https://doi.org/10.24844/EM3402.07

Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile

Levels of algebraic reasoning in Chilean primary education textbooks

Ana Luisa Llanes Luna,[1]
Luis R. Pino-Fan,[2]
Silvia Elena Ibarra Olmos[3]

Resumen: La inclusión de ideas fundamentales para el desarrollo de un razonamiento algebraico, desde etapas tempranas de la educación, es un tema que ha sido intensamente investigado a nivel internacional. Como resultado, diversos currículos de matemáticas han comenzado a incluir en sus propuestas una variedad de objetos y procesos matemáticos asociados a la introducción de este tipo de razonamiento en los primeros grados educativos. El objetivo de este artículo es caracterizar el razonamiento algebraico, en términos de niveles de algebrización, pretendido en libros de texto de educación básica en Chile. Los resultados evidencian la existencia de problemas aritméticos que promueven niveles incipientes de algebrización; además, se identifican prácticas matemáticas de naturaleza algebraica, donde la finalidad radica principalmente en generar el término general de una secuencia, resolver ecuaciones de primer grado o transformar (reducir) expresiones algebraicas. Finalmente, se propone una

Fecha de recepción: 10 de enero de 2022. **Fecha de aceptación**: 5 de mayo de 2022.

[1] Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile; analuisa.llanes@alumnos.ulagos.cl, orcid.org/0000-0001-7564-065X

[2] Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile; luis.pino@ulagos.cl, orcid.org/0000-0003-4060-7408

[3] División de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México; silvia.ibarra@unison.mx, orcid.org/0000-0002-1344-2516

categorización de problemas que permiten promover diversos niveles de algebrización en la educación básica.

Palabras clave: *análisis de libros de texto; educación básica; niveles de algebrización; razonamiento algebraico.*

Abstract: The inclusion of fundamental ideas for the development of algebraic reasoning, from early educational stages, is a topic that has been intensively researched internationally. As a result, various mathematics curricula have begun to include in their proposals a variety of mathematical objects and processes associated with the introduction of this type of reasoning at the first educational levels. The aim of this article is to characterize the intended algebraic reasoning, in terms of levels of algebraization, in Chilean primary education textbooks. The results show the existence of arithmetic problems that promote incipient levels of algebraization; in addition, mathematical practices of an algebraic nature are identified, where the purpose mainly lies in generating the general form of a sequence, solving first degree equations, or transforming (reducing) algebraic expressions. Finally, a categorization of problems that allow promoting different levels of algebraization in primary education is proposed.

Keywords: *textbooks analysis; primary education; levels of algebraization; algebraic reasoning.*

1. ANTECEDENTES

La investigación sobre la introducción de ideas algebraicas en los currículos de educación básica (estudiantes de 6 a 12 años), ha sido por más de dos décadas uno de los principales ejes de análisis para la comunidad educativa internacional. Lo anterior, surgió como una medida que buscaba subsanar lo que, a finales del siglo XX, un gran número de estudios revelaron sobre las dificultades involucradas cuando los estudiantes (12 – 15 años) debían pasar de una forma aritmética a una forma algebraica de razonamiento (e.g., Kieran, 1992; Linchevski, 1995; Rojano y Sutherland, 2001; Wagner y Kieran, 1989). Este movimiento, conocido actualmente como *Early Algebra* –o álgebra temprana–, tiene por objetivo introducir ideas algebraicas en el currículo escolar elemental, además de construir una base que permita el acceso de los estudiantes a conceptos algebraicos más avanzados en los cursos siguientes (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Kieran *et al.*, 2016).

A partir del evento *Algebra Initiative Colloquium* (Lacampagne *et al.*, 1995), los estándares para la educación matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) y los *Common Core State Standards* (CCSSI, 2010), han incluido temas y recomendaciones para fomentar la inclusión del álgebra desde los primeros niveles educativos (Carraher y Schliemann, 2019). En el año 2000, Kaput sugirió promover el álgebra como facilitadora –más que como inhibidora– de una mejor comprensión de las matemáticas, en una propuesta denominada *algebra for all*, que tiene como finalidad la algebrización del currículo elemental.

En el marco del álgebra temprana existe un gran número de investigaciones basadas en el análisis del currículo, las cuales evidencian las formas en que son introducidas algunas nociones clave tales como relaciones funcionales, generalización de patrones; además, relacionan el desarrollo del razonamiento algebraico a partir del trabajo con algunas nociones de la aritmética (Aké y Godino, 2018; Cai, 2004; Castro *et al.*, 2017; Fong, 2004; Lew, 2004; NCTM, 2000). Por ejemplo, Watanabe (2008), señala que, en Japón, "el estudio del álgebra en la escuela primaria pretende no sólo desarrollar competencia algebraica sino también promover una comprensión más profunda de otros contenidos en el currículo de matemáticas" (p. 192); para ello, dividen el contenido asociado al álgebra en tres categorías: ideas acerca de las funciones, escritura e interpretación de expresiones matemáticas.

Actualmente, las Bases Curriculares (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018) vigentes para los niveles de primero a sexto básico en Chile, manifiestan la introducción de ideas o conceptos de naturaleza algebraica. No obstante, fue en el año 2012 que el MINEDUC hizo efectiva la integración del álgebra desde primer año básico. Mejías (2019), con base en los documentos curriculares del año 2012, identifica la manera en que los objetos algebraicos son introducidos al currículo de educación básica en Chile. No obstante, el trabajo de este autor no aborda cómo los objetos y procesos de naturaleza aritmética pueden promover algún *Nivel de Algebrización* en el currículo de educación básica.

El objetivo de este artículo es, por un lado, identificar *Niveles de Algebrización* (en términos de objetos y procesos matemáticos, aritméticos y algebraicos) pretendidos por el currículo chileno de matemáticas para enseñanza básica (1° a 6° Básico), entendiendo currículo como la dupla <plan de estudios, libros de texto>, tal como sugieren Pino-Fan *et al.* (2013); y, por otro lado, caracterizar tipos de problemas que ponen en juego *prácticas matemáticas* que permiten promover determinados niveles del razonamiento algebraico en la enseñanza básica chilena.

2. NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN EL CONTEXTO ONTOSEMIÓTICO

La presente investigación se sustenta en nociones teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino *et al.*, 2007), específicamente en la propuesta de *Niveles de Algebrización* (Godino *et al.*, 2014). Los *Niveles* de esta herramienta teórico-metodológica "se definen teniendo en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente (Godino *et al.*, 2015, p. 117).

Actualmente, la propuesta del EOS de *Niveles de Algebrización* distingue siete niveles para el desarrollo progresivo del razonamiento algebraico, los primeros cuatro se asocian a la educación básica, y los restantes se asocian a la educación secundaria y bachillerato (Godino *et al.*, 2015).

En este trabajo se consideran los niveles propuestos para la educación básica (*Nivel* 0 al *Nivel* 3). El *Nivel* 0 indica ausencia de razonamiento algebraico en las prácticas desarrolladas, y los dos *Niveles* siguientes (1 y 2), considerados como proto-algebraicos, sugieren indicios de ideas algebraicas durante el desarrollo de las prácticas matemáticas. Finalmente, el *Nivel* 3 indica una actividad matemática propiamente algebraica. A continuación, se presenta un resumen de estos *Niveles* y sus descriptores (Godino *et al.*, 2014):

- *Nivel 0*: Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, obtenido como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.
- *Nivel 1*: Intervienen objetos intensivos (generales) cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos

reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. Se identifican propiedades, equivalencias numéricas y relaciones a partir de tareas estructurales, mientras que en tareas funcionales se reconoce la generalidad expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

- *Nivel 2*: Intervienen cantidades indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico o simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacio-temporal. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.
- *Nivel 3*: Son generados objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se elaboran transformaciones en la forma simbólica de las expresiones, conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

En esta investigación se concibe al razonamiento algebraico como aquél que "implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas" (Godino y Font, 2003, p. 774). Para el caso de la educación básica, se puntualiza como Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), definido como el "sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.)" (Castro *et al*., 2011, p. 75).

Cabe señalar que en el EOS se entiende por práctica matemática "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 182). Por su parte, se consideran objetos algebraicos a las "relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones y estructura y sus tipos (semi grupo, monoide, semi módulo, grupo, módulo, cuerpo, espacio vectorial, etc.) propias del álgebra superior o abstracta" (Godino *et al*., 2012, p. 493).

Todo lo que se ha descrito, permite analizar de manera pormenorizada las prácticas desarrolladas o susceptibles de desarrollarse en torno a una tipología de tareas algebraicas. Conviene subrayar que,

> Si bien los niveles proponen una gradación de las características algebraicas que pueden surgir en la solución de las tareas matemáticas escolares, se ha encontrado que es posible valorar una tarea como de un nivel u otro, en función del tipo de solución que se proponga, con lo cual la posible actividad matemática, de carácter algebraico, que un estudiante puede desarrollar, se predice en un rango aproximado. (Castro *et al.*, 2017, p. 186)

3. CONTEXTO DE ESTUDIO Y METODOLOGÍA

Según lo señalado en el Art. 19 de la Ley General de Educación (N.º 20.370), la Educación Básica en Chile es el nivel orientado hacia la formación integral de los alumnos en diversas dimensiones, desarrollando sus capacidades de acuerdo a los conocimientos, habilidades y actitudes definidos en las Bases Curriculares. Estas últimas se determinan como el documento principal del currículo chileno, cuyo objetivo es que todos los estudiantes sean partícipes de una experiencia educativa similar, asentando una base cultural común (MINEDUC, 2018). Ellas establecen los Objetivos de Aprendizaje, que dan cuenta de los conocimientos, las habilidades y las actitudes que se deben aprender para satisfacer los objetivos generales de este nivel educacional. En particular, se establece para la asignatura Matemática que su propósito es

> Enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar. (MINEDUC, 2018, p. 214)

La organización curricular de esta asignatura se presenta a través de: a) Habilidades, b) Ejes y c) Actitudes. Con respecto al apartado de Habilidades, se establece que cada una de estas (resolver problemas, representar, modelar, argumentar y comunicar) tiene un rol importante en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos, así como en la aplicación de conocimientos para resolver las tareas matemáticas y de otros ámbitos. Los conceptos matemáticos se presentan en cinco ejes temáticos: Números y operaciones (Nyo), Patrones y álgebra (Pya), Geometría (Geo), Medición (Med), y Datos y probabilidades (Dyp).

En este artículo enfocamos nuestra atención en dos de los ejes, Nyo y Pya, en los cuales se presentan conceptos asociados al desarrollo del razonamiento algebraico. El eje Nyo, "abarca el desarrollo del concepto número como la destreza en el cálculo mental y el uso de algoritmos" (MINEDUC, 2018, p. 218). En el eje Pya, "se espera que los estudiantes establezcan relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, con la finalidad de que sean capaces de indagar sobre las formas, las cantidades y el cambio de una cantidad en relación con otra" (MINEDUC, 2018, p. 219). Se señala que desarrollando una base sólida del concepto patrón se facilitaría el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico.

A diferencia de las Bases Curriculares que rigen la educación de 7° básico a 2° medio (estudiantes de 12 a 15 años), donde se establece que los ejes de 'Números' y 'Álgebra y funciones' se relacionan fuertemente, en las Bases Curriculares de 1° a 6° básico no se hace alusión a ningún tipo de relación entre los ejes Nyo y Pya, lo que podría implicar que, en el caso del currículo chileno para la educación básica, la aritmética no se considere como una característica del RAE, y se considere solo a los objetos de naturaleza algebraica como elementos promotores de este.

Por otra parte, el MINEDUC pone a disposición de la comunidad educativa actividades complementarias, libros de actividades (cuadernillos de ejercicios), textos oficiales (guía didáctica del docente y texto del estudiante), imágenes, documentos interactivos, presentaciones de videos, entre otros, para cada uno de los niveles de la educación básica. En el caso de los textos del estudiante oficiales, se proponen seis (uno por cada nivel educativo) desde 1° a 6° básico (estudiantes 6 a 12 años), teniendo por objetivo exhibir los contenidos y requerimientos para cada uno de los niveles según lo planteado en las Bases Curriculares. La tabla 1 presenta algunos datos generales sobre los textos del estudiante distribuidos por el MINEDUC para seis de los ocho niveles de la Educación Básica en Chile. Cabe destacar que los textos no se estructuran en el mismo número de unidades y que estas pueden abordar más de un eje cada una.

Tabla 1. Organización de libros de texto chilenos por unidad y eje

Nivel educativo	Autor(es)	Organización del texto por unidades y ejes					
		1	2	3	4	5	6
1º básico	Cortés (2018)	Nyo	Geo Med	Nyo	Pya	Dyp	Nyo
2º básico	Ayala *et al.* (2017)	Nyo Med	Nyo Med Geo	Nyo Pya Geo Dyp	Nyo Med Dyp		
3º básico	Urra *et al.* (2017)	Nyo	Nyo Pya Med Geo	Nyo Pya Med Dyp	Nyo Geo Med		
4º básico	Rodríguez *et al.* (2018)	Nyo Pya	Geo	Nyo	Med	Dyp	
5º básico	Kheong *et al.* (2015/2017)	Nyo Pya	Geo Med	Nyo Pya	Dyp		
6º básico	Maldonado y Castro (2016)	Nyo	Pya	Geo Med	Dyp		

Fuente: Elaborado por los autores

3.1. Metodología

La investigación se ha desarrollado bajo las características del paradigma cualitativo (Creswell, 2009; León y Montero, 2003). La técnica de investigación es el análisis de contenido (Gil, 1994), específicamente de las prácticas matemáticas institucionales (propuestas en los textos oficiales). Es pertinente señalar que, actualmente, la práctica de la enseñanza se sigue apoyando mayoritariamente en el libro de texto, teniendo una gran influencia en el aula, ya que sigue considerándose como uno de los referentes exclusivos del saber científico, influenciando las concepciones curriculares y siendo una de las principales fuentes que proporciona actividades de instrucción para los profesores (Espinoza *et a*l, 2013; García-Mateos y Caballero-García, 2005; Pino-Fan *et al*, 2013). Asimismo, se considera que los análisis didácticos de libros de texto permiten, entre otras cosas,

> caracterizar la calidad de la organización matemática textualizada, su grado de completitud, pertinencia, adecuación e idoneidad epistémica y didáctica, y en tal sentido, orientar al profesor para sostener un trabajo de gestión de la clase o rediseño de actividades científicamente sustentable y fundamentado. (Espinoza *et al.*, 2013, pp. 5051-5052)

Es por lo anterior que se considera llevar a cabo un estudio didáctico a los textos de educación básica de Chile, propuestos para la asignatura de Matemática, con la finalidad de caracterizar, con base en las prácticas matemáticas de referencia (i.e., que los textos realizan y que se espera que realicen los estudiantes), los *Niveles de algebrización* pretendidos en el currículo de educación básica chileno.

Para efectos metodológicos, este trabajo adopta el modelo de *Niveles de Algebrización* (Godino *et al.*, 2014) como herramienta de análisis. El análisis de los textos se desarrolla en las siguientes fases: 1) estudio preliminar y selección de los problemas asociados a los ejes Números y operaciones (Nyo) y Patrones y álgebra (Pya) del currículo escolar chileno; 2) resolución de los problemas seleccionados y análisis pormenorizado de las prácticas matemáticas de referencia; 3) generación de las categorías de problemas. Se analizan los seis textos del estudiante presentados en la tabla 1.

4. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

Los análisis realizados permitieron identificar que los *Niveles de Algebrización* pretendidos en el currículo chileno de matemática para la educación básica, van desde el *Nivel 0* (ausencia del razonamiento algebraico) hasta un *Nivel* consolidado *de Algebrización* (*Nivel 3*). Se presentan con profundidad los análisis y resultados sobre los libros de texto utilizados en los cursos 1º (sección 4.1) y 4º año básico (sección 4.2). La elección de los libros de tales niveles se debe a que la diferencia es mínima entre 1º y 2º básico en lo que respecta al tipo de problemas y *Niveles de Algebrización* identificados y, además, porque de acuerdo al currículo de matemáticas en Chile, es en 4º básico cuando se introduce formalmente la notación algebraica. No obstante, antes de finalizar este apartado, se presentan de manera resumida los resultados para los libros de texto correspondientes a los cursos 2º, 3º, 5º y 6º básico (sección 4.3).

Para los cursos de 1º y 4º básico se describen con detalle las *prácticas matemáticas* de referencia, es decir, aquellas *prácticas* propuestas tal como aparecen en los libros de texto. mediante la identificación de los *objetos matemáticos primarios* que emergen o intervienen en estas *prácticas*, incluyendo ejemplos significativos de la caracterización de problemas que se ha realizado. Al final de cada sección, se establecen las características principales de los *Niveles de Algebrización* identificados. Esta misma estructura se sigue, de manera más resumida, con los cursos 2º, 3º, 5º y 6º básico.

4.1. Primero básico: Objetos matemáticos y Niveles del Algebrización identificados

En este nivel se han caracterizado 14 tipos de situaciones-problema (rotuladas como SP) asociados a prácticas matemáticas promotoras del RAE donde cada una de estas prácticas se vinculan a un solo *Nivel de Algebrización*. La tabla 2 presenta, en la primera columna, los ejes temáticos de interés (Nyo, Pya) de la asignatura Matemática; en la segunda, se asigna un número a cada SP del libro de texto de 1º básico; en la tercera, las tipologías de problemas y, en la cuarta, el número de SP presentes en el libro de texto.

Tabla 2. Categorización de tipos de problemas en 1º básico

Eje	SP	Tipo de problema	Número de SP contenidos en el texto
Números y operaciones	1	Aplicar el algoritmo de "componer y descomponer" cantidades numéricas para resolver problemas	36
	2	Comparar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que)	27
	3	Determinar la cardinalidad de conjuntos	29
	4	Identificar a la suma y la resta como operaciones inversas	4
	5	Identificar el antecesor o sucesor de un número	5
	6	Identificar la condición para saber cuándo un elemento pertenece a un conjunto	1
	7	Identificar la función ordinal de los números naturales	6
	8	Identificar y representar mediante un número la cardinalidad de un conjunto	11
	9	Operar cantidades numéricas (suma o resta)	34
	10	Utilizar el algoritmo "abreviado" para sumar y restar	7
Patrones y álgebra	11	Determinar los elementos de una secuencia dada la regla de formación	5
	12	Identificar la regla (patrón) de formación	16
	13	Identificar la regla (patrón) de formación y completar la sucesión	37
	14	Resolver (implícitamente) ecuaciones de la forma $x \pm B = C$ con x, B y $C \in \mathbb{N}$	16
		Total	234

Fuente: Elaborado por los autores

4.1.1. Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 0 de Algebrización

Los objetos matemáticos identificados en las prácticas matemáticas son:

- *Lenguaje*. Predomina el lenguaje natural y representaciones numéricas e icónicas. Intervienen símbolos, como "$\square$", que representan a un valor desconocido (por ejemplo, en la expresión $7 = \square + 2$), pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. Los símbolos que intervienen se refieren a ejemplos o casos particulares (extensivos).

- *Definiciones-conceptos*. Las definiciones se presentan mediante lenguaje materno o natural, apoyados además por figuras o íconos (ver figura 1), o lenguaje numérico-simbólico (números o signos, como +, −, =, entre otros). El concepto de número se asocia a la cardinalidad de un conjunto, o bien, con definiciones expresadas en lenguaje natural, "Los números tienen diferentes funciones, una de ellas es ordenar. A estos números se les llama números ordinales. 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º, 10º" (Cortés, 2018, p. 38).

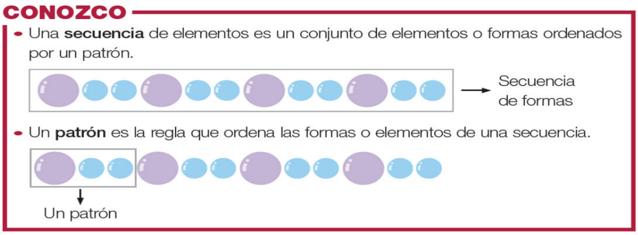


Figura 1. Ejemplo de definición-concepto (Cortés, 2018, p. 147)

- *Proposiciones*. Las proposiciones se enuncian mediante el lenguaje natural, acompañadas de representaciones icónicas que apoyan de manera visual a las proposiciones dadas (ver figura 2).

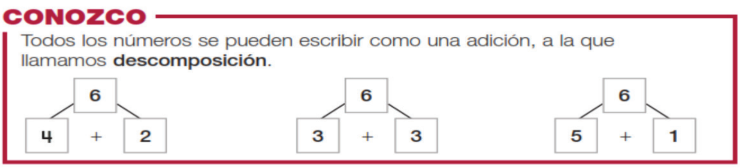


Figura 2. Ejemplo de SP1 (Cortés, 2018, p. 32)

- *Procedimientos*. Los procedimientos son de naturaleza aritmética. Para obtener un valor desconocido, por ejemplo $5 + 4 = \square$, se sugiere hacer uso de una cinta numerada y comenzar a contar, para este caso comenzando del 5 y contar 4 hacia adelante. La acción de contar es una técnica que prevalece a lo largo del libro de texto (contar los elementos en colecciones) para establecer la cardinalidad de los conjuntos, o bien, para comparar colecciones de elementos.

- *Argumentos*. Los argumentos se valen de la observación y de la aplicación de estrategia o su verificación para establecer resultados. La figura 3 ejemplifica este tipo de argumentos.

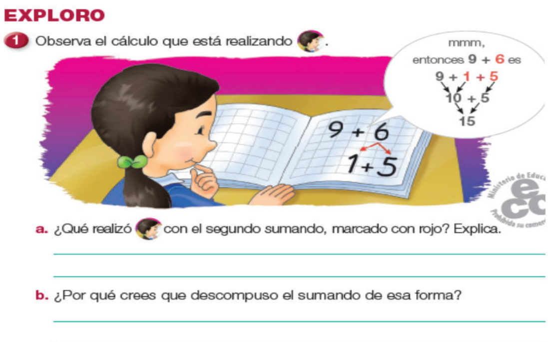


Figura 3. Ejemplo de SP1 (Cortés, 2018, p. 220)

Lo anterior permite concluir que las prácticas matemáticas son desarrolladas en un contexto puramente aritmético, donde los objetos matemáticos son expresados, principalmente, mediante los lenguajes natural, numérico e icónico y los cuales son ejemplos particulares de tipologías más amplias (por ejemplo, trabajar en el contexto de los números naturales). Además, los símbolos que refieren a valores desconocidos se obtienen como resultado de operaciones sobre objetos particulares (por ejemplo, la acción de agregar, que se traduce en lenguaje matemático como la operación suma $2 + 4 = \square$).

4.1.2. Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 1 de Algebrización

Para este nivel educativo se han caracterizado 4 tipos de problemas etiquetados en la segunda columna de la tabla 2 como SP11, SP12, SP13 y SP14, e identificados en la unidad dedicada al eje Pya. Las prácticas matemáticas promovidas en el texto, asociadas a la tipología de problemas antes mencionadas, permitieron identificar aspectos característicos del *Early Algebra* tales como la generalización de patrones, el desarrollo y manipulación del simbolismo en un lenguaje diferente al algebraico, así como el concepto de igualdad. Los objetos identificados en las prácticas matemáticas analizadas son:

- *Lenguaje*. Los patrones, secuencias y ecuaciones, se representan principalmente mediante lenguaje icónico, numérico y lenguaje natural. Los patrones y secuencias pueden encontrarse a partir de representaciones icónicas o bien representadas mediante lenguaje numérico (ver figura 4). Por otra parte, la idea de ecuación (de manera implícita) comienza a introducirse a través de representaciones icónicas, principalmente usando el concepto de balanza.

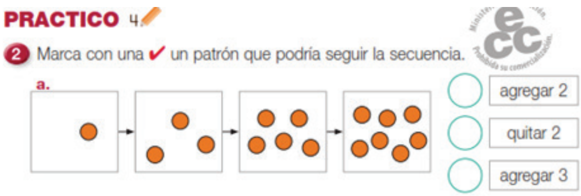


Figura 4. Ejemplo de SP12 (Cortés, 2018, p. 149)

- *Definiciones-conceptos*. Las definiciones o conceptos se enuncian a través de lenguaje natural, con apoyo de representaciones icónicas para dar explicaciones sobre estos (ver figura 5).

Figura 5. Definición de secuencia numérica y patrón numérico (Cortés, 2018, p. 148)

- *Proposiciones*. Las proposiciones generalmente se enuncian mediante el lenguaje natural. Por ejemplo "Para resolver problemas donde tengas que igualar cantidades, puedes representar las cantidades en barras y compararlas" (Cortés, 2018, p. 160).
- *Procedimientos*. Los procedimientos permiten identificar propiedades o equivalencias numéricas. La identificación de patrones numéricos, así como la determinación de los elementos de una secuencia, dada la regla de

formación, se asocia a las acciones de agregar o quitar elementos (sumar o restar, respectivamente). El concepto de igualdad (o desigualdad) se aborda recurriendo a las técnicas de conteo (determinar la cardinalidad de conjuntos y compararlos). Implícitamente se trabaja con la noción de lo desconocido, para ello se recurre a equilibrar balanzas agregando o quitando elementos para lograr el equilibrio.

- *Argumentos*. Los argumentos se valen de la observación y la aplicación de algunas estrategias o su verificación (ver Figura 6).

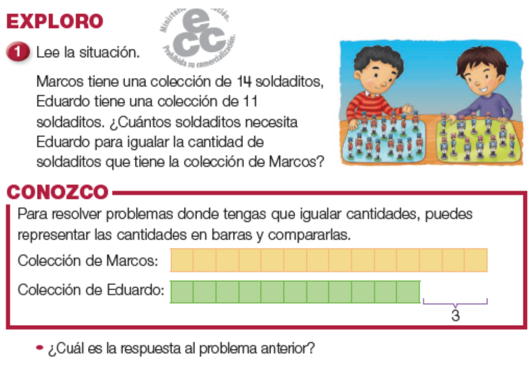


Figura 6. Ejemplo de SP2 (Cortés, 2018, p. 160)

Para este nivel se han identificado en las prácticas matemáticas equivalencias numéricas (que se trabajan mediante el uso de balanzas) y relaciones a partir de tareas estructurales (mediante la composición y descomposición de los números, por ejemplo, descomponer el 7 como la suma de dos números diferentes, 5 + 2 o 2 + 5). Para el caso de las tareas de generalización de patrones (generación de secuencias o identificación de reglas de formación) se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal, etiquetados en la tabla 2 (columna SP con los números 11, 12 y 13).

4.2. Cuarto básico: Objetos matemáticos y Niveles de Algebrización identificados

Para este nivel educativo se han caracterizado 14 tipos de situaciones-problema (SP) asociados a *prácticas matemáticas* promotoras del RAE. A diferencia del texto para 1º básico (ver tabla 2), estas prácticas se vinculan a más de un *Nivel de Algebrización*, por ejemplo, un problema del tipo 'identificar la regla o patrón de formación', puede resolverse mediante prácticas del *Nivel 1* o *2* de *Algebrización*; lo mismo sucede cuando se resuelven ecuaciones de las formas $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ (con $x, B, C \in \mathbb{N}$). Otra diferencia es que, en este libro de texto, se han agrupado algunos de los problemas en 'grandes categorías', referidas a aquellas SP particulares que buscan el mismo objetivo. Por ejemplo, un problema de tipo 'aplicar estrategias de cálculo mental', puede ser 'aplicar e identificar las propiedades del 0 y 1 en las operaciones de multiplicación y división', o bien, 'aplicar el algoritmo de la división para resolver problemas'.

En la tabla 3 se presentan en una primera columna los ejes temáticos de interés (Nyo, Pya) de la asignatura Matemática; en la segunda, se asigna un número a cada SP del libro de texto de 4º básico; en la tercera, las tipologías de problema y, en la cuarta, el número de SP presentes en el libro de texto.

Tabla 3. Categorización de tipos de problemas en 4º básico

Eje	SP	Tipo de problema	Número de SP contenidos en el texto
Números y operaciones	1	Aplicar estrategias de cálculo mental	42
	2	Comparar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que <, >, =)	16
	3	Comparar y ordenar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que, <, >, =)	9
	4	Identificar y representar mediante un número la cardinalidad de un conjunto	14
	5	Operar cantidades numéricas	10
	6	Representar y resolver problemas a través de: números decimales, racionales positivos, decimales y racionales	42
	7	Resolver problemas (suma y/o resta) a través de la aproximación (redondeo) de cifras	6
	8	Resolver problemas haciendo uso de una de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división)	35
	9	Resolver problemas haciendo uso de las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y/o división)	3

Patrones y álgebra	10	Determinar los elementos de una secuencia dada la regla de formación	5
	11	Identificar la regla (patrón) de formación	3
	12	Identificar la regla (patrón) de formación y completar la secuencia	11
	13	Representar y/o resolver ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$	25
	14	Representar y/o resolver inecuaciones de la forma , $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$	30
		Total	251

Fuente: Elaborado por los autores

4.2.1. Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 0 de Algebrización

Las prácticas matemáticas asociadas a este *Nivel* se caracterizan por el trabajo en el contexto de los números naturales y racionales positivos (fracciones o en su representación decimal). Los objetos matemáticos identificados son:

- *Lenguaje*. Predomina el lenguaje numérico (cantidades hasta el 10,000), apoyado de rectas numéricas y tablas de valor posicional, bloques multibase, entre otros. Las fracciones (propias e impropias) se representan en la recta numérica, y por medio de lenguaje gráfico, simbólico, como la parte de un todo y mediante lenguaje natural (ver figura 7). Los números decimales se encuentran en forma numérica y apoyados por representaciones gráficas (por ejemplo, en regiones).

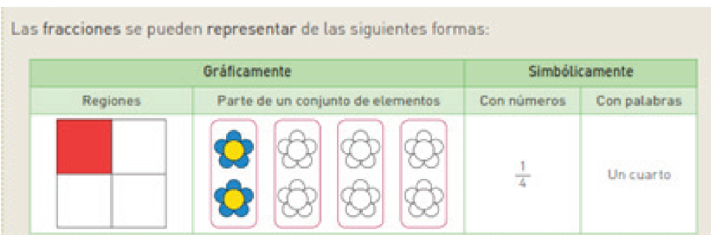


Figura 7. Representar fracciones en cuarto básico (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 199)

- *Definiciones-conceptos*. Algunas definiciones y conceptos de este libro se encuentran en su glosario; otros, por ejemplo el concepto de descomposición aditiva (estrategia de cálculo), se presentan como un procedimiento (ver figura 8).

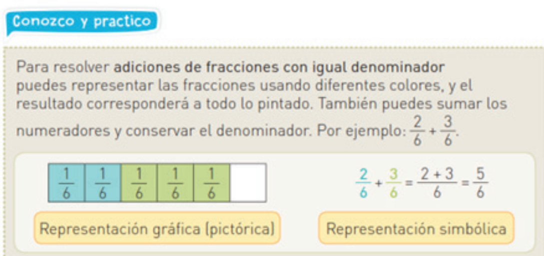
Conozco y practico

Los números se pueden **componer y descomponer de forma aditiva** a partir de su posición o valor posicional.

	A partir de su posición	A partir de su valor posicional
Composición	2UM + 5C + 9D + 3U = 2593	2000 + 500 + 90 + 3 = 2593
Descomposición	5427 = 5UM + 4C + 2D + 7U	5427 = 5000 + 400 + 20 + 7

Figura 8. Ejemplo de descomposición aditiva (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 36)

- *Proposiciones*. Estos objetos matemáticos se enuncian en los apartados de *Conozco y practico*, como expresiones verbales que acompañan a procedimientos o definiciones y conceptos. Por ejemplo, se afirma que "los números se pueden componer y descomponer de forma aditiva a partir de su posición o valor posicional" (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 36).
- *Procedimientos*. Al igual que las proposiciones, estos se enuncian frecuentemente en los apartados de *Conozco y practico* a través de los lenguajes natural o numérico. En su mayoría, los procedimientos se presentan apoyados con tablas, donde se colocan los algoritmos que se espera que los estudiantes repliquen en ejercicios posteriores o bien en representaciones icónicas (pictóricas) de las operaciones a realizar (ver figura 9).


Conozco y practico

Para resolver **adiciones de fracciones con igual denominador** puedes representar las fracciones usando diferentes colores, y el resultado corresponderá a todo lo pintado. También puedes sumar los numeradores y conservar el denominador. Por ejemplo: $\frac{2}{6} + \frac{3}{6}$.

Figura 9. Procedimientos para la adición de fracciones con igual denominador (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 215)

- *Argumentos*. Los argumentos también se encuentran en los apartados de *Conozco y practico*. Se enuncian como ejemplos apoyados en figuras o procedimientos de carácter pictórico. En la figura 9, el argumento que valida el procedimiento corresponde al enunciado "puedes representar las fracciones usando diferentes colores, y el resultado corresponderá a todo lo pintado". Además, la observación es una de las principales actividades utilizada para argumentar.

Se concluye que los objetos matemáticos se expresan mediante los lenguajes natural, numérico (naturales, fracciones y números decimales), icónico y tabular. Los valores desconocidos se obtienen mediante operaciones (multiplicación y división con cantidades menores a 10,000, o sumas y restas de fracciones o decimales), es decir, operando sobre objetos particulares.

4.2.2. Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 1 de Algebrización

En este caso las prácticas matemáticas asociadas al *Nivel 1 de Algebrización* para este grado educativo se identifican tanto en el eje de Nyo como en el eje de Pya. Los objetos matemáticos identificados en el texto son:

- *Lenguaje*. Se identifica el uso de los lenguajes numérico, verbal, tabular, e icónico. En las tareas de estructura donde se pide identificar o hacer uso de propiedades, los lenguajes numérico y verbal son los predominantes; por otra parte, las prácticas asociadas a SP10, SP11 y SP12 (ver tabla 3) se realizan principalmente a través de los lenguajes numérico y tabular. Las prácticas asociadas a las SP13 y SP14 se trabajan a través de lenguaje icónico (uso de balanzas) y se comienza a hacer uso de símbolos o letras (como x, y y z) para designar lo desconocido, definiéndolos como incógnitas.
- *Definiciones-conceptos*. Se presentan en los apartados de *Glosario* y *Conozco y practico*, generalmente mediante lenguaje natural, con apoyo en el uso de ejemplos (tablas, algoritmos, figuras, etc.). Entre las definiciones o conceptos asociados a las prácticas de SP1, se encuentran las propiedades del 0 y el 1 en la multiplicación y división, y la propiedad distributiva. Para las tareas propias del eje Pya (ver tabla 3, números 10, 11 y 12), las prácticas matemáticas movilizan los conceptos de patrón numérico de adición, patrón numérico de sustracción, patrón numérico de multiplicación, patrón

numérico de división, secuencia numérica, secuencia de figuras, crecimiento, disminución. Para las prácticas de las SP13 y SP14, los conceptos que se identifican son ecuación, incógnita, símbolo o letra (x, p, r, e, etc.), modelar, balanza equilibrada, operación inversa, lados izquierdo y derecho de la ecuación.

- *Proposiciones*. Las proposiciones se presentan en los apartados de *Conozco y practico* también mediante lenguaje natural. Generalmente, las proposiciones se enuncian al principio o al final de la sección antes mencionada. Algunas de las proposiciones que se encuentran son: “Al multiplicar cualquier número por 1, el producto es el mismo número, mientras que al multiplicar cualquier número por 0, es producto siempre es 0” (Rodríguez *et al*., 2018, p. 85); “Para multiplicar por 4 puedes multiplicar por 2 y el resultado multiplicarlo por 2” (Rodríguez *et al*., 2018, p. 65), entre otros.
- *Procedimientos*. Los procedimientos son numéricos, tabulares y figurales (icónicos). Para las tareas de tipo estructural se hace uso de la propiedad distributiva para obtener el resultado de una multiplicación de un número de tres dígitos (ver figura 10). En tareas funcionales los procedimientos se apoyan en el uso de tablas para determinar características como la disminución o aumento en una sucesión con el objetivo de identificar el patrón de formación, lo cual se reproduce en tareas donde se identifican patrones numéricos de adición, sustracción, división y/o multiplicación.

Figura 10. Ejemplo de SP1 (Rodríguez *et al*., 2018, p. 68)

- *Argumentos*. Estos objetos se apoyan en la observación, se presentan en lenguaje natural, auxiliándose de tablas u operaciones aritméticas, así como en figuras (iconos) que representan a los objetos matemáticos. En la figura

10 los argumentos se representan con ejemplos que afirman las proposiciones que se establecen.

En síntesis, se ha identificado que en las prácticas matemáticas intervienen símbolos (x, y y z) que refieren a ejemplos reconocidos (números, principalmente), pero no se opera con dichos objetos. Se identifican propiedades (del 0 y el 1 en la multiplicación y división, propiedad distributiva), equivalencias numéricas usando la balanza, mientras en tareas sobre generalización de patrones se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal (identificar la regla o el patrón de formación).

4.2.3. Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 2 de Algebrización

Este *Nivel de Algebrización* se ha identificado solamente en prácticas matemáticas asociadas a las SP11, SP12, SP13 y SP14 (ver tabla 3) presentadas en el eje Pya. Se describen los objetos matemáticos identificados en el texto para este *Nivel*:

- *Lenguaje*. Se comienza a hacer uso de lenguaje simbólico-literal en situaciones-problema asociadas a la resolución y/o representación de ecuaciones ($x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con x, B y $C \in \mathbb{N}$) e inecuaciones ($x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$). Predomina el lenguaje natural, seguido de los lenguajes numérico y tabular, se observa además el uso de lenguaje icónico (figural) para representar sucesiones o ecuaciones e inecuaciones (ver figura 11).

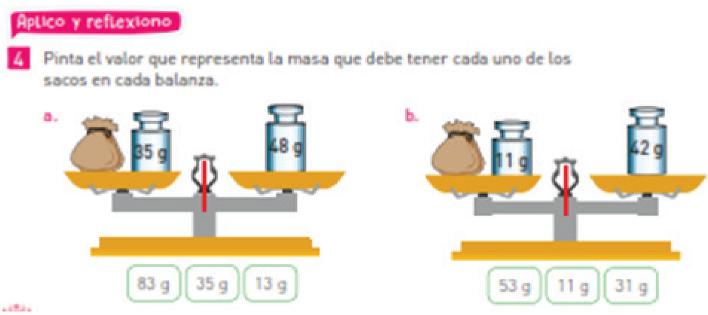


Figura 11. Ejemplo de SP13 (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 105)

- *Definiciones-conceptos*. Estos objetos matemáticos se encuentran en las secciones *Glosario* y *Conozco y practico*. Se presentan mediante lenguaje natural apoyados por representaciones de tipo simbólico-literal, tablas e iconos que permiten ejemplificarlas. Entre las definiciones se encuentran: ecuación, incógnita, modelar, operación inversa, patrón numérico, secuencia, valor encontrado, inecuación, balanza en desequilibrio, conjunto de números como solución. La figura 12 presenta la definición de inecuación.

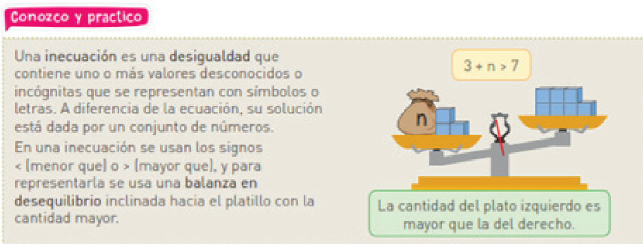


Figura 12. Definición del concepto de inecuación (Rodríguez *et al*., 2018, p. 110)

- *Proposiciones*. Se presentan en las secciones *Conozco y practico*. Aparecen mediante lenguaje natural, y se asocian con aspectos referentes a la resolución de ecuaciones o inecuaciones, así como con la identificación de patrones. Un ejemplo asociado a la identificación de patrones es "cuando la diferencia entre 2 números consecutivos de una secuencia numérica no es siempre la misma, puedes identificar un patrón de multiplicación o división" (Rodríguez *et al*., 2018, p. 97).
- *Procedimientos*. Aquí destacan aquellos donde las estrategias se direccionan a la manipulación de las incógnitas. Estas estrategias son aquellas donde se hace uso de la operación inversa para resolver ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$, con $x, B, C \in \mathbb{N}$ (ver figura 13). Otra de estas estrategias versa en la sustitución del valor encontrado para comprobar las soluciones; para el caso de las inecuaciones se encuentran los procedimientos de ensayo y error y el uso de balanzas, mientras que para la comprobación se recurre a la sustitución del conjunto de valores encontrado en la representación simbólico-literal.

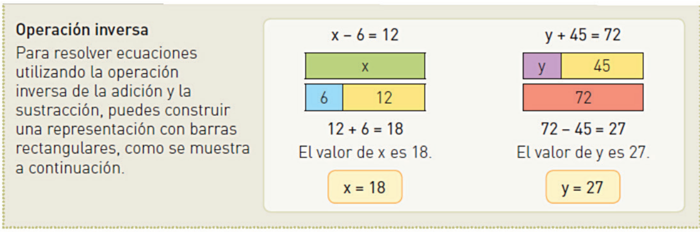


Figura 13. Operación inversa como estrategia para resolver ecuaciones (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 103)

- *Argumentos*. Se presentan mediante los lenguajes natural, numérico e icónico. Los argumentos se basan en la observación y en las operaciones numéricas para refutar o no los resultados obtenidos. La figura 14 muestra un argumento apoyado en elementos visuales y numéricos.

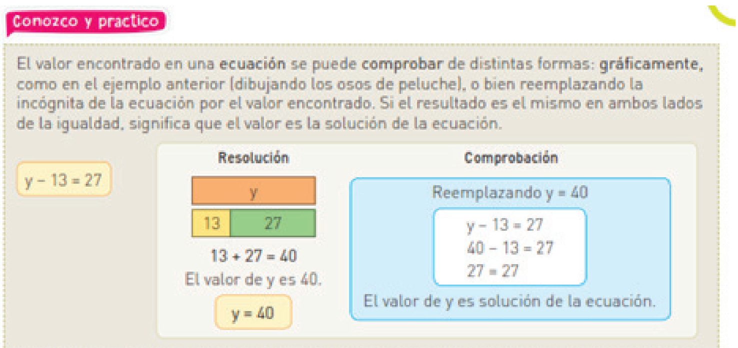


Figura 14. Ejemplo de SP13 (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 109)

Sintéticamente, se identificó la intervención de cantidades indeterminadas (lo desconocido) expresadas mediante lenguaje simbólico (x o y) que refiere a los intensivos reconocidos, aunque ligados a contextos específicos. Los procedimientos o estrategias de resolución se comienzan a direccionar a la manipulación de tales incógnitas para resolver ecuaciones e inecuaciones de las formas $x \pm B = C$, $B \pm x = C$, $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con $x, B, C \in \mathbb{N}$. Se identifican tareas donde se reconoce la generalidad (patrones numéricos), aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

4.3. Resultados de los análisis realizados a los textos de 2º, 3º, 5º y 6º básico

Se presentan, grosso modo, los resultados obtenidos del análisis de los textos para los niveles educativos de 2°, 3°, 5° y 6° básico. Para el segundo básico se han identificado 12 tipos de problemas asociados al desarrollo del RAE propuestos tanto en el eje de Nyo como el de Pya. Las prácticas matemáticas analizadas se asocian solo a los *Niveles 0* y *1*; a diferencia del texto de 1° básico, en el cual existen prácticas matemáticas promovidas, en el eje Nyo, propias del *Nivel 1*. En las prácticas matemáticas asociadas al *Nivel 0*, predomina el lenguaje de tipo numérico, seguido del lenguaje natural con el cual se describen conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos; el lenguaje icónico sirve como apoyo visual, principalmente para los procedimientos. La noción de lo desconocido se vincula al trabajo aritmético (sentencias numéricas, por ejemplo, $40 + 18 = \square$) y el valor se obtiene como resultados de operaciones (sumas o restas) sobre objetos particulares (números).

Con respecto a las prácticas matemáticas asociadas al *Nivel 1*, los objetos matemáticos se presentan mediante lenguajes natural, numérico, icónico y tabular. En tareas estructurales se reconocen propiedades como la conmutativa (por ejemplo, se le solicita al estudiante que observe la sentencia $12 + 5 = 5 + 12$ y pinte V si la sentencia es verdadera o F si es falsa, argumentando su respuesta), así como equivalencias numéricas (presentadas generalmente haciendo uso del concepto de balanza). Los patrones se presentan mediante los lenguajes numérico e icónico y la generalidad se reconoce en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

En el texto de 3° básico se caracterizaron 15 tipos de problemas, las prácticas vinculadas a éstos se asocian a los *Niveles 0*, *1* y *2 de Algebrización*. Las prácticas matemáticas de los *Niveles 0* y *1* comparten características de las antes descritas, pero para este nivel educativo se amplía el estudio a las operaciones de multiplicación y división, los números naturales se trabajan hasta el 1000; se comienza a hacer uso de la recta numérica y se inicia el estudio de las fracciones (representación y comparación, respectivamente).

En las prácticas del *Nivel 2 de Algebrización* se introducen nociones como ecuación, patrón, igualdad y desigualdad. Las tareas se asocian a la descripción y registro de patrones en secuencias numéricas y figurales, así como en tablas de 100, mediante estas tareas se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. Se representan ecuaciones (mediante balanzas y sentencias del tipo $a + \square = b$, $\square + a = b$, donde a y b son números naturales) resueltas mediante la suma y la resta en contextos de resolución de problemas. Las incógnitas se representan mediante figuras (cuadrados, triángulos, círculos, entre otros).

Para 5° básico se han caracterizado 23 tipos de problemas asociados a prácticas matemáticas que movilizan objetos hasta del *Nivel 3 de Algebrización*, esto implica el trabajo en contextos algebraicos. La actividad aritmética (prácticas del *Nivel 0*) se desarrolla en contextos con números naturales (hasta el 1.000.000.000) y números racionales positivos (representados mediante fracciones y números decimales). El valor de lo desconocido se obtiene como resultado de operaciones sobre números o representaciones icónicas (para situaciones asociadas a las fracciones). En el caso de las fracciones y números decimales las operaciones se restringen a la suma y resta, mientras que en el contexto de los números naturales se recurre a las cuatro operaciones básicas.

Con respecto a los *Niveles* proto algebraicos (*Niveles 1* y *2*), se identifican en ambos ejes. Para el *Nivel 1*, las prácticas matemáticas vinculadas a tipos de problemas en el eje Nyo versan sobre el trabajo con propiedades de los números y operaciones (por ejemplo, aplicar e identificar las propiedades del 0 y 1 en las operaciones de multiplicación y división, o aplicar las propiedades asociativa y distributiva para calcular productos), y además se identifica la noción de equivalencia numérica (fracciones equivalentes). Para el eje Pya, las tareas consisten en identificar patrones, principalmente numéricos, y completar secuencias numéricas (términos muy próximos al último elemento dado de la secuencia).

El *Nivel 2* solo se identifica en prácticas matemáticas propuestas en el contexto del eje Pya. Las prácticas asociadas tratan sobre identificar patrones y completar secuencias, o bien determinar elementos de la secuencia dada la regla de formación, observándose la formulación de la regla general, expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. Predomina el lenguaje natural, seguido de los lenguajes numérico, icónico y tabular. En tareas de tipo estructural, se identifica el uso de lenguaje simbólico-literal y se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$, así como inecuaciones de la forma $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$.

Finalmente, el *Nivel 3* se asocia con el eje Pya, específicamente con situaciones-problema donde la consigna es elaborar transformaciones de expresiones simbólicas, en particular reducirlas conservando la equivalencia (ver figura 15). Predominan los lenguajes simbólico e icónico, los conceptos-definiciones se vinculan con expresiones algebraicas, términos semejantes, variable. Los procedimientos se apoyan en recursos visuales para ejemplificar, entre otros, la reducción de términos algebraicos.

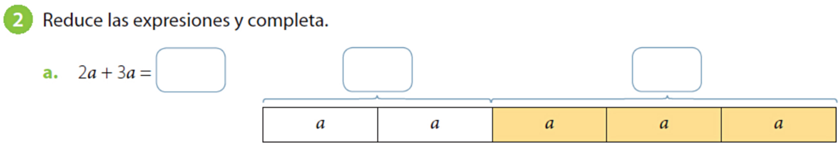


Figura 15. Tipo de problema Representar y transformar expresiones algebraicas (Kheong *et al.*, 2015/2017, p. 259)

Los resultados para el 6° básico son análogos, en términos de los *Niveles 0, 1* y *2 de Algebrización*, a los obtenidos en el 5° básico. En cuanto a la caracterización de tipos de problemas, para este nivel educativo se han propuesto 28 categorías. En el contexto del eje Nyo se introducen conceptos como múltiplos y factores, números primos y compuestos, mínimo común múltiplo, razones y porcentajes; en el contexto de los números decimales se introducen las operaciones multiplicación y división; predomina el trabajo en contextos aritméticos, identificándose situaciones-problema asociadas al *Nivel 1 de Algebrización* (actividad matemática ligada a la identificación de propiedades de estructura).

En cuanto al *Nivel 3 de Algebrización*, se generan objetos intensivos representados de manera simbólico-literal, y se opera con ellos (expresiones algebraicas, principalmente) conservando la equivalencia; se generan reglas canónicas mediante lenguaje simbólico-literal y apoyados en tablas de valores, se evidencia actividad algebraica consolidada. Entre los conceptos destacan término general, regla, posición del término (n), relación, valor del término, lenguaje algebraico. Los argumentos se basan en el uso de propiedades, por ejemplo, la propiedad conmutativa $(a + b = b + a)$ y en los contextos para verificar los valores obtenidos. Predomina el lenguaje algebraico, seguido de los lenguajes natural, numérico, icónico y tabular.

Resumiendo, se puede establecer que el currículo de Educación Básica en Chile, de primero a sexto básico, promueve prácticas matemáticas asociadas a los *Niveles 0, 1, 2* y *3 de Algebrización*. Como podría presuponerse, en el eje Pya se identificaron *prácticas matemáticas* en N*iveles* consolidados *de Algebrización*, en los cuales se establecen términos generales de una secuencia, así como la reducción de expresiones algebraicas, desarrolladas a través de lenguaje algebraico. En este eje se identificaron *prácticas* en *Niveles* menores *de Algebrización*

(*Niveles 0*, *1* y *2*). En ellas no se observa la manipulación ni el uso del lenguaje algebraico, sino que se establece, por ejemplo, a través de lenguaje numérico o materno, la generalización de patrones. Uno de los hallazgos más relevantes fue determinar que algunas de las *prácticas matemáticas* del eje Nyo, también son promotoras del RAE, aunque no en *Niveles* consolidados *de Algebrización*, sino en *Niveles Proto-algebraicos* (*Niveles 1* y *2*). A pesar de que hay un esfuerzo por introducir el álgebra temprana desde los primeros cursos, el tipo de tareas y *prácticas* son mínimas en cantidad comparadas con las tareas y *prácticas* de naturaleza aritmética en este eje, siendo las prácticas de *Nivel 0* las que mayor presencia tienen en el currículo. La figura 16 muestra la cuantificación de *prácticas* de cada uno de los textos por *Nivel de Algebrización*.

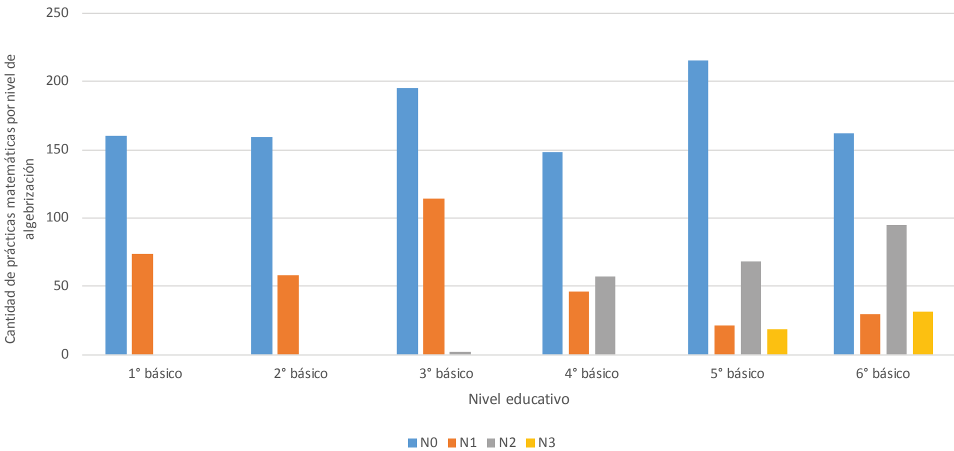


Figura 16. Distribución de prácticas matemáticas por nivel educativo y *Nivel de Algebrización*

La tabla 4 presenta la tipología de problemas identificadas en los textos de 2°, 3º, 5º y 6° básico, así como el número de prácticas matemáticas por *Nivel de Algebrización*.

Tabla 4. Prácticas matemáticas de referencia por tipo de problemas y *Nivel de Algebrización*

Eje	SP	Tipo de problemas	Nivel educativo				Total
			2º	3º	5º	6º	
Números y operaciones	1	Aplicar estrategias de cálculo mental	20_{N0} 1_{N1}	33_{N0}	21_{N0} 7_{N1}	1_{N1}	83
	2	Comparar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que, <, >, =).	17_{N0}	26_{N0} 4_{N1}	22_{N0}	7_{N0}	76
	3	Comparar y ordenar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que, <, >, =)	10_{N0}	9_{N0}	10_{N0}	1_{N0}	30
	4	Descomponer cantidades numéricas en factores primos				2_{N0}	2
	5	Determinar el mínimo común múltiplo de cantidades numéricas				3_{N0}	3
	6	Determinar múltiplos, factores y divisores de cantidades numéricas				7_{N0}	7
	7	Estimar cantidades por medio del redondeo de cifras			29_{N0}		29
	8	Identificar la condición para saber cuándo un elemento pertenece a un conjunto y resolver problemas	2_{N0}				2
	9	Identificar los múltiplos de números naturales				1_{N0}	1
	10	Identificar propiedades de las operaciones	16_{N1}	8_{N1}	1_{N1}	4_{N1}	29
	11	Identificar reglas y/o propiedades al trabajar con conjuntos de números (decimales, primos, compuestos, razones o porcentajes)				3_{N1}	3
	12	Identificar reglas y/o propiedades del mínimo común múltiplo				1_{N1}	1
	13	Identificar y representar mediante un número la cardinalidad de un conjunto	21_{N0}	4_{N0}	1_{N0}		26
	14	Operar cantidades numéricas (suma, resta, multiplicación y/o división)	36_{N0}	21_{N0}	52_{N0}	59_{N0} 1_{N1}	169
	15	Realizar conversiones entre sistemas numéricos		4_{N0}	7_{N0}		11
	16	Representar e identificar fracciones equivalentes			6_{N1}	10_{N1}	12
	17	Representar problemas a través de expresiones numéricas			1_{N0}		1
	18	Representar y resolver problemas a través de números racionales positivos (fracciones y/o decimales)			58_{N0}	49_{N0} 2_{N1}	109

Números y operaciones	19	Representar y resolver problemas haciendo uso de razones y/o porcentajes				23_{N0}	23
	20	Resolver problemas a través de una de las operaciones básicas	48_{N0}	96_{N0}	26_{N0}	32_{N0} 1_{N1}	203
	21	Resolver problemas haciendo uso de dos o más de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y/o división)			13_{N0}	5_{N0} 1_{N1}	19
	22	Resolver problemas haciendo uso del mínimo común múltiplo				9_{N0}	9
Patrones y álgebra	23	Determinar los elementos de una secuencia dada la regla de formación	17_{N1}	1_{N0} 29_{N1} 2_{N2}	4_{N1} 6_{N2}	10_{N1} 3_{N3}	72
	24	Identificar expresiones algebraicas y/o numéricas				1_{N2}	1
	25	Identificar la regla (patrón) de formación	2_{N1}	12_{N1}	2_{N1}	2_{N1} 1_{N2} 5_{N3}	24
	26	Identificar la regla (patrón) de formación y completar la secuencia	12_{N1}	35_{N1}	7_{N1}, 5_{N2}	7_{N1} 12_{N2} 8_{N3}	81
	27	Identificar la representación de ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con $x, B, C \in \mathbb{N}$		1_{N1}		1_{N2}	2
	28	Representar ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con $x, B, C \in \mathbb{N}$		4_{N1}		5_{N2}	9
	29	Representar y resolver ecuaciones de la forma $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$		12_{N1}	18_{N2}	34_{N2}	64
	30	Representar y resolver inecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con x, B y $C \in \mathbb{N}$			7_{N2}		7
	31	Representar y transformar expresiones algebraicas			19_{N3}	2_{N2}	21
	32	Representar y/o resolver problemas a través de expresiones algebraicas			11_{N2}	11_{N2} 15_{N3}	37
	33	Resolver (implícitamente) ecuaciones de la forma $x \pm B = C$ con $x, B, C \in \mathbb{N}$	11_{N1}				11
	34	Resolver ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con x, B y $C \in \mathbb{N}$		9_{N1}	3_{N2}	17_{N2}	29
	35	Resolver inecuaciones de la forma $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$			2_{N2}		2
	36	Evaluar y/o comparar expresiones algebraicas			16_{N2}	8_{N2}	24

Fuente: Elaboración de los autores

5. REFLEXIONES FINALES

Los resultados de esta investigación ofrecen información interesante sobre las características del RAE en el currículo de Educación Básica en Chile. Se ha evidenciado que no sólo las *prácticas matemáticas* asociadas al eje de Pya son promotoras de este tipo de razonamiento, pues los resultados apuntan a la existencia de *prácticas matemáticas* en el contexto aritmético que podrían catalogarse como promotoras del RAE, en *Niveles* incipientes *de Algebrización*. Entre las características identificadas del Álgebra temprana en el currículo de Chile, destacan conceptos como generalización de patrones, el desarrollo y manipulación del lenguaje simbólico-literal, y la resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado (Molina, 2009). Otro resultado versa sobre la existencia de tareas transversales (ver SP1, SP23, SP25, SP26, SP29, SP32 y SP34 en tabla 4), es decir, tipos de SP presentes en dos o más cursos, y donde sus *prácticas matemáticas* progresan de lo concreto a lo pictórico (icónico) y, de ahí, a lo simbólico (abstracto), lo que, además, muestra que existe una progresión en los *Niveles de Algebrización*.

Además, se ha observado que un tipo de problema admite una o más *prácticas matemáticas* de referencia, las cuales pueden ser catalogadas en un *Nivel* u otro *de Algebrización*. Con esto se reafirma lo señalado por Godino y colaboradores (2014), "el nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro" (p. 206). Si bien se ha identificado que el currículo de educación básica en Chile promueve *prácticas matemáticas* en *Niveles* consolidados *de Algebrización*, en la figura 16 se observa la poca presencia de este tipo de prácticas y el gran desequilibrio que existe entre el *Nivel 0* y el resto de los *Niveles de Algebrización*.

Se esperaría que los *Niveles 1*, *2* y *3* se equilibraran de manera progresiva a lo largo de los seis niveles educativos, respecto de la cantidad de *prácticas* asociadas al *Nivel 0*. Sería conveniente aumentar en los textos el número de situaciones-problemas cuya resolución admita el uso de diversos *Niveles de Algebrización*. Asimismo, sería interesante que los libros destinados al profesor (Guía del Docente) proporcionen ejemplos sobre cómo, a partir de una determinada SP, del tipo 'identificar la regla (patrón) de formación y completar la secuencia' o 'aplicar estrategias de cálculo mental', se pueda ir variando la respuesta (i.e., uso de distintas *prácticas matemáticas* para la solución) buscando promover distintos niveles de RAE.

Como se ha planteado anteriormente, el objetivo de este estudio se centra en el análisis de las *prácticas matemáticas* de referencia (las propuestas por el MINEDUC) en los libros de texto, y no en las *prácticas matemáticas personales* de los estudiantes. Ello se justifica en que, si bien es importante conocer y analizar este último tipo de *prácticas*, el análisis de las *prácticas matemáticas* de referencia da conocimiento sobre cómo los estudiantes deberían resolver las tareas que se plantean en los textos de estudio supeditados a lo que se estipula en las Bases Curriculares para Educación Básica de Chile (MINEDUC, 2018). Además, se considera que la caracterización aquí realizada puede ser útil tanto para profesores en activo, como para futuros profesores de educación básica, ya que se considera la selección de tareas (problemas, ejercicios, actividades) propuestas en el currículo (planes de estudio, libro de texto), como una actividad característica de la práctica de enseñar matemáticas (Watson y Thompson, 2015). Se espera que esta caracterización permita a los investigadores y profesores contar con material para el diseño y desarrollo de SP vinculadas a la promoción del RAE, adecuadas al curso donde se propongan, e identificar así cuáles serían las *prácticas matemáticas* que se deberán poner en juego para promover un *Nivel* u otro *de Algebrización*.

Aunque a nivel internacional existe un gran número de investigaciones en la línea del Álgebra temprana, en el contexto chileno la realidad es distinta, ya que los estudios relacionados con este tema se circunscriben al trabajo de Mejías y colaboradores (Mejías, 2019; Mejías y Alsina, 2020), debido a la relativamente reciente integración del álgebra (desde 2012) a la Educación Básica, su adecuación curricular y posterior implementación (MINEDUC, 2018).

Los *Niveles de Algebrización* son considerados como una herramienta teórico-metodológica con gran potencial para predecir la actividad matemática asociada al desarrollo del RAE; sin embargo, el análisis desarrollado ha mostrado la necesidad de refinar los *Niveles de Algebrización* ya que existen *prácticas matemáticas* que no responden en su totalidad a las características de un *Nivel* u otro. Por ejemplo, en el estudio del objeto matemático patrón en los primeros niveles (1° y 2°, respectivamente), existen *prácticas matemáticas* en las que se trabaja vía ejemplos particulares que buscan reconocer el patrón de formación, relacionando un término con el siguiente (o con elementos cercanos al último elemento presentado en una secuencia), que permiten identificar aspectos relacionados con la generalización, expresados en un lenguaje diferente al simbólico-literal. Este ejemplo evidencia que, en respuestas esperadas o de los estudiantes, es posible adoptar de forma articulada los elementos de los *Niveles 0* y *1 de Algebrización*.

Se desconoce si las tareas propuestas en el currículo chileno cumplen con la generación de bases sólidas para el desarrollo del pensamiento algebraico en niveles educativos superiores a los aquí analizados. Se reconoce que los resultados obtenidos en esta investigación han sido fruto del análisis de textos del estudiante propuestos por el MINEDUC, existiendo otros textos autorizados para el estudiante de distribución privada, los cuales no fueron analizados en esta investigación. Queda como posible línea de continuidad estudiar si en ellos existen otro tipo de *prácticas matemáticas* asociadas al razonamiento algebraico promovido en la Educación Básica en Chile.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo desarrollado en el marco del Proyecto Fondecyt Regular Nº 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

REFERENCIAS

Aké, L. P. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática, 30*(2), 171-201. https://doi.org/10.24844/em3002.07

Ayala, C., Benavides, M. y Frías, M. (2017). *Texto del Estudiante Matemática 2º Básico*. Ediciones SM Chile.

Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the Chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore), 8*(1), 107-130.

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early Algebrización: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705) Information Age Publishing, NCTM.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la educación primaria (6-12 años) en Estados Unidos.

Journal for the Study of Education and Development: Infancia y Aprendizaje, 42(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Castro, W. F., Godino, J. D. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 25*, 73-88.

Castro, W. F., Martínez-Escobar, J. D. y Pino-Fan, L. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education, 6*(2), 164-191. https://doi.org/10.4471/redimat.2017.1981

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Autor. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf

Cortés, C. (2018). *Matemática 1º año básico. Texto del Estudiante*. Ediciones Cal y Canto.

Creswell, J. W. (2009) Qualitative procedures. En J. H. Creswell (Ed.), *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (3ra ed., pp. 173-202). SAGE.

Espinoza, R., Pochulu, M. y Jorge, M. (2013). El análisis didáctico de textos escolares ¿qué herramientas proveen las diferentes líneas y enfoques en educación matemática? En E. Rodríguez (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Congreso llevado a cabo en Montevideo, Uruguay.

Fong, N. S. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore), 8*(1), 39-59.

García-Mateos, A. y Caballero-García, P. A. (2005). *La tecnología digital en el aula: un instrumento al servicio de los procesos de enseñanza-aprendizaje*. Universidad Camilo José Cela.

Gil, J. F. (1994). *Análisis de Datos Cualitativos. Aplicaciones a la investigación educativa*. PPU.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 26*(42B), 483-511. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. (ED441664). ERIC. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441664.pdf

Kheong, F. H., Soon, G. K. y Ramakrishnan, C. (2017). *Matemática 5º Básico. Texto del Estudiante* (P. Q. Leong y R. Hidalgo, Trads.). Santillana del Pacífico. (Trabajo original publicado en 2015)

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Lacampagne, C. B., Blair, W. y Kaput, J. (Eds.). (1995). *The Algebra Initiative Colloquium Volume 1: Plenary and Reactor Papers*. Office of Educational Research and Improvement.

León, O. G. y Montero, I. (2003). Metodologías cualitativas. En O. G. León y I. Montero (Eds.), *Métodos de Investigación en Psicología y Educación* (3ra ed., pp. 138-177). McGraw-Hill.

Lew, H.-C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator (Singapore), 8*(1), 88-106.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 113-120. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90026-8

Maldonado, L. y Castro, C. (2016). *Matemática 6º Básico. Texto del Estudiante*. Santillana.

Mejías, C. A. (2019). *Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria* (Tesis doctoral, Universidad de Girona). Repositorio Digital de la Universitat de Girona. https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/17137

Mejías, C. y Alsina, À. (2020). La incorporación del Early Algebra en el currículo de educación primaria. *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 105*, 81-102.

Ministerio de Educación de Chile. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Autor.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 3*(3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA, 34*(2), 123-150. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2013.p123-150.id522

Rodríguez, R., García, D., Romante, M. y Verdejo, A. (2018). *Texto del Estudiante. Matemática 4º Básico*. Ediciones SM Chile.

Rojano, T. y Sutherland, R. (2001). Arithmetic world-algebra world. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (vol. 1, pp. 515-522). The University of Melbourne.

Urra, A., Córdova, C. y Quezada, C. (2017). *Matemática 3º Año Básico. Texto del Estudiante*. Ediciones Cal y Canto.

Wagner, S. y Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En C. Kieran y S. Wagner (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra: The Research Agenda for Mathematics Education, Volume 4* (pp. 220-237). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315044378

Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 183-194). NCTM.

Watson, A. y Thompson, D. R. (2015). Design issues related to text-based tasks. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education: An ICMI Study 22* (pp. 143-190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_5

Ana Luisa Llanes Luna

Dirección postal: Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos.
Lord Cochrane 1039, Osorno, Chile

Teléfono: (+56) 642333063