancia, mediante la plataforma Zoom.

Instrumento de recolección de datos y procedimiento de análisis

Para efectos del estudio se aplicó un instrumento con dos situaciones problemas afines a juegos no determinísticos, cada una de ellas con interrogantes abiertas (Figura 1), abordando el significado intuitivo, clásico y frecuencial de la probabilidad (Batanero, 2005), y el uso de herramientas tecnológicas. Para el procedimiento de análisis se elaboró una matriz de datos en Excel con el total de preguntas y respuestas entregada por cada uno de los participantes según estamentos. La información se analizó

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

siguiendo los pasos propuestos por Mayring (2000), levantando categorías de análisis de forma cíclica e inductiva, permitiendo develar las convergencias y divergencias de las preguntas que orientan las actividades.

Análisis y resultados

Se analizaron las respuestas de las personas participantes en relación con las preguntas formuladas en las situaciones 1 y 2. Los resultados se entregan en tres subsecciones acorde con las actividades que estas debieron realizar. Las respuestas, se presentan mediante citas y representaciones gráficas. Para efectos de resguardar la confidencialidad de los y las participantes, se idenficarón mediante un código alfanumérico: PF a docentes en formación inicial y PMSE a docentes de matemática en activo. La numeración, de cada código, corresponde al orden en que se registraron las respuestas de los participantes.

En la primera actividad se propone una situación problemática enfocada en un conocido juego de manos, en la que se pide analizar una situación de incertidumbre y argumentar transitando entre probabilidad intuitiva, frecuencial y clásica. En relación con la interrogante acerca si el juego es justo, 25 de 26 docentes en activo (96.2%) y 23 de 29 docentes en formación inicial (79.3%), declaran que sí lo es, haciendo mención a vocablos como probabilidad, posibilidad, equiprobabilidad y equivalentes. Algunos comentarios entregados por los estamentos al respecto son:

> *Las posibilidades que tiene cada jugador de ganar son equivalentes para ambos, porque la probabilidad de cada evento es equiprobable* (PMSE 1).

> *Creo que este juego es justo, porque los dos tienen la misma probabilidad de ganar* (PMSE 8).

Situación 1 (Piedra, papel y tijeras): Juego que consiste en la que ambos jugadores usan señas con las manos indicando Puño: Piedra, Palma: papel, Dedos índice y medio: tijeras. Mientras se participa, las manos se mueven simbolizando piedra, papel, tijeras. Donde la piedra rompe las tijeras. Papel envuelve piedra y la Tijeras corta papel. Teniendo presente el enunciado responder las siguientes preguntas:

a) ¿Es justo el juego? Entregue argumentaciones al respecto.
b) Simular el experimento haciendo uso de Excel. Comentar lo que observa.
c) Haciendo uso de diagramas de árbol, calcular las probabilidades correspondientes. Comente.
d) Compare y comente acerca de los resultados entregados en la simulación realizada en Excel y las probabilidades calculadas en c).

Situación 2: Suponga que se realiza el siguiente juego, tienes tres fichas una de los cuales tiene una A y una B, la segunda tiene una A y una C, y la tercera una B y un lado C. La regla del juego es como sigue: Primero, se decide quién será el Jugador 1 y quién 2. El jugador 1 voltea las tres fichas. Cuando caen en el suelo, si hay alguna coincidencia, el jugador 1 gana 1 punto. En caso de no coincidir (los tres lados fichas diferentes), el jugador 2 gana 1 punto. El primero jugador que gane 20 puntos gana el juego.

a) ¿Crees que este juego es justo? Explique su predicción.
b) Simule el juego hasta que uno de los jugadores gane 20 puntos. Comente lo observado.
c) Calcular teóricamente las probabilidades de ganar de los jugadores, comparando los resultados experimentales con los teóricos.

Figura 1. *Situaciones problemas planteados a los participantes.* Adaptado de Koparan (2019).

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

> *Creo que es justo, ya que, todos los participantes tienen las mismas posibilidades de ganar* (PF 26).

En estas respuestas no se observan conceptos como altamente probable o frases en lenguaje ordinario para expresar su grado de creencia u opinión, es decir, no se hace uso a una heurística de la representatividad (Alvarado *et al*., 2018) acorde al concepto de probabilidad intuitiva. Evidenciado una falta de lenguaje según el modelo de alfabetización probabilística de Gal (2005) de los estamentos considerados en el estudio. Sin embargo, centran su argumentación en términos como equiprobabilidad para conjeturar que todos los sucesos tienen igual probabilidad de ocurrir, base de su significado clásico. En cambio, otros participantes toman decisiones en base al cálculo de probabilidades, indicando:

> *Si es justo ya que si nos vamos por el cálculo de probabilidades estas sean ganar perder o empatar, siempre la probabilidad es la misma* (PMSE 26).

> *Si es justo el juego puesto que existe 1/3 de probabilidad de ocurrir cada suceso, así que ambos poseen la misma probabilidad de ganar* (PF 29).

Por lo tanto, se evidencia una forma de pensamiento algorítmico que posiblemente se deba a una enseñanza tradicional de la probabilidad, en la cual prevalece lo procedimental por sobre lo conceptual (Estrella, 2017) o por sobre el significado intuitivo de probabilidad (Vásquez *et al*., 2020). Es decir, el entorno social y la cultura común pueden influir en las ideas informales de probabilidad (Sharma, 2014).

En relación con el modelamiento del problema utilizando algún software, 12 de 26 PMSE, exponen haber simulado el problema en Excel. En base a la simulación, calcularon las probabilidades haciendo uso de la definición de probabilidad clásica. Al respecto, dos docentes en activo comentan que:

> *Simulé 10 veces mediante la función aleatorio.entre (1,3) de la cual se desprende que la P (obtener piedra) =0, P(papel)=0,5 y la P(Empate)=0,5* (PMSE 3).

> *En Excel generé al azar las opciones de cada jugador con números Piedra=1, Papel=2 y Tijera=3, con aleatorio.entre (1;3), donde la P(gane Jugador 1)=1/10, P(gane Jugador 2)=4/10 y P(empate)=3/10* (PMSE 11).

En los argumentos, se recurre a la función *aleatorio.entre* de Excel, lo cual está en coherencia a lo mencionado por Wild *et al*. (2018), quienes destacan que las personas usuarias de la estadística requieren pensar de forma estadística y computacional. En cambio, las personas docentes en formación inicial, en general, relatan el procedimiento realizado y calculan probabilidades en base a las frecuencias observadas en la simulación para estimar la probabilidad, mediante la definición de probabilidad clásica. Algunas respuestas dadas en esta línea son:

> *Se repite 15 veces el juego, de la simulación se observa que el jugador 1 gana 5 veces, el jugador 2 gana 4 veces y se produce un empate 6 veces. Sean los eventos A: "Gana el jugador 1", B: "Gana el jugador 2", C: "Empate". Donde P(A)=5/15, P(B)=4/15 y P(C)=6/15. Se puede concluir que el jugador 2 tiene una mayor probabilidad de ganar el juego* (PF 1).

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Realizaremos el experimento 24 veces y observamos que el caso de la Piedra es el que más repite teniendo así la probabilidad de 5/12 (PF 13).

Sin embargo, ambos estamentos no conjeturan acerca del comportamiento del fenómeno aleatorio estudiado en base a un número finito de simulaciones. Relacionando la definición clásica con la definición frecuencial de la probabilidad afín de ahondar en la Ley de los Grandes Números, de manera de tomar una decisión en base a la teoría.

Respecto al modelamiento del juego mediante un diagrama de árbol, 20 de 26 docentes en activo y 27 de 29 docentes en formación inicial, entregan una representación gráfica y calculan probabilidades desde un enfoque clásico de que gane el jugador 1, el 2 o que empaten. Al respecto, dos docentes en activo comentan:

Desde el diagrama de árbol se extrae: P(Gane Jugador 1)=1/3, P(Gane Jugador2)=1/3 y la P(empate)=1/3. Se nota que el experimento es equiprobable, por lo tanto el juego realmente es justo (PMSE 12).

No se observa una tendencia, intuitivamente podemos decir que son equiprobables. Obteniendo que P (empate) =0,5, P(Gane jugador 1) =0,25 y P(gane jugador 2)=0,25. Si aumentamos los lanzamientos, la diferencia en la probabilidad va diminuyendo (PMSE 13).

En estas respuestas se visualiza que las personas participantes, en base a los resultados, conjeturan que los eventos son equiprobables. Sin embargo, los valores entregados por PSME 13 no dan cuenta de ello, evidenciando una falta de conocimientos conceptuales, puntualmente el significado de la equiprobabilidad. Además, una persona docente en formación inicial señala que:

Podemos observar que la probabilidad de ganar, perder o empatar es de un 33,3% ya que todas las combinaciones posibles presentadas son igualmente probables (PF 4).

Por otro lado, al representar el juego mediante un diagrama de árbol, indican que este permite visualizar todas las combinaciones posibles del experimento y además calcular las probabilidades haciendo uso de su significado clásico, sin ahondar en los supuestos que hay detrás de esta definición. Solamente tres docentes en activo, en base al diagrama de árbol, escriben por extensión el espacio muestral e indican su cardinalidad, definiendo los sucesos, que permiten dar respuesta a la interrogante planteada, como se muestra a continuación:

El diagrama de árbol nos da las combinaciones que dan origen al espacio muestral del experimento. E = {(Piedra, piedra), (piedra, papel), (piedra, tijera), (papel, piedra), (papel, papel) (papel, tijera), (tijera, piedra), (tijera, papel), "(tijera, tijera)}. #E=9. Sean los eventos: A: Gana el jugador 1, B: Gana jugador 2, C: Empate. P(A) = 3/9 = 1/3, P(B) = 1/3, P(C) = 31/3 (PMSE 13).

Finalmente, en relación con la comparación entre los resultados entregados en la simulación realizada en Excel y el diagrama de árbol, las personas docentes en activo y en formación hacen mención a conceptos como probabilidad empírica, Ley de los Grandes Números y juego justo. Como se visualiza en las siguientes citas:

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

La probabilidad empírica no siempre coincide con las probabilidades teóricas como se observó en esta simulación, la ley de los grandes números indica que entre más veces se repite el experimento la frecuencia relativa se acerca más a la probabilidad teórica (PMSE 2).

Se puede determinar que el juego no es justo, ya que, para nuestra percepción, un juego se considera justo cuando la probabilidad de ganar para cada jugador debe ser igual a 50% si participan dos personas. Según lo establecido en las actividades, se puede establecer que hay de las tres opciones, solo con una podemos perder (PMSE 4).

En la simulación y en el diagrama de árbol, se obtienen los mismos resultados, para la probabilidad de ganar, perder y empatar 1/3. Respecto a esto, se puede decir que el computador realiza una simulación muy exacta. (PF 23)

Se observa que los dos estamentos coinciden en que la probabilidad empírica se aproxima a la teórica cuando aumenta el número de simulaciones, sin conjeturar cuántas simulaciones serán necesarias para que ello ocurra. Solamente las personas PMSE hacen referencia a la Ley de los Grandes Números.

En la segunda actividad se propone una situación problemática enfocada en un juego de fichas, en la que nuevamente se pide analizar una situación de incertidumbre, desde la definición, intuitiva, clásica y frecuencial de probabilidad.

Al respecto, 16 de 26 docentes en activo y 22 de 29 docentes en formación inicial, consideran que el juego no es justo, haciendo mención a conceptos como poco probable y mayor posibilidad, como se visualiza en las siguientes citas:

No, porque consideramos que es muy poco probable que, al momento de lanzar la fichas, las tres sean distintas, por lo que jugador dos siempre estaría en desventaja (PMSE 7).

En primera instancia me parece que el juego no es justo, debido a que es más difícil conseguir que las fichas sean diferentes entre sí, dejando una desventaja al jugador 2 (PF 1).

Analizando las instrucciones y la información acerca de las fichas se puede notar que no es totalmente justo ya que existe una mayor posibilidad a que exista alguna coincidencia (PF 10).

Los conceptos anteriores permiten cuantificar si el juego está de acuerdo a sus grados de creencia, afín a la definición de probabilidad intuitiva (Batanero, 2005). Asimismo, los estamentos en general advierten que el jugador 1 tiene más posibilidades de ganar el juego atendiendo a la estructura de las fichas y a la forma de jugar el juego. Otras personas participantes, en cambio basan su argumentación en los conceptos de combinaciones, espacio muestral y la definición clásica de probabilidad, como se muestra en los siguientes testimonios:

El espacio muestral tiene 18 combinaciones posibles, por lo cual el juego no es justo, ya que el jugador 1, tiene 13/18 posibilidades de obtener un punto, mientras que el jugador dos, solo tiene 5/18 posibilidades de obtener puntos. E= {AVA, ABC, AAB, AAC, ACB, ACC, BAB, BAC, BBA, BBC, BCB, BCC, CAB, CAC, CBA, CBB, CCA, CCB} (PMSE 9).

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

> *El juego no es justo, ya que la P (ganar del Jugador 1) = 6/8 =3/4 y la P (ganar del Jugador 2) = 2/8 = ¼. Por lo tanto, el jugador 1 tiene mayor probabilidad de ganar que el jugador 2* (PMSE 12).

> *El juego no es justo porque un jugador va ganar 24/36 jugadas y el otro jugador solo ganara 12/36, esto quiere decir, que las condiciones que se plantearon para ganar en el juego son injustas porque el jugador con las condiciones que la diferencia este entre 0,1 o 2 siempre va ganar* (PF 21).

En los cuales las decisiones se basan en la comparación de las probabilidades asociadas a las personas que participan del juego, teniendo presente que las personas PMSE centran su argumentación en las probabilidades extraídas del espacio muestral. En cambio, los y las PF tienen presente el número de juegos que son necesarios para que gane un jugador, es decir, desde la definición frecuentista de la probabilidad. Por su parte, los que declaran que el juego es equitativo basan su decisión en el cálculo de probabilidad y las fichas, como se observa en la siguiente cita:

> *El juego justo, puesto que, la probabilidad de que ocurra un evento al lanzar una sola ficha es de ½, además, si sumamos el total, tenemos 2 opciones de que aparezca A, 2 de que aparezca B y 2 de que aparezca C, de donde se infiere que la probabilidad de que se repitan A es 1/3, al igual de que se repita B y C. Por lo cual, se puede inferir que sí es un juego justo si se turnan un lanzamiento a la vez por cada jugador* (PF 5).

Donde hacen referencia a los casos probables de acuerdo con las letras que tienen las fichas y la probabilidad de obtener la letra A, B y C en cada una de las fichas en cada una de ellas.

En relación con la simulación del juego, las personas participantes hacen uso mayoritariamente de Excel, teniendo presente la condición que el jugador que obtenga primeramente 20 puntos gana. Como se muestra en los siguientes testimonios:

> *Simulé el juego hasta que uno de los jugadores obtenga 20 puntos por medio de aleatorio.entre, luego utilice la función SI, y si al menos 2 fichas eran iguales le asignaba un punto al jugador 1 de lo contrario el punto iba para el jugador 2. Luego calculé las frecuencias acumuladas y en qué lanzamiento el jugador 1 llegaba a los 20 puntos para ganar* (PMSE 17).

> *Con la ayuda de Excel, simulamos el juego, donde se necesitaron repetir 31 veces el juego para que uno de los jugadores, obtuviera los 20 puntos para obtener la victoria. En este caso, el ganador fue el jugador 1* (PF 12).

> *Con la función aleatorio.entre, la ingresaremos 3 veces para mostrar el lanzamiento de cada ficha. Al realizar 32 experimento se logró encontrar que el jugador 1 fue quien obtuvo 20 puntos primero* (PF 23).

El relato de la persona PMSE17 da cuenta del uso de las funciones de Excel para realizar la simulación sin dar respuesta a la interrogante planteada. No obstante, las y los PF hacen referencia al número de lanzamientos necesarios para que gane el primer jugador, sin analizar el comportamiento de los resultados, atendiendo a la definición frecuentista de probabilidad.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

Finalmente, al comparar los resultados teóricos con los empíricos, en general, los PMSE y PF coinciden en hacer referencia al uso de diagramas de árbol, espacio muestral, como se evidencia en los siguientes extractos:

> *Podemos realizar el diagrama de árbol con cada una de las tarjetas. El espacio muestral es: E= {(AAB), (AAC), (ACB), (ACC), (BAB), (BAC), (BCB), (BCC)}, #E = 8. El jugador 1 gana punto cuando hay alguna coincidencia en las tarjetas, el jugador 2 gana cuando no hay coincidencia en las tarjetas. Sean los eventos A: Puntaje para jugador 1. B: Puntaje para jugador 2. P(A) = 0,75; P(B) = 0,25* (PMSE 14).

> *Al calcular las probabilidades teóricas del juego, debemos calcular la cantidad de combinaciones totales, las cuales serían 8 para luego calcular los porcentajes correspondientes, de esta forma tenemos lo siguiente. - Poniendo en práctica el juego, se logra confirmar que efectivamente el jugador 1 tiene más probabilidad de ganar el juego, ya que sus opciones de fichas son mayores a las que tiene el jugador 2, de esta forma se ve la desigualdad del juego al momento de buscar un ganador* (PF 7).

> *Probabilidades teóricas. Combinaciones posibles: AAB – AAC – ACC – ACB – BAB – BCC – BCB – BAC. Tenemos 8 combinaciones posibles, de las cuales, en 6 combinaciones gana el jugador 1, lo que le da una probabilidad de 3/4 o 75% de ganar; mientras que el jugador 2 solo gana en dos combinaciones de las 8 posibles, es decir, el jugador 2 tiene ¼ o 25% de probabilidades de ganar; esto muestra que tiene muchas menos posibilidades de ganar el jugador 2 ante el jugador 1.*

> *Resultado experimental simulando en Excel, se obtuvo lo siguiente: El jugador ganó los 20 puntos a las 26 jugadas, por lo que, a las 26 jugadas, el jugador 2 ganó solo 6 veces, lo que da aproximadamente un 23% del total de jugadas y el porcentaje de las jugadas del jugador 1 es casi 77%.* (PF 26).

Se observa que PMSE14 relaciona los posibles resultados al arrojar las tres fichas con el puntaje que debe obtener un jugador para ganar el juego. Al respecto, solamente una persona docente en formación inicial hace un análisis de lo teórico y experimental por separado sin comparar dichos procesos.

Conclusiones

En este trabajo se mostró que la implementación de actividades afines a juegos no determinísticos permite movilizar una serie de conceptos, en particular, la definición intuitiva, clásica y frecuencial de probabilidad, como así también, su simulación mediante herramientas tecnológicas, para dar respuesta las interrogantes planteadas.

Al respecto, llama la atención que, en la primera actividad, las personas docentes en formación inicial y en activo involucradas, al preguntarles si el juego es justo, en general, basan sus afirmaciones haciendo uso de la definición clásica de probabilidad. En cambio, en la segunda actividad relacionada con fichas, las respuestas hacen referencia a conceptos afines a la definición intuitiva de probabilidad, como poco probable y mayor posibilidad, lo que evidencia la influencia de las actividades relacionadas con problemas rutinarios, como monedas,

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

dados, ruletas o bolas (Huerta, 2020). Asimismo, justifican sus aseveraciones haciendo referencia a conceptos como equiprobabilidad, sin entregar argumentaciones al respecto, sin ahondar en elementos cognitivos como ideas acerca de variación, aleatoriedad y un lenguaje probabilístico (Gal, 2005), entendiendo que la equiprobabilidad es la hipótesis de la visión clásica de probabilidad, es decir, que todos los sucesos tienen igual probabilidad de ocurrir, lo que Huerta (2020) ha denominado sesgo de la equiprobabilidad, el cual ha sido tensionado por el tipo de actividad desarrollada.

Además, se evidencia que las personas docentes en activo y en formación inicial emplean herramientas tecnológicas, en particular Excel, y están familiarizadas con las funciones que permiten generar números pseudoaleatorios. Sin embargo, no hacen uso de ellas para simular fenómenos aleatorios, afín de tomar decisiones en base al comportamiento del experimento. En nuestro caso, hacer uso del significado frecuencial de probabilidad y relacionarlo con la Ley de los Grandes Números. Lo cual implica que ambos estamentos según el modelo de Gal (2005) solamente han adquirido algunos elementos cognitivos afines a la alfabetización probabilística, tales como asignación de probabilidades, y un lenguaje probabilístico durante su paso por la Formación Inicial Docente.

Finalmente, el estudio proporciona evidencias empíricas sobre las habilidades y conocimientos adquiridos por los y las docentes de matemática en formación inicial y en activo acerca de cómo abordan situaciones problemas no determinísticas. Estos resultados llaman a la reflexión a la población docente de las instituciones formadoras de profesores y profesoras de matemática, respecto a orientar o reorientar los saberes disciplinarios acerca de esta temática, teniendo presente que el currículo escolar, los estándares nacionales e internacionales demandan una estadística contextualizada que permita tomar decisiones, en un mundo no determinístico.

Lo anterior, invita a investigar sobre las competencias y habilidades adquiridas por las personas docentes en formación inicial, en situaciones contextualizadas, en las cuales participe la probabilidad, puntualmente en ambientes auténticos como son los juegos, y a su incorporación en las aulas de clase.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo. El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: F.R.A. 40%, D.D.L. 30% y M.A. 30%.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente, previa solicitud razonable.

Referencias

Alsina, A. (2019). La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional*

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22
E-ISSN: 2215-3470

Virtual de Educación Estadística (pp.1-16). Granada: Universidad de Granada.

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L. & Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 131-156. https://doi.org/10.12802/relime.18.2121

Azcárate, P. & Cardeñoso, J. M. (2011). La Enseñanza de la estadística a través de escenarios: implicación en el desarrollo profesional. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 24*(40), 789-810.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, *83*, 7-18.

Burguillo, J. C. (2010). Using game theory and competition-based learning to stimulate student motivation and performance. *Computers and Education*, *55*, 566-575.

Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching, *American Mathematical Monthly, 104*(9), 801-823.

Dayal, H. C. & Sharma, S. (2020). Investigating probability concepts of secondary pre-service teachers in a game context. *Australian Journal of Teacher Education, 45*(5), 91-109. https://dx.doi.org/10.14221/ajte.2020v45n5.6

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En Salcedo, A. (Ed.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (173-194). Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Schaeffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) Report: A preK-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Nueva York, NY: Springer.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review, 75*(3), 372- 396.

Huerta, P. M. (2020). Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: retos para su enseñanza y en la formación de profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23*(1), 79-102. https://doi.org/10.12802/relime.20.2313

Kamii, C., & Rummelsburg, J. (2008). Arithmetic for first graders lacking number concepts. *Teaching Children Mathematics*, *14*(7), 389-394.

Koparan, T. (2019). Teaching game and simulation based probability. *International Journal of Assessment Tools in Education*, *6*(2), 235-258.

Koparan, T. & Kaleli-Yılmaz, G. (2015). The effect of simulation-based learning on prospective teachers' ınference skills in teaching probability. *Universal Journal of Educational Research, 3*(11), 775-786.

Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Forum Qualitative Social Research, 1*(2), 1-10. https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089

McMillan, J. & Schumacher, S. (2011). *Investigation educativa.* Madrid: Pearson-Adisson Wesley.

MINEDUC. (2012). *Estándares Orientadores para las carreras de pedagogía en educación media.* Santiago: Ministerio de Educación.

MINEDUC. (2015). *Bases Curriculares. Ministerio de Educación de Chile.* Santiago: Unidad de Curriculum y Evaluación.

MINEDUC. (2019). *Resultados Nacionales. Evaluación nacional diagnóstica de la Formación Inicial Docente*. Santiago: CPEIP.

Ortiz, J. J., Batanero, C. & Contreras, J. M. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(1), 63-91.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics,* 67(1), 37-58.

Pérez-Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos, interrogantes y métodos*. Madrid: La Muralla.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Pratt, D. & Kazak, S. (2018). Research on Uncertainty. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 193-227). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Rivas, H., Godino, J., & Arteaga, P. (2019). Los proyectos como contextualizadores de nociones básicas de estadística y probabilidad en la formación inicial de profesores de educación primaria. *Estudios Pedagógicos, 45*(1), 41-59.

Rodríguez-Alveal, F., & Díaz-Levicoy, D. (2021). Análisis de resultados de futuros profesores de matemática en los contenidos estadísticos y probabilísticos de la evaluación nacional diagnóstica. *Paradigma*, *41*(e1), 142-164.

Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., & Vásquez, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios Pedagógicos, 44*(1), 135-156. https://10.4067/S0718-07052018000100135

Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación Matemática*, *21*(2), 39-77.

Serrano, L., & Batanero, C. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Revista UNO, 5*, 15-28.

Sharma, S. (2014). Teaching probability: a socio-constructivist perspective. *Teaching Statistics, 37(*3), 78-84. https://doi.org/10.1111/test.12075

TEDS-M (2013). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries.* Amsterdam: IEA.

Vásquez, C., Rodríguez-Muñiz, L., Muñiz-Rodríguez, L., & Alsina A. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para la Educación Secundaria. *Números*, *104*, 239-260.

Vergara, A., Estrella, S., & Vidal-Szabó, P. (2020). Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23*(1), 7-36. https://doi.org/10.12802/relime.20.2311

Wild, C. J., Utts, J. M., & Horton, N. J. (2018). What is statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfiel (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5-36). Gewerbestrasse: Springer.

Zabala-Vargas, S. A., Ardila-Segovia, D. A., García-Mora, L. H., & Benito-Crosetti, B. (2020). Aprendizaje Basado en Juegos (GBL) aplicado a la enseñanza de la matemática en educación superior. Una revisión sistemática de literatura. *Formación Universitaria*, *13*(1), 13-26.

UNICIENCIA Vol. 36, N°. 1, pp. 1-16. January-December, 2022 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr