Zubía 21 119-128 Logroño 2003

SIXTO CÁMARA Y LOS FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES*

JOSÉ JAVIER ESCRIBANO BENITO[1]

RESUMEN

El matemático riojano Sixto Cámara fue pionero en la introducción de la enseñanza de la estadística matemática en la universidad española. En este artículo realizamos un estudio histórico del discurso "El azar y los fundamentos del cálculo de probabilidades", que Cámara pronunció en la apertura del curso académico de 1933/1934 en la Universidad de Valencia. En él, Cámara hace un análisis de la evolución histórica de los fundamentos matemáticos y filosóficos del cálculo de probabilidades. Se trata de una exposición bien documentada, con numerosas citas bibliográficas y un enfoque que, exceptuando algunos matices subjetivos, resalta aquellos aspectos que hoy se consideran más relevantes.

Palabras claves: Sixto Cámara, cálculo de probabilidades, matemáticas, filosofía, España, siglo XX.

ABSTRACT

The Spanish Mathematician Sixto Cámara was one of the first at introducing the Mathematical Statistics teaching in the Spanish University. In this article it is made a historic study of the speech "Chance and Foundations of Probability Calculus" which was mentioned by Cámara during the opening of the 1933/1934 academic course. In his speech, Cámara analyses the historic evolution of the mathematics and philosophic foundations in probability calculus. In fact, it is a well-documented exposition

* Este trabajo ha contado con una Ayuda a la Investigación del Instituto de Estudios Riojanos de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de La Rioja.

Recibido el 12 de marzo de 2002. Aprobado el 16 de enero de 2003.

1 I.E.S. "Valle del Cidacos" Calahorra (La Rioja).

with numerous bibliographic references and an approach which, excluding some subjective nuances, emphasizes the aspects considered more important these days.

0. INTRODUCCIÓN

Para varias generaciones de matemáticos, científicos y técnicos; Sixto Cámara Tecedor (Baños de Rioja, 1878- Castañares de Rioja, 1964) es, fundamentalmente, el autor de los *Elementos de Geometría Analítica,* texto que a lo largo de sus cuatro ediciones (1919, 1941, 1945 y 1964) constituyó un obligado punto de referencia en la enseñanza universitaria de la materia. Sin embargo, Cámara trabajó en diferentes campos: geometría sintética, álgebra, balística, geometría analítica y estadística, que se fueron sucediendo en el tiempo marcando claramente la evolución en los gustos e inquietudes profesionales de su autor. Todos ellos contribuyeron al necesario progreso de la retrasada matemática española de su época[1].

En esta línea de innovación puede situarse el discurso que ahora nos proponemos describir y analizar: *El azar y los fundamentos del cálculo de probabilidades.* En él, Cámara hace un análisis de la evolución histórica de los fundamentos matemáticos y filosóficos del cálculo de probabilidades. El discurso fue pronunciado en la apertura del curso académico de 1933/1934 en la Universidad de Valencia, cuando Cámara preparaba las oposiciones a la cátedra de Estadística Matemática de la Universidad Central. Finalmente, la plaza la obtendría otro matemático riojano, Olegario Fernández-Baños (Badarán, 1886- Madrid, 1946), quien se convirtió así en el primer catedrático de la materia en la universidad española.

1. AZAR Y LOS FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

El *Discurso* consta de 83 páginas, las once primeras dedicadas a consideraciones protocolarias propias de estos actos, en las cuatro siguientes hace un llamamiento a los estudiantes para que perseveren en el trabajo poniendo como modelo los descubrimientos realizados en su juventud por diferentes genios: Galileo, Newton, D'Alembert, Lagrange, Laplace... ; en las páginas 16-77 desarrolla el tema propuesto y las seis últimas contienen las referencias bibliográficas. Son muchos y bien seleccionados los libros citados, pero la mayor inspiración proviene de dos obras de G. Du Pasquier: *Le calcul des probabilités. Son évolution mathématique et philosophique* (Paris, 1926) y *Sur les nouveaux fondements philosophique* (Congreso de Bolonia, 1928).

Aunque en el *Discurso* no se distinguen párrafos y las ideas aparecen a veces entrelazadas, se observa una estructura en torno a tres conceptos claves: previsión, azar y probabilidad. La previsión surge como adivinación del porvenir [p. 16], el azar como elemento de enlace entre el individuo y la colectividad de individuos: "Aunque los hechos aislados no pueden preverse, sea por la causa que fuere, su conjunto viene a constituirse un ente colectivo sujeto a las leyes que suelen llamarse *leyes del azar* [p. 24]; y el cálculo de probabilidades que como disciplina matemática, puede construirse axiomáticamente prescindiendo de la experiencia... pero la aspiración es que el enlace con la realidad sea tan íntimo como el que exis-

1 Con relación a la obra de Cámara, véase Escribano (2000).

te entre la Geometría Euclidiana y nuestra concepción del mundo físico" [p. 30]. Hay que resaltar, por tanto, que Cámara introduce el azar antes que la probabilidad, como corresponde al desarrollo lógico de estos conceptos y al contrario de lo que seguimos leyendo en algunos textos actuales.

2. EL AZAR Y SUS LEYES

Para la ciencia clásica, señala Cámara, el porvenir es una consecuencia del *principio de causalidad.* La interpretación rigurosa de este principio pasa por el determinismo –ejemplarizado en Laplace– que conduce al fatalismo como dogma incontrovertible:

> "Si las leyes de la dinámica son ciertas (y hay que contar con que están basadas en postulados innegables para nuestra compresión), si en un instante determinado un ser omnisciente conociese la posición y las velocidades de todos los corpúsculos (electrones, fotones,...), con la fuerza que están sometidos, podría predecir, para una época futura cualquiera, las posiciones y velocidad de todos los elementos constitutivos del Universo. Pero, es más todavía: suponiendo que el pensamiento y la voluntad no fuesen otra cosa que un fenómeno físico resultante de los ciclos ultramicroscópicos descritos por dichos elementos puntuales en las células, el estado de todo el Universo con el pensamiento, los dolores, los goces, etc. de todos los seres biológicos y no biológicos, en una época futura cualquiera estaría previamente determinado" (Cámara, 1933, p. 7).

La primera parte de este párrafo es, en efecto, una interpretación de las célebres palabras con que Laplace había expresado (*Théorie analytique des probabilités)* el ideal determinista de la ciencia:

> "Debemos considerar el estado presente del universo como efecto de un estado anterior y como causa del que seguirá. Una inteligencia que, en un instante dado, conociera todas las fuerzas de que la naturaleza está animada y la situación respectiva de los seres que la componen, si fuera bastante vasta para someter estos datos al cálculo abarcaría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del más ligero átomo: nada sería incierto para ella y lo mismo el futuro que el pasado estarían presentes ante sus ojos" (Abbagnano, 1994, pp. 608-609).

Pero Laplace, que había construido su *Mécanique céleste* sin necesitar la "hipótesis de Dios", representa también –y esto no queda reflejado en el discurso de Cámara– la evolución del determinismo religioso hacia un determinismo científico que sustituye la ley divina por la ley natural. En la segunda parte del párrafo Cámara se hace eco del "problema del libre albedrío" que se remonta a la antigüedad pero que seguía de plena vigencia en esta época[2]. Así Compton, que fue

2 El estoicismo, en filosofía, y en religión el mahometismo y el budismo admiten la hipótesis determinista (debemos hablar de hipótesis puesto que ni la doctrina determinista ni su contraria son susceptible de pruebas (Ferrater, 1998, T. 1, p. 847). Kant afirmaba el determinismo en relación con el mundo

uno de los primeros en analizar los problemas éticos derivados del postulado de indeterminación de Heisenberg, escribía en 1935:

"Si los átomos que componen nuestro cuerpo obedecen las leyes físicas tan inmutables como los movimientos de los planetas ¿por qué esforzarse?, ¿qué importa la magnitud de nuestro esfuerzo, si nuestros actos ya están predeterminados por leyes mecánicas?" (Gutiérrez, 1992, p. 54).

Frente a las concepciones deterministas, Cámara contrapone los avances de la mecánica cuántica:

"Desde la introducción de los quantas de Planck en 1905 en que comienza la demolición del antiguo apotegma *natura no facit saltus,* va adueñándose del pensamiento de los físicos la necesidad de una revisión de los fundamentos. Las nociones físicas aplicables a los fenómenos atómicos experimentan una limitación como consecuencia de la teoría de los quantas, cuyo postulado afirma que *todo proceso atómico lleva en sí el sello de discontinuidad o de individualismo caracterizado por el quantum de acción de Planck*" (Cámara, 1933, p. 18).

Como ejemplo de esta nueva orientación cita los resultados del V Congreso del Instituto Internacional de Física de Solvay celebrado en Bruselas en 1927 donde Lorentz, Born, Heisenberg, Bohr, de Broglie, Schrödinger, Einstein, Dirac, Compton... discutieron las nuevas ideas e interpretaciones resultantes del estudio de las teorías de los quantas. Es aquí donde Heisenberg formuló las *relaciones de incertidumbre* que establecen [pp. 21-22] la existencia de una serie de magnitudes como la energía (W), la componente de la cantidad de movimiento (p), las coordenadas (q) [coordenada instantánea de la posición], el tiempo (t)..., que tomadas separadamente puedan ser medidas y definidas con precisión pero cuando se quieren medir simultáneamente magnitudes conjugadas no se puede pasar de un límite de indeterminación característico [la constante de Planck (h)]

$$dW.dt \geq h \qquad dp.dq \geq h.$$

Por tanto, "La frase *si fijamos la posición y la velocidad inicial...* en que se apoya el determinismo de la Mecánica Racional no tendrá ya sentido, más que en el campo de la abstracción matemática" [p. 22]. La posición extrema de esta interpretación –sigue diciendo Cámara– viene dada por Dirac que considera los sistemas aislados inobservables (porque observar es perturbar), y "como la física no se ocupa sino de magnitudes observables la teoría determinista clásica es indefendible".

Esta opinión es una interpretación radical de lo expuesto por Heisenberg en el sentido de que las interacciones producidas al observar una experiencia –que en mecánica clásica se consideran despreciables– dentro de la mecánica cuántica pueden producir, a causa de la discontinuidad de los acontecimientos atómicos, variaciones incontrolables. Por tanto, la teoría cuántica solo puede hacer previsiones *probables* basadas en estadísticas oportunamente determinadas y no previsiones *seguras.* Aunque esta afirmación fue utilizada, como señala Cámara, para reforzar

de los fenómenos (la clásica noción racionalista de la causalidad como vinculación necesaria de las cosas), pero no en relación con el mundo nouménico de la libertad. La misma teología cristiana, que admite la existencia del libre albedrío, está influenciada por esta doctrina. Muy conocida es, en este sentido, la frase de San Agustín: "nada ocurre por azar, estando todo y en todo momento controlado por la voluntad de Dios".

Núm. 21 (2003), pp. 119-128 ISSN 0213-4306 | Zubía

las tesis antideterministas, para otros autores (Ferrater, 1998, T. II, p. 1786) prueba justamente lo contrario: puesto que el indeterminismo es el resultado de una interacción, si ésta pudiera eliminarse desaparecería el indeterminismo. Por ejemplo, Planck (*Der Kausalbegriff in der Physik*, 1932) pretendió salvar el determinismo riguroso recurriendo "a la hipótesis de un espíritu ideal que, a diferencia del hombre, no forma parte de la naturaleza ni experimenta sus leyes, de modo que pueda conocerlas sin influenciarla: naturalmente, para este espíritu, las relaciones de indeterminación no existirían" (Abbagnano, 1994, pp. 608-609).

Una vez que Cámara ha justificado la existencia del azar, desarrolla una serie de ejemplos en los que se manifiesta de forma empírica la presencia de unas *leyes del azar* que afectan a los colectivos como tales, con independencia de lo que suceda a cada individuo del mismo en particular. Para avalar esta afirmación Cámara cita la *ley de regresión de Galton*, la cinemática del vuelo de las gaviotas, el crecimiento de una especie y se detiene en la teoría de los gases con la *ley de distribución de velocidades de Maxwell*, en la creación de la mecánica estadística por Boltzmann, Gibbs, y Jeans, y en el *Postulado del caos molecular* (basta una variación infinitesimal en las condiciones iniciales de un sistema para que la evolución del sistema dinámico haya variado por completo), consecuencia a su vez del *Postulado de indeterminación de los datos físicos*.

Uno de los pioneros en el estudio del caos fue Henri Poincaré del que Cámara señala una cita como ejemplo de la escuela determinista: "Todo fenómeno por insignificante que sea tiene una causa; y un espíritu infinitamente poderoso e infinitamente bien informado de las leyes de la naturaleza, lo hubiera previsto desde el principio de los siglos" [p. 42]. Esta misma idea, recogida con mayor amplitud, nos indica que Poincaré adivinó la existencia del caos[3]:

> "...pero aun cuando las leyes naturales no tuvieran más secretos para nosotros, no podríamos conocer la situación inicial más que *aproximadamente*. Si esto nos permite prever la situación ulterior con la *misma aproximación*, que es todo lo que necesitamos, decimos entonces que el fenómeno ha sido previsto, que está regido por leyes. Pero no acaece siempre así; puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales las engendren muy grandes en los fenómenos finales; un pequeño error sobre los primeros produciría un error enorme sobre los últimos. La predicción entonces se vuelve imposible y nos encontramos con un fenómeno fortuito" (Sánchez Ron, 1996, pp. 54-55).

Aunque no existe contradicción entre las dos interpretaciones –pues esta incertidumbre no implica que el sistema sea indeterminista– parece claro que la cita de Cámara no refleja la opinión de Poincaré con todos sus matices.

3 El estudio del caos, iniciado a finales del siglo XIX con Jacques Salomon Hadamard y más tarde con Poincaré, se formalizó en los años setenta cuando Edward Lorenz introdujo el llamado "efecto mariposa" y René Thom desarrolló y divulgó la *Teoría de las catástrofes*. En la actualidad, la existencia de procesos caóticos está admitida por numerosos científicos y filósofos. Por ejemplo, el conocido matemático y astrónomo Jhon D. Barrow se expresaba así el 3-5-99: "Cualquier producto de la selección natural tiende a ser caótico,... existen cosas que no podemos predecir, como los sistemas complejos que se autoorganizan sobre la marcha: el cambio de clima o el flujo del tráfico en una autopista". *La Vanguardia Digital, 4/05/99.*

3. EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES: CONSTRUCCIÓN AXIOMÁTICA

Para Cámara, en la construcción científica del cálculo de probabilidades se da el caso paradójico de comenzar por el periodo matemático para retroceder al periodo experimental con la creación de la estadística como consecuencia de la demografía, los seguros, la economía y, finalmente, la biometría. Sin embargo, los actuales historiadores de la ciencia prefieren presentar el desarrollo de la estadística y del cálculo de probabilidades como dos ramas que avanzan de forma paralela, para converger después en la estadística matemática en una simbiosis iniciada por Lexis y Bortkiewicz a finales del siglo XIX y completada a lo largo de las décadas siguientes[4].

Cámara enumera los antecedentes del cálculo de probabilidades y de la estadística tal y como hoy los vemos recogidos en cualquier historia de esta materia: Cardano, Galileo, los problemas propuestos por el Caballero de Méré, el *Ars Conjectandi* (1713) de Bernoulli [Jacobo] donde aparece la ley de los grandes números, una ley natural a la que según la frase de Poisson "debían obedecer las grandes colectividades con la misma rigidez que los astros obedecen la de la gravitación Universal" [pp. 32-33], las tablas de mortalidad de Graunt (1662) y de Halley que permiten a de Moivre establecer "una ley empírica sobre la extinción de la vida humana". Al margen de estos primeros antecedentes, el trabajo de Cámara refleja muy bien los aspectos más significativos de ese conjunto de transformaciones que ahora denominamos "revolución probabilística"[5].

Junto con la teoría cinética de los gases y la mecánica ya comentadas, Cámara se interesa por la obra del astrónomo belga Aldolphe Quételet cuyos estudios sobre el comportamiento humano, a través del análisis de diferentes estadísticas: mortalidad, criminalidad..., le llevaron a formular la *teoría del hombre medio*[6]. La ley exponencial viene a constituir [p. 58] un dogma universal en el siglo XIX, a la cual debían obedecer todos los campos del conocimiento humano. Quételet cree que las desviaciones denunciadas por la experiencia son debidas a causas extrañas interpuestas acciden-

4 Entre las causas que impulsaron esta unión podemos citar (Gutiérrez, 1992, pp. 153-154): el fracaso de la inducción clásica y el deseo de construir una inducción probabilística, el inició de la biometría, el ocaso del determinismo físico, la aparición de la teoría de la medida y la teoría de juegos, y el desarrollo del análisis bayesiano.

Por su parte Ríos (1994, p. 138) señala que tras la publicación, en 1947, del tratado de Cramér "puede hablarse ya de Ciencia estadística integrada por la Teoría de la Probabilidad y la Estadística Matemática".

5 El concepto de *revolución científica* ha sido acuñado por Kuhn (1962) *The Structure of Scientific Revolutions* "... la clave de su teoría es la idea de la *revolución científica*, la cual conlleva un desarrollo no acumulativo, ni lineal de la ciencia, donde un paradigma es reemplazado por otro nuevo e incompatible. Durante los periodos de *ciencia normal*, se intercalan los de revolución científica, a consecuencia de lo que Kuhn, denominó *crisis*" (Peral *et al.*, 1997, p. 625).

Partiendo de este concepto son muchos los autores que como Krünger (1987) y Ríos (1994) vienen utilizando la locución *Revolución Probabilística* para designar "el conjunto de hechos que, en el intervalo 1800-1950, convirtieron la probabilidad en un elemento básico de las profundas transformaciones que se produjeron en la filosofía, las teorías científicas, las técnicas, e incluso en los comportamientos humanos de la vida diaria..." (Ríos, 1994, p. 135).

6 La obra más significativa Quételet es *Sur l' homme*, 1835 (reeditada en 1869 con el título de *Physique sociale*). Sus teorías de fueron muy criticadas en su momento por diversos científicos y filósofos, que veían en ellas una reducción del libre albedrío, pero no cabe duda de que supusieron un autentico revulsivo y una aportación muy significativa a la simbiosis entre la Estadística y el Cálculo de Probabilidades.

Núm. 21 (2003), pp. 119-128
ISSN 0213-4306 **Zubía**

talmente y Fechner intenta demostrar que todos los fenómenos biológicos obedecen a esta ley constatando, a fuerza de datos, justamente lo contrario: su insuficiencia para explicar los fenómenos biológicos. No obstante –sigue diciendo Cámara– la inercia sigue manteniendo la fe aun en los mismos teóricos hasta que Galton y Pearson sistematizan las investigaciones y formulan otras leyes distintas de la exponencial.

En sus investigaciones sobre la aplicación de los métodos estadísticos a los caracteres hereditarios, Galton estudió la distribución normal de manera exhaustiva e introdujo los conceptos de correlación y de líneas de regresión. Los trabajos de Galton fueron continuados por Pearson que dio a los métodos de correlación su forma moderna. Destacamos la introducción de estos conceptos porque a ellos se refiere Cámara en sus publicaciones. Pero quizás la mayor importancia de estos autores radica en haber creado, junto a Fisher, una escuela –la escuela inglesa– que toma el cálculo de probabilidades como base de la estadística que deja, por tanto, de ser exclusivamente descriptiva para convertirse también en inductiva.

Si la ley exponencial es ya insuficiente para describir todos los fenómenos sujetos a la ley del azar, el propio concepto de *probabilidad a priori* se apoya en sugestiones psicológicas –Cámara explica al respecto la conocida paradoja de Bertrand– y exige, por tanto, su perfeccionamiento. Cámara se fija en el *principio de la indiferencia* lo que parece adecuado puesto que el primer problema que plantea la definición clásica es asignar un criterio para determinar si los sucesos son equiprobables. También parece correcta la elección de Laplace, Cournot y Keynes para mostrar esta cuestión desde diferentes perspectivas, aunque sea discutible la interpretación que Cámara hace de alguna de sus ideas. Sin embargo, se echa en falta la mención de otros autores como J. von Kries que en 1886 (*Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung*) estudio con detalle la naturaleza filosófica de la probabilidad y formuló el *principio de la razón suficiente:* "on ne peut parler de cas *également possibles* qu'en raison de faits précis nous *obligeant* à les considérer comme tels" (Czuber, 1906, p. 3).

Para Laplace "el azar no es otra cosa que el nombre que damos a nuestra ignorancia" y la equiprobabilidad de los sucesos viene dada por la falta de una *razón suficiente* para seguir otros criterios. Según la escuela de Cournot la probabilidad es un concepto objetivo y está ligada "a la abstracción de un carácter o fenómeno o hecho determinado en la realización de un suceso". Cámara sintetiza estas diferencias del siguiente modo: "En la escuela de Laplace el azar no existe para Dios, lo cual no deja de ser una paradoja. La concepción de Cournot es más amplia. Según ella el azar existe para Dios porque para Él existe la abstracción" [p. 44].

En efecto, Cournot (Martin, 1996) al asegurar el carácter objetivo del azar, y correlativamente el valor objetivo de la probabilidad matemática, rompe con la concepción determinista de Laplace, pero su principal objetivo es crear una teoría exclusivamente matemática del cálculo de probabilidades desligada de cualquier otra interpretación metafísica; por ello no parece que la cita elegida por Cámara sea la más adecuada.

Si la concepción de azar de Cournot parece amplia aún lo es más la de Keynes que formuló así el *principio de indiferencia:* "Todos los elementos de un conjunto discreto son indistinguibles cuando en ellos no se tiene en cuenta otro carácter que el que los define como elementos de dicho conjunto" [p. 45]. Para establecer una distinción, hay que considerar otro carácter no común a todos:

> "Si el nuevo carácter b pertenece a v de los elementos de [el conjunto] C la distribución uniforme de la posibilidad se repite v veces en cada

> elemento, por lo que se dice que a cada uno corresponde $\frac{v}{n}$ de dicha posibilidad o que *la probabilidad de poseer el carácter b* en un elemento elegido al azar respecto de dicho carácter es $\frac{v}{n}$" (Cámara, 1933, p. 45).

La importancia de esta concepción filosófica de la probabilidad –que tal vez no aparezca bien reflejada en el *Discurso*– es su independencia de los experimentos aleatorios y, por tanto, de las interpretaciones frecuenciales comunes a las teorías matemáticas de von Mises o de Kolmogorov. La teoría de los *grados de creencia razonable* permite asignar una probabilidad "numéricamente medible" a cualquier proposición lógica y está representada por Keynes (*Treatise on Probability*, 1921) y Jeffreys (*Theory of Probability*, 1939)[7].

El principio de indiferencia (y el principio de la razón suficiente) no puede aplicarse en los conjuntos continuos en los que el número de posibilidades es infinito. A este respecto Cámara recoge el conocido problema de Poincaré: "¿Cuál es la probabilidad de que el punto *M* tomado al azar en un segmento rectilíneo *AB* esté comprendido entre otro *PQ*, contenido en *AB*?". La respuesta a esta pregunta depende, como es obvio, de la ley de probabilidad elegida, esto le lleva a profundizar en este concepto, a mostrar que todas las leyes de probabilidad tienen *algo en común* –que pueden tomarse como postulados– y abordar las transformaciones que dejan invariantes las leyes de probabilidad[8].

De todo lo anterior concluye la necesidad de "construir una teoría que venga a ser, respecto de los hechos fortuitos, lo que la Geometría Euclidiana y la Mecánica Racional son respecto de los cuerpos materiales y sus movimientos y relaciones mutuas, es preciso apoyarse en postulados de acuerdo con la experiencia, que puedan admitirse sin objeción alguna, exentos de críticas fundadas en apreciaciones psicológicas" [p. 59]. Entre los posibles modelos recoge "las orientaciones dadas por Mises y Du Pasquier, que se apoyan en los métodos de la Estocástica [la teoría de las colectividades basada en el Cálculo de las Probabilidades] partiendo de la teoría de los colectivos de Fechner, pero colocada en el punto de vista lógico de Cournot tiene el azar".

Para R. von Mises la idea fundamental es el *colectivo:* "primero ha de haber un colectivo, y luego se podrá hablar de probabilidad"[9]. Un colectivo es una sucesión de infinitos elementos –observaciones o pruebas experimentales– en los que se definen cuatro operaciones: *elección admisible*, *mezcla de caracteres*, *parcelación* y *composición de dos colectivos.* Cada colectivo conduce a un resultado numérico, llamado *probabilidad*, que se define como el límite de las frecuencias relativas, por lo que es necesario establecer dos postulados: uno relativo a la propia existencia del límite y el otro relativo a la *casualidad* que nos asegura que su valor no cambia cuando se pasa de un colectivo a otro mediante una *elección admisible* (una elección al azar).

Aunque la exposición de Cámara está orientada hacia la divulgación se detiene en señalar las dificultades que conlleva la aplicación práctica de esta definición, las mejoras que en ella introdujo Du Pasquier e incluye una definición propia de

7 Véase Cramér (1968, p. 174).

8 A este mismo tema dedicará el último de sus trabajos: "Transformaciones de las leyes de probabilidad", publicado por la revista *Euclides* en 1952.

9 Véase Wussing (1998, p. 285). En Mises (1946) puede encontrarse una exposición elemental de las ideas del autor traducidas al castellano.

límite estocástico[10]. No hace hincapié, sin embargo, en las dificultades que plantea la propia definición de probabilidad que contiene una mezcla de elementos empíricos y teóricos que usualmente se evita en las definiciones axiomáticas: "ello sería comparable, p. ej., a definir un punto geométrico, como el límite de una mancha de tiza de dimensiones infinitamente decrecientes" (Cramér, 1968, p. 174). En su momento la axiomática de von Mises contó con importantes defensores –como Du Pasquier o Wald– pero también fue fuertemente contestada tanto por los que podríamos llamar subjetivistas (Finnetti, Keynes, etc.) como por los puramente matemáticos (Fréchet, Khintchine, Kolmogorov) (Sales, 1984, p. 191). En general, la mayoría de los matemáticos de la época se inclinaron por la axiomática de Kolmogorov que asocia a cada suceso un numero (probabilidad) sin postular la existencia de límite. En los años 60 (Wussing, 1998, p. 285) se probó que el modelo de von Mises, ligeramente modificado servía también como fundamento del cálculo de probabilidades. Cámara no menciona el modelo de Kolmogorov, cuya obra clave *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* fue publicada en el mismo año (1933) que su *Discurso*[11]. Tampoco menciona los avances de la *Teoría de la Medida* que por esta época ya estaba plenamente desarrollada[12].

Cámara termina su *Discurso* con un llamamiento, de plena vigencia en la actualidad, para introducir los estudios del cálculo de probabilidades en la enseñanza secundaria, que justifica con una frase de Laplace: "no existe otra ciencia más digna de nuestras meditaciones y más útil que deba figurar en la instrucción pública".

4. CONCLUSIÓN

El discurso "El azar y los fundamentos del cálculo de probabilidades" es un trabajo bien documentado, con numerosas citas bibliográficas y un enfoque que, exceptuando algunos matices subjetivos, resalta aquellos aspectos que hoy se consideran más relevantes. Al mismo tiempo, la amplitud de los conceptos y la diversidad de las aplicaciones acreditan a Cámara como un buen conocedor de los avances científicos –no sólo matemáticos- de su época. Es necesario matizar, no obstante, que la aportación personal de Cámara al desarrollo del cálculo de probabilidades en España se centra en los aspectos metodológicos y didácticos[13].

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abbagnano, N., 1994. *Historia de la Filosofía. Vol III. La filosofía del Romanticismo. La filosofía entre los siglos XIX y XX.* 4ª ed. Hora, Barcelona.

Bombal Gordón, F., 1991. La Teoría de la Medida (1875-1925). *Seminario de Historia de las Matemáticas I.* Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense, 107-143.

10 Sobre este tema volverá a incidir en un artículo publicado en 1937: "Sobre algunas propiedades elementales de los límites estocásticos".

11 El propio Kolmogorov había expuesto unos años antes, en 1929, la primera formalización axiomática cuantitativa de la probabilidad (*Foundations of the Probability*) con una carácter formal y riguroso en la línea de los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert.

12 Véase Bombal (1991) y Martínez Pérez (1991).

13 Sobre la obra estadística de Cámara, véase Escribano (2000 y 2002).

Cámara Tecedor, S., 1933. El azar y los fundamentos del cálculo de probabilidades, Discurso leído en la solemne apertura del curso académico de 1933 a 1934 por [...]. Catedrático de la Facultad de Ciencias. *Anales de la Universidad de Valencia, Año XIV (cuaderno nº 105).*

Cramér, H., 1968. *Métodos Matemáticos de la Estadística.* 4ª ed. Aguilar, Madrid. (Traducido por E. Cansado de la 1ª ed. en inglés 1947).

Czuber, E., 1906. Calcul des probabilités. Exposé, d´après l´article allemand de E. Czuber (Vienne), par J. Le Roux (Rennes). *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées. Édition Française. Tome I, Volume 4, fascicule 1.* Paris, Gautthier-Villars. (Existe una reimpresión publicada en 1993 por Éditions Jacques Gabay, París).

Escribano Benito, J.J., 2000. *Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878-1964) en el contexto de la matemática española.* Universidad de La Rioja, Logroño (Tesis Doctoral).

Escribano Benito, J.J., 2002. La aportación de Sixto Cámara a la estadística española. En: A.H.E.P.E. *Historia de la Probabilidad y de la Estadística.* A.H.E.P.E.-Editorial AC, Madrid, 221-235.

Ferrater Mora, J., 1998. *Diccionario de Filosofía. Tomo IV (Q-Z).* Editorial Ariel, Barcelona. (Nueva edición revisada, aumentada y corregida por J. M. Terricabras, supervisada por P. Cohn Ferrater Mora, 1ª reimpresión).

Gutiérrez Cabria, S., 1992. *Filosofía de la Probabilidad.* Tirant Lo Blanch, Valencia.

Krünger, L., Daston, L., Heidelberger, M. (eds.), 1987. *The Probabilistic Revolution. Vol I: Ideas in History.* MIT Press, Cambridge.

Krünger, L., Gigerenzer, G., Morgan, M.S. (eds.), 1987. *The Probabilistic Revolution. Vol II: Ideas in the Science.* MIT Press, Cambridge.

Kuhn, T.S., 1962. *The Structure of Scientific Revolutions.* University of Chicago Press, Chicago.

Martin, T., 1996. Cournot et les mathématiques. En: E. Barbin et M. Caveing (ed.) *Les philosophes et les mathématiques.* Ellipse, París, 91-211.

Martínez Pérez, M., 1991. Algo más sobre la Teoría de la Medida (1904-1930): la paradoja de Banach-Tarski. En: *Seminario de Historia de las Matemáticas I.* Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid, 336-430.

Mises, R. von, 1946. *Probabilidad, Estadística y Verdad.* Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires. (Traducida por J. C. Grimberg).

Peral, D.; Estévez, P., Pulgarín, A., 1997. Presencia del pensamiento Kuhniano en la literatura científica: 1966-1995. *LULL 20 (39),* 623-635.

Ríos García, S., 1994. La revolución probabilística. En: *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1994) Curso de Conferencias sobre Historia de la Matemática en el siglos XIX (2ª parte).* Madrid, 135-147.

Sales i Vallès, F. d' A., 1984. Desenvolupament de les probabilitats en el segle XIX. En: M. Castellet (ed.) *El Desenvolupament de las Matemàtiques al segle XIX.* Institut D' Estudis Catalans, Barcelona, 183-192.

Sánchez Ron, J.M., 1996. *Diccionario de la Ciencia.* Editorial Planeta, Barcelona.

Wussing, H., 1998. *Lecciones de Historia de las Matemáticas.* Siglo XXI, Madrid.