Dom. Cien., ISSN: 2477-8818
Vol. 8, núm. 3. Julio-Septiembre, 2022, pp. 1246-1255

DOI: http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i3

Ciencias Matemáticas
Artículo de Investigación

Análisis de vectores tangente y normal unitario de funciones vectoriales en dos dimensiones

Unit Normal and Tangent Vector Analysis of Vector Functions in Two Dimensions

Análise de vetores normais e tangentes unitários de funções vetoriais em duas dimensões

Romel Manolo Insuasti Castelo [I]
rinsuasti@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-3946-9642

Denise Cristina Insuasti Guamantaqui [II]
dinsuasti@outlook.com
https://orcid.org/0000-0001-5214-176X

Luis Carlos Quilligana Guachi [III]
luis.quilligana@iste.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-2723-9850

Correspondencia: rinsuasti@espoch.edu.ec

***Recibido:** 29 de mayo del 2022 ***Aceptado:** 06 de junio de 2022 *** Publicado:** 20 de julio de 2022

I. Magíster en Matemática Básica, Ingeniero Mecánico, Docente en la Carrera de Ingeniería Automotriz, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
II. Ingeniera en Electrónica Control y Redes Industriales, Maestría (c) en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional, Certificación en Prevención de Riesgos Laborales, Prevención de Riesgos Laborales, Universidad Nacional de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
III. Magíster en Pedagogía de la Matemática, Licenciado en Ciencias de la Educación, Unidad Educativa "Bautista", Instituto Superior Tecnológico España, Ambato, Ecuador.

Resumen

El cálculo de vectores tangente y normal unitarios de funciones vectoriales, resulta un proceso que reviste encontrar las derivadas de la función vectorial, encontrar los módulos de los vectores y aplicar la definición quedando expresiones en ocasiones muy extensas, más aún cuando se calcula las derivadas presentes en la definición del vector normal unitario. Se puede abreviar este proceso cuando se evalúan estos vectores en un punto específico de la función vectorial, teniendo en cuenta el sentido de la trayectoria, lo que permitirá determinar el sentido del vector tangente y por ende el del vector tangente unitario, para luego aplicar la geometría determinándose que los vectores tangente y normal unitario son perpendiculares entre sí de módulo 1 y tienen la componentes intercambiadas en orden esto es la componente x del vector tangente unitario es la componente y del vector normal unitario, a su vez la componente y del vector tangente unitario es la componente x del vector normal unitario, los sentidos o signos de dichas componentes se toma considerando que el vector normal unitario siempre se encuentra dirigido al centro de curvatura del sector de curva alrededor del punto de análisis.

Palabras Claves: Vector tangente unitario; vector normal unitario; funciones vectoriales.

Abstract

The calculation of unitary tangent and normal vectors of vector functions is a process that involves finding the derivatives of the vector function, finding the modules of the vectors and applying the definition, leaving expressions on very extensive occasions, even more so when the present derivatives are calculated. in the definition of the unit normal vector. This process can be shortened when these vectors are evaluated at a specific point of the vector function, taking into account the direction of the trajectory, which will allow determining the direction of the tangent vector and therefore that of the unit tangent vector, in order to then apply the geometry determining that the unit tangent and normal vectors are perpendicular to each other of module 1 and have the components interchanged in order this is the x component of the unit tangent vector is the y component of the unit normal vector, in turn the y component of the tangent vector unit is the component x of the unit normal vector, the directions or signs of these components are taken considering that the unit normal vector is always directed to the center of curvature of the curve sector around the point of analysis.

Keywords: Unit tangent vector; unit normal vector; vector functions.

Resumo

O cálculo de vetores unitários tangentes e normais de funções vetoriais é um processo que envolve encontrar as derivadas da função vetorial, encontrar os módulos dos vetores e aplicar a definição, deixando expressões às vezes muito extensas, ainda mais quando as derivadas presentes são calculados na definição do vetor normal unitário. Este processo pode ser abreviado quando estes vetores são avaliados em um ponto específico da função vetorial, levando em consideração a direção da trajetória, o que permitirá determinar a direção do vetor tangente e, portanto, a direção do vetor tangente unitário, a fim de em seguida, aplique a geometria determinando que os vetores tangentes unitários e normais sejam perpendiculares entre si do módulo 1 e tenham os componentes trocados de forma que este seja o componente x do vetor tangente unitário é o componente y do vetor normal unitário, por sua vez o A componente y do vetor tangente unitário é a componente x do vetor normal unitário, as direções ou sinais dessas componentes são tomadas considerando que o vetor normal unitário está sempre direcionado ao centro de curvatura do setor da curva ao redor do ponto de análise.

Palavras-chave: Vetor tangente unitário; vetor normal unitário; funções vetoriais.

Introducción

En el estudio del movimiento de partículas en el plano existe la posibilidad de trabajar con las denominadas funciones vectoriales, las cuales representan una gran ayuda ya que estas al ser funciones propiamente dichas se puede aplicar el cálculo infinitesimal sin dificultad, es decir se pueden derivar e integrar con cierta facilidad.

Las funciones vectoriales también se las denomina como funciones vectoriales de valor real, esto quiere decir:

$$R: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Definida como:

$$R(t) = x(t)i + y(t)j$$

Donde R es una función continua, derivable o integrable, siempre y cuando $x(t) \wedge y(t)$ lo sean también, siendo estas las componentes de la función vectorial.

Las funciones $x(t) \wedge y(t)$, son funciones reales de valor real o también denominadas como las componentes de la función vectorial, deben ser continuas en el intervalo de análisis.

La gráfica de esta función vectorial representa el movimiento de una partícula en el plano, que al analizarla como función cartesiana es necesario tener en cuenta que, si las funciones son estrictamente funciones, lo que muchas veces no lo son, las funciones vectoriales aseguran que para un valor de la variable t (en el dominio de la función) le corresponde uno y solamente un vector como imagen. Por lo tanto, para el análisis es necesario determinar el dominio de la función vectorial, el cual se obtiene del dominio común de las componentes de la función vectorial, es decir:

$$D_R = D_x \cap D_y$$

Este dominio asegura la existencia de las componentes y por ende la existencia de la función vectorial. Es necesario determinar en forma general como se calcula el vector unitario así, de la definición de vector unitario, que es el vector que tiene magnitud uno (1), la misma dirección y sentido de un vector dado, se puede determinar:

Dado el vector: $A = a_1 i + a_2 j$, su vector unitario se calcula a partir de:

$$U_A = \frac{A}{\|A\|}$$

donde; $\| A \| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$ (módulo del vector)

por lo tanto;

$$U_A = \frac{a_1 i + a_2 j}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$

La derivada de una función vectorial no es más que la derivada de sus componentes, como sigue:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} i + \frac{dy(t)}{dt} j$$

o, $R'(t) = x'(t)i + y'(t)j$

Está derivada representa el vector tangente a la curva en un punto dado y también representa el vector velocidad si consideramos como la trayectoria de una partícula.

Desarrollo

Si se tiene una función vectorial dada definida en un intervalo o dominio correspondiente a la variable independiente (t), se puede calcular los vectores tangente y normal unitarios como sigue:

El vector tangente unitario $T(t)$, a partir de:

$$T(t) = \frac{\frac{dR(t)}{dt}}{\| \frac{dR(t)}{dt} \|}$$

Este vector es tangente en el punto de análisis y tiene el sentido de la trayectoria de la partícula.

El vector normal unitario $N(t)$, a partir de:

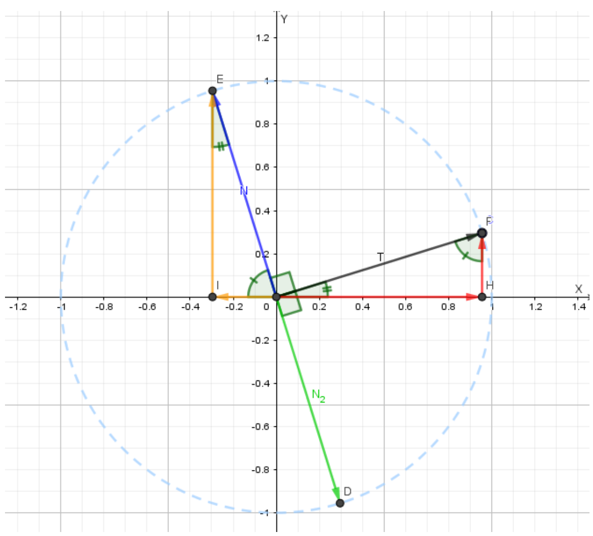
$$N(t) = \frac{\frac{dT(t)}{dt}}{\| \frac{dT(t)}{dt} \|}$$

Este vector es perpendicular al vector tangente unitario y su sentido está dirigido al interior de la curvatura de la trayectoria. Como el vector tangente unitario y el vector normal unitario son perpendiculares entre sí, se puede asegurar que el producto punto:

$$T(t). N(t) = 0$$

Esta afirmación nos permite calcular el vector normal a partir del vector tangente unitario sabiendo que su módulo es igual a 1. Sin utilizar la expresión para el vector tangente unitario. El siguiente gráfico muestra la posición relativa entre los vectores tangente y normal unitarios, que se encuentra a 90º.

Figura 1. Posición relativa entre los vectores tangente y normal unitarios



Elaborado: Autores

Donde:

T Vector tangente unitario

N Vector normal unitario

N_2 Vector normal unitario (alterno)

Los triángulos HOF y IEO son iguales por tener dos ángulos iguales: $\widehat{FOH} = \widehat{OEI}$, $\widehat{OFH} = \widehat{EOI}$ y un lado igual de valor 1, por lo tanto se puede decir que la componente $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{OI}$ y $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{IE}$ en valor absoluto, lo que ayuda a determinar el valor de las componentes del vector normal unitario, siendo necesario determinar los sentidos correspondientes de acuerdo a los ejes del sistema de referencia utilizado. Lo que se puede resumir de la siguiente manera.

Tabla 1. Sentidos de los ejes del sistema de referencia

	Componentes x	**Componentes y**
Vector tangente unitario	a	b
Vector normal unitario	-b	a
Vector normal unitario (alterno)	b	-a
Nota: Los valores de a y b del vector tangente unitario, varían de acuerdo al cuadrante en donde se encuentra, si son negativos se utilizará la tabla con valores negativos de a o b correspondiente a cada vector.		

Elaborado: Autores

Hay que recordar que el vector normal es perpendicular al vector tangente y su sentido es dirigido al centro de curvatura de la gráfica en el punto de análisis.

Discusión

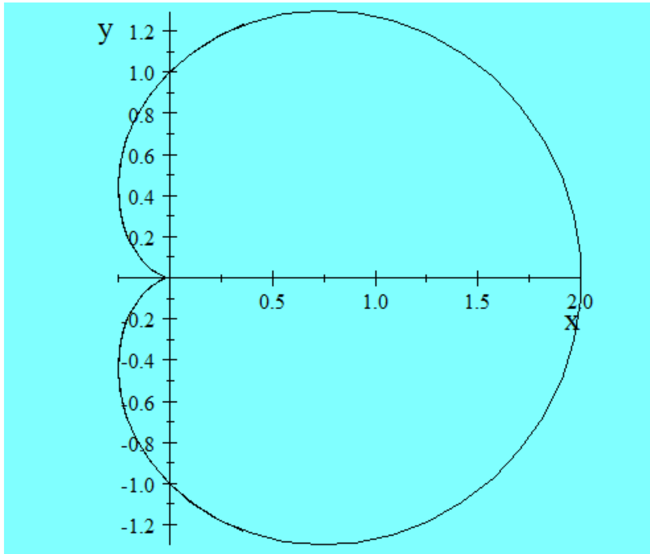
Veamos una aplicación demostrativa de la propuesta de análisis del cálculo de los vectores tangente y normal unitarios de la función vectorial:

$$R(t) = (1 + \cos(t)) \cos(t)\, i + (1 + \cos(t))sen(t)j \quad \text{Para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Encontrar el vector tangente y normal unitario en $t = 1.25$

- El dominio de la función es todos los reales para la variable t.
- La grafica representa a la trayectoria de una partícula que se mueve en sentido anti horario y corresponde a:

Figura 2. *Función vectorial*



Elaborado: Autores

- El valor del punto sobre la curva de la función vectorial corresponde al evaluado en:

$$R(1.25) = 0.41475i + 1.2482j$$

- Al calcular el vector tangente unitario necesitamos la derivada de la función vectorial que será:

$$\frac{d(R(t))}{dt} = \frac{d}{dt}(1 + \cos(t))\cos(t)\, i + \frac{d}{dt}(1 + \cos(t))sen(t)j$$

$$\frac{d(R(t))}{dt} = -(sen(t) + 2\cos(t)\, sen(t))i + (2\, cos^2(t) - 1 + cos(t))j$$

- El módulo de éste vector derivada es:

$$\| \frac{d(R(t))}{dt} \| = \sqrt{(-(sen(t) + 2\cos(t)\, sen(t)))^2 + (2\, cos^2(t) - 1 + cos(t))^2}$$

- De esta manera el vector tangente unitario es:

$$T(t) = \frac{\frac{d(R(t))}{dt}}{\| \frac{d(R(t))}{dt} \|}$$

$$T(t) = \frac{-(sen(t) + 2\cos(t)\,sen(t))}{\sqrt{(-(sen(t) + 2\cos(t)\,sen(t)))^2 + (2\,cos^2(t) - 1 + cos(t))^2}}i$$

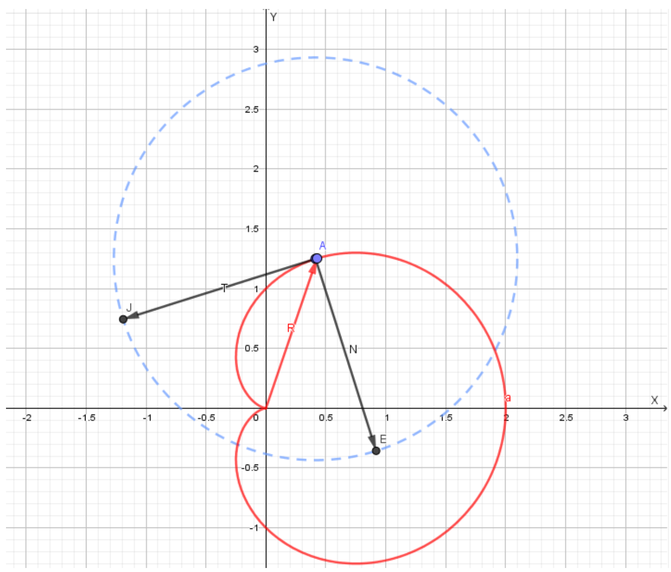
$$+ \frac{(2\,cos^2(t) - 1 + cos(t))}{\sqrt{(-(sen(t) + 2\cos(t)\,sen(t)))^2 + (2\,cos^2(t) - 1 + cos(t))^2}}j$$

Evaluando al vector tangente unitario en el punto $t = 1.25$, se tiene:

$$T(1.25) = -0.95409i - 0.29953j$$

- En el gráfico donde se ubica el vector tangente unitario se puede observar la posición del vector normal, obteniéndose el valor y el signo de las componentes de dicho vector.

Figura 3. Posición del vector normal



Elaborado: Autores

Las derivadas correspondientes a la normal resultan muy extensas, las cuales se puede obviar como se analizó anteriormente por lo que se puede interpretar con facilidad cual es el valor del vector normal.

Tabla 2. Componentes del vector normal

	Componentes x	**Componentes y**
Vector tangente unitario	a (-0.95409)	b (-0.29953)
Vector normal unitario	-b (0.29953)	a (-0.95409)

Elaborado: Autores

De lo que desprende que el vector normal es:

$$N(1.25) = 0.29953i - 0.95409j$$

Esta abreviación se puede hacer por que se evalúa en un punto determinado de la variable independiente en este caso $\mathrm{t} = 1.25$

En resumen se tiene los vectores tangente y normal unitarios en el punto $\mathrm{t} = 1.25$.

$$T(1.25) = -0.95409i - 0.29953j$$

$$N(1.25) = 0.29953i - 0.95409j$$

Conclusiones

- El análisis que se propone permite calcular el vector normal unitario, a partir del vector tangente unitario evaluado en un punto sobre la curva, determinando sus posiciones relativas, y teniendo en cuenta que las componentes del vector tangente unitario intercambian su posición con las del vector normal, así la componente x de $T(t)$ pasa a ser la componente y de $N(t)$, la componente y de $T(t)$ pasa a ser la componente x de $N(t)$, y sus sentidos o signos depende de la posición en el plano cartesiano. Este análisis es posible porque estamos tratando vectores unitarios
- La posición del vector tangente unitario es tangente a la curva en el punto sobre la curva que corresponde a la función vectorial evaluada en un valor determinado de t.
- La posición del vector normal unitario es perpendicular al vector tangente unitario en el punto sobre la curva que corresponde a la función vectorial evaluada en un valor determinado de t, y este siempre está dirigido hacia el centro de la curvatura de la función vectorial.
- Es necesario graficar la función vectorial, aunque sea una porción alrededor del punto de análisis para tener presente la trayectoria de la partícula y por ende el sentido del vector tangente sobre la curva, y de esta manera la posición relativa del vector normal unitario.

Referencias

1. Castelnuovo, G.; “Lecciones de Geometría Analítica”. Editorial Mundo Científico. Edición 1943.
2. Downs, J.W.; “Practical Conic Sections”. Dover Publications. Edición 2003.

3. Fuller, G., Tarwater, D.; "Geometría Analítica". Addison Wesley Iberoamericana. Edición 1999.
4. Grossman, S.I., Flores Godoy J., J.; "Álgebra Lineal". Editorial Mc Graw Hill. Edición 2012.
5. Noble, B.; "Applied Linear Algebra". Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs. Edición 1969.
6. Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A., Ramirez, A.; "Geometría Analítica" Pearson Educación. Edición 2005.
7. Santaló, L.; "Vectores y Tensores con sus Aplicaciones". Editorial Universidad de Buenos Aires, EUDEBA. Edición 1977.
8. Strang, G.; "Álgebra Lineal y sus Aplicaciones". International Thomson Editores. Edición 2007.
9. Sunkel, A.; "Geometría Analítica en Forma Vectorial y Matricial". Editorial Nueva Librería. Edición 2005.
10. Trias Pairó, J.; "Geometría para la Informática Gráfica y CAD". Editorial Alfaomega. Edición 2005.