



DOI: <http://dx.doi.org/10.23857/dc.v6i1.1444>

Ciencias técnicas y aplicadas

Artículo de revisión

*Enseñanza de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante la resolución de  
problemas en la educación superior angoleña*

*Teaching Ordinary Differential Equations by Problem Solving in Angolan  
Higher Education*

*Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias por Resolução de Problemas no  
Ensino Superior Angolano*

Américo Camoli-Sucucueche <sup>I</sup>  
[americo.camoli@umcc.cu](mailto:americo.camoli@umcc.cu)  
<https://orcid.org/0000-0003-3437-5049>

**Correspondencia:** [americo.camoli@umcc.cu](mailto:americo.camoli@umcc.cu)

**\*Recibido:** 26 de enero de 2020 **\*Aceptado:** 17 de febrero de 2020 **\*Publicado:** 25 de marzo de 2020

- I. Licenciado en Educación Matemática Física; Maestrante en Matemática Educativa, Universidad de Matanzas “Sede Camilo Cienfuegos”, Facultad de Educación, Autopista Varadero, Vía blanca km 3 y ½, Matanzas, Cuba.

## Resumen

El presente artículo es parte del resultado de una investigación, que estuvo motivada por las insuficiencias que presentan los estudiantes relacionado con la resolución de problemas que conducen a la ecuación diferencial ordinaria. Este tiene la finalidad de contribuir a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias a través de la resolución de problemas en la educación superior de Angola y se hace una fundamentación teórica sobre los diferentes enfoques teóricos y metodológicos de la resolución de problema y de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Para acercarse a la realidad educativa y detectar las principales dificultades, se utilizaron diferentes métodos científicos (teóricos, empíricos y matemáticos-estadísticos) asumiendo como método general el dialéctico materialista desde un enfoque Marxista Leninista, en la cual permitieron proponer un conjunto de problemas, con sustratamientos metodológicos donde se propone acciones y preguntas de impulsos en las que se manifiesta una conversación heurística entre el profesor y el estudiante dentro de la enseñanza, de manera a buscar los procedimientos o las vías de solución de los ejercicios. Donde este conjunto de problemas como resultado de la investigación se demostró su efectividad después de la puesta en práctica.

**Palabras claves:** enseñanza de la matemática; ecuaciones diferenciales ordinarias; resolución de problemas; educación superior angoleña.

## Abstract

This article is part of the result of an investigation, which was motivated by the insufficiencies that students present related to solving problems that lead to the ordinary differential equation. This has the purpose of contributing to the teaching of ordinary differential equations through problem solving in higher education in Angola and a theoretical foundation is made on the different theoretical and methodological approaches to problem solving and differential equations. ordinary. To approach the educational reality and detect the main difficulties, different scientific methods (theoretical, empirical and mathematical-statistical) were used, assuming the materialist dialectic as a general method from a Marxist-Leninist approach, in which they allowed to propose a set of problems, with methodological subtractions where actions and impulse questions are proposed in which a heuristic conversation is manifested between the teacher and the student within the teaching, in order to look for the procedures or the ways of solving the exercises. Where this set of

problems as a result of the investigation was demonstrated its effectiveness after the implementation.

**Keywords:** teaching of mathematics; ordinary differential equations; Problem resolution; Angolan higher education.

## Resumo

Este artigo é parte do resultado de uma investigação, que foi motivada pelas insuficiências que os alunos apresentam em relação à resolução de problemas que conduzem à equação diferencial ordinária. Tem por objetivo contribuir para o ensino de equações diferenciais ordinárias através da resolução de problemas no ensino superior em Angola e é feita uma fundamentação teórica nas diferentes abordagens teórico-metodológicas de resolução de problemas e equações diferenciais. comum. Para abordar a realidade educacional e detectar as principais dificuldades, foram utilizados diferentes métodos científicos (teóricos, empíricos e matemático-estatísticos), assumindo a dialética materialista como um método geral a partir de uma abordagem marxista-leninista, em que permitiam propor um conjunto de problemas, com subtrações metodológicas onde são propostas ações e questões de impulso nas quais se manifesta uma conversa heurística entre o professor e o aluno no âmbito do ensino, a fim de buscar os procedimentos ou as formas de resolução dos exercícios. Onde este conjunto de problemas como resultado da investigação foi demonstrado sua eficácia após a implementação.

**Palavras chaves:** ensino de matemática; Equações diferenciais ordinárias; resolução de problemas; Ensino superior angolano.

## Introducción

La Matemática es una de las ciencias más antiguas cuyo desarrollo se ha estimulado por la actividad productiva de los hombres que, como ciencia particular, con su propio objeto de estudio, ha recibido la mayor influencia de las ciencias naturales para la formación de los nuevos conceptos y métodos matemáticos desde su surgimiento. Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas porque es a partir de este que los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que los rodea y estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas. Pero hay que ser cuidadosos para no convertir la resolución

de problemas en un ejercicio rutinario que no estimule la iniciativa o que le impida al estudiante desarrollar su creatividad y fortalecer su independencia para utilizar los conocimientos adquiridos en el momento de representar y discutir situaciones de la vida real. La resolución de problemas no solo contribuye a mostrar la objetividad y posibilidad práctica de las matemáticas porque además prepara a los estudiantes para enfrentarse a la vida con decisión, firmeza y perseverancia, para lo cual se requiere lograr efectividad en su enseñanza y aprendizaje a partir de un proceso dirigido al pensamiento de la población estudiantil que conduzca y favorezca la resolución de problemas. Favorece las capacidades básicas de la inteligencia, les proporciona a los estudiantes la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para resolver problemas matemáticos y no matemáticos que constituyen elementos esenciales en la formación profesional de los estudiantes. Las ecuaciones diferenciales son consideradas una herramienta matemática para resolver problemas por la infinidad de aplicaciones que poseen y para utilizarla con éxito el estudiante debe ser capaz de reconocer, clasificar, aplicar y analizar a un nivel básico, ecuaciones diferenciales ordinarias, así como proponer estrategias y los métodos para su solución, debe tener una idea acerca del lugar especial que tienen las ecuaciones diferenciales, y de problemas que se plantean en términos de aquellas, tener los conocimientos necesarios para ubicarlos en su contexto teórico, estimar su grado de complejidad y dominar algunos métodos para su tratamiento los estudiantes deben adquirir las habilidades necesarias para relacionar las ecuaciones diferenciales con problemas reales y de esta forma fortalecer las bases matemáticas para comprender la conexión de los conocimientos teóricos adquiridos, con problemas que requieran una aplicación práctica desde los fenómenos físicos, químicos, biológicos, económico o de ingeniería.. Por tal razón se hace necesario la descripción de este material que tiene como objetivo contribuir a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias a través de la resolución de problemas en la educación superior de Angola, una vez que El estudio de las ecuaciones diferenciales es un tema fundamental para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Superior, específicamente para las carreras de ciencias técnicas, debido a que muchos problemas se representan a través de leyes y relaciones físicas por este tipo de ecuaciones que constituyen los modelos apropiados para muchos experimentos de la vida y fenómenos de la naturaleza. (Zill, Dennis, 2006).

## Desarrollo

### Diferentes enfoques de la definición de problemas

Del término problema han surgido diferentes enfoques y apreciaciones por la importancia tan valiosa que tienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, pues los mismos demuestran la utilidad de las reglas y conceptos matemáticos y contribuyen al desarrollo de habilidades de los estudiantes. El pionero en la investigación sobre el tema fue el reconocido científico matemático G. Polya que en 1962 definió problema como: la búsqueda consciente, con alguna acción propia, para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar. (Santos Trigo, 1994, p.29)

En la década de los 80 se plantearon otras definiciones dentro de las que resalta la mencionada por Luria en 1981, que plantea que problema es una pregunta a la que es imposible dar respuesta. Esta pregunta determina toda la actividad posterior del sujeto dándole un carácter selectivo, (Santos Trigo, 1994, p.29) más tarde en 1985 Schoenfeld planteó que es una tarea difícil para el individuo que está tratando de resolverla (Schoenfeld, 1985, Pág.:17) y en 1987 Barrios lo propone como una tarea cuyo método de realización y resultado son desconocidos, pero poseyendo los conocimientos y habilidades necesarios, se está en condiciones de acometer la búsqueda de los resultados o del método que se ha de aplicar. (Santos Trigo, 1994, p.29)

Con el transcurso de los años fueron apareciendo otras definiciones, que incluyeron elementos importantes para mejorar y esclarecer en alguna medida el concepto de problema, como por ejemplo cuando Ballester en 1992 planteó que se trataba de “un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de la ciencia o la práctica, en lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución. Se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos.” (Ballester, 1992, p.407) y Campistrous en 1996 lo define como “toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo, (Campistrous, 1996, p.20), en ambos casos se tiene muy en cuenta la actividad transformadora que se debe realizar para llegar a la solución del problema.

## **Diferentes enfoques metodológicos sobre la teoría de la resolución de problemas**

Es importante conocer los métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la resolución de problemas y hace que sea una facultad entrenable, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada. (González González, M. (2006).

En este aspecto y con mucho éxito se encuentran las investigaciones realizadas por Polya sobre la resolución de problemas, que estuvo basada fundamentalmente en entender el proceso para hallar la solución del mismo, en particular las operaciones mentales que son útiles para el mismo, tomando tanto aspectos de índole lógico como de orden psicológico a partir de la experiencia de resolver problemas y en ver como otros lo hacían, es decir, a través de la observación particular, comentarios sobre estrategias heurísticas y múltiples ejemplos. A pesar de que sus estudios no fueron sistemáticos ni teóricos, propuso reglas lógicas y generalizadas que guían la solución del problema y que constituyeron el punto de arranque de todos los estudios posteriores. Por su significación en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la resolución de problemas enunciaremos el método de solución general que propuso y que cuenta de cuatro pasos:

1. **COMPRENDER EL PROBLEMA.** Parece, a veces, innecesaria, sobre todo en contextos escolares; pero es de una importancia capital, sobre todo cuando los problemas a resolver no son de formulación estrictamente matemática; es más, es la tarea más difícil.

- a) Se debe leer el enunciado despacio.
- b) ¿Cuáles son los datos? (Lo que conocemos)
- c) ¿Cuáles son las incógnitas? (Lo que buscamos)
- d) Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.
- e) Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.

2. **TRAZAR UN PLAN PARA RESOLVERLO.** Hay que plantearlo de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo.

- a) ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
- b) ¿Se puede plantear el problema de otra forma?
- c) Imaginar un problema parecido pero más sencillo.

d) Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?

e) ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?

3. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN. También hay que plantearlo de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo. Y tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica.

a) Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.

b) ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?

c) Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto?

d) Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.

e) Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

4. COMPROBAR LOS RESULTADOS. Es el más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con el contexto del resultado obtenido, por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

a) Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.

b) Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?

c) ¿Se puede comprobar la solución?

d) ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?

e) ¿Se puede hallar alguna otra solución?

f) Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.

g) Se debe utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas (Breña, Luis y Timana, 2003, Pág. 56).

Hay que pensar que no basta con conocer técnicas de resolución de problemas: se pueden conocer muchos métodos pero no cuál aplicar en un caso concreto. Por tanto hay que enseñar también a los estudiantes a utilizar los instrumentos que conozca, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo, que es donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven bien problemas y los

demás, porque es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación.

Dentro de las líneas de desarrollo de las ideas de Polya, Schoenfeld, A. 1985, planteó una lista de técnicas heurísticas de uso frecuente, que se agrupan en tres fases, y que se extractan de la siguiente forma:

I. ANÁLISIS.

- a) Trazar un diagrama.
- b) Examinar casos particulares.
- c) Probar a simplificar el problema.

II. EXPLORACIÓN.

- a) Examinar problemas esencialmente equivalentes.
- b) Examinar problemas ligeramente modificados.
- c) Examinar problemas ampliamente modificados.

III. COMPROBACIÓN DE LA SOLUCIÓN OBTENIDA.

1. ¿Verifica la solución de los criterios específicos siguientes?:
  - a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
  - b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
  - c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
2. ¿Verifica la solución de los criterios generales siguientes?:
  - d) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
  - e) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
  - f) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
  - g) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

IV. A continuación se proponen un conjunto de estrategias que según S.Fernández en 1992 se suelen utilizar en la resolución de problemas.

- a) Ensayo-error.
- b) Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo.
- c) Manipular y experimentar manualmente.
- d) Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar).
- e) Experimentar y extraer pautas (inducir).



- f) Resolver problemas análogos (analogía).
- g) Seguir un método (organización).
- h) Hacer esquemas, tablas, dibujos (representación).
- i) Hacer recuento (conteo).
- j) Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico (codificar, expresión, comunicación).
- k) Cambio de estados.
- l) Sacar partido de la simetría.
- m) Deducir y sacar conclusiones.
- n) Conjeturar.
- o) Principio del palomar.
- p) Analizar los casos límite.
- q) Reformular el problema.
- r) Suponer que no (reducción al absurdo).
- s) Empezar por el final (dar el problema por resuelto).

Existen dos aspectos que se deben considerar en el momento de resolver un problema. El primero es; analizar el contexto en el que se sitúa el problema, que por parte de los profesores se tienden a considerar como irrelevante o al menos como poco significativo, pero tiene una gran importancia, tanto para determinar el éxito o fracaso en la resolución de los mismos, como para incidir en el futuro de la relación entre las matemáticas y los estudiantes. El segundo es, que la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas; es muy bueno conocer técnicas y procedimientos, pero vistos en acción, no sólo a nivel teórico, porque si no, es un conocimiento vacío, que más que reconocer y brindar métodos y estrategias en la resolución de problemas, debemos desarrollar el pensamiento de los estudiantes, tanto lógico como algorítmico y la modelación matemática, aunque cada una de estas variantes de enfocar el proceso de resolución de problemas facilita el estudio de los mismos y la forma de concebir y organizar el aprendizaje de los estudiantes. (Echeverría García, Luiska, 2009).

### **La heurística en la resolución de problemas**

La teoría matemática de la resolución de problemas tiene situado en un lugar principal el papel de la heurística, un concepto que desde finales de los años setenta ha estado presente en la enseñanza de las Matemáticas y el cual se utiliza para referirse al estudio de los medios, principios, reglas y estrategias que pueden ser utilizadas en la resolución de problemas, es decir, la heurística trata de métodos o algoritmos exploratorios durante la resolución de problemas, en los cuales las soluciones se descubren por la evaluación del progreso logrado en la búsqueda de un resultado final.

Los estudios han concluido que a pesar de que la heurística se usa para capacitar a los estudiantes sobre la forma de planificar la solución de problemas, el pensar en voz alta, la interacción entre compañeros jugando el papel del profesor y la interacción directa para desarrollar en los estudiantes la habilidad para resolver problemas a partir de una extensa base de conocimientos de información, de dominio específico y de una cantidad suficiente de algoritmo y repertorio de heurísticas, no es suficiente durante el proceso de resolución de problemas.

Para resolver un problema matemático es importante tener un buen dominio del contenido específico, tanto matemático como extra matemático, que esté relacionado con el problema a resolver. Esto facilita la selección adecuada del contenido matemático a emplear. (Hernández, R. 2001). Esta contradicción es manifestada a través de las palabras de Polya cuando plantea que, si tomas una solución heurística como certeza, podrás equivocarte y sentirte engañado, pero si rechazas totalmente las conclusiones heurísticas, no habrá ningún progreso. (Breña, Luis y Timana, 2003, Pág.: 26).

La heurística es de gran utilidad para resolver problemas matemáticos pues sirven de guía y representan orientaciones y sugerencias generales para la búsqueda de soluciones de los mismos. Su importancia es mayor en la medida en que el problema a resolver sea más novedoso para la persona que intenta resolverlo y mientras menos ideas preliminares ésta tenga del contenido matemático específico que requiere utilizar en la modelación del problema, pero que sin embargo no se puede considerar como un elemento determinante para la resolución de problemas, sino como una herramienta de apoyo indispensable.

Todo este proceso se organiza a través de una serie de instrucciones generales, que permiten guiar a las personas que están tratando de resolver un problema, y las cuales se denominan elementos

heurísticos. Estos se clasifican en medios auxiliares, procedimientos, reglas y estrategias heurísticas. (J. J. Merel., 2002)

Los medios auxiliares lo componen las figuras auxiliares ilustrativas o de análisis, las tablas para reflejar relaciones entre datos y los gráficos de solución, resúmenes de definiciones, teoremas, propiedades etc.; los procedimientos heurísticos están determinados por los principios, entre los que se destacan la analogía, la inducción, la generalización y la reducción en sus diferentes variantes y las reglas y estrategias heurísticas, que representan los impulsos que provoca el profesor en los estudiantes mediante observaciones, preguntas y recomendaciones, que ayudan a éstos a orientarse en la búsqueda de la solución del problema. (Hernández, Camacho, Reinaldo ,2010).

El entrenamiento adecuado en el uso de estos elementos, permite incrementar las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas pero es indispensable que la persona que intenta resolverlo esté preparada para hacerlo, que conozca las operaciones o procedimientos necesarios para resolver el problema, y más aún, que esté interesada en obtener la solución porque el componente emocional es de vital importancia por lo que la autora coincide con Polya cuando dice: debe concentrarse en el problema y desear ansiosamente su solución. Si no puede hacer nacer el deseo real de resolverlo, más vale abandonarlo. El secreto del éxito real radica en entregarse al problema en cuerpo y alma.” (G. Polya, 1986, p.57).

Ahora bien, por mucho conocimiento que se tenga acerca de los elementos heurísticos, si no se conocen los contenidos matemáticos específicos relacionados con el contexto del problema, en particular con los conceptos que deben ser aplicados y las relaciones entre ellos, son prácticamente inexistentes las posibilidades de resolver un problema porque el éxito de utilizar los elementos heurísticos está dado precisamente en el hecho de aplicarlo a problemas que estén vinculados con los contenidos específicos que el estudiante conozca.

De forma general la heurística ha logrado muchas acepciones tales como el autodescubrimiento dado en el proceso de solución de problemas; la capacidad para plantear (producir, generar) problemas (científicos, tecnológicos, sociales...) y/o la capacidad para orientar la resolución de problemas; el arte de inventar; y las clases de información disponible para los estudiantes en la toma de decisiones durante la resolución de problemas. Es por eso que la teoría matemática de solución de problemas tiene situado en un lugar principal el papel de la heurística.

## **Principales barreras que han limitado el proceso de resolución de problemas en la comunidad estudiantil**

Las dificultades que presentan los estudiantes en el abordaje y resolución de problemas es una de las problemáticas principales que confronta la enseñanza de las matemáticas en nuestros días entre estas, se pueden destacar: Dificultades en la comprensión de los problemas que no permiten una adecuada búsqueda de la vía de solución, (CAPOTE, 2003); incoherencia en las respuestas a los problemas y bloqueos en el proceso de la búsqueda de la vía de solución (VILA-CORTS, 2001); Escasa autoregulación de los procesos mentales por los estudiantes por la resolución de problemas. (ZUFFI; ONUCHIC, 2007).

De este modo, resulta interesante analizar y describir algunos aspectos que frecuentemente por parte de los docentes, que han limitado el proceso dentro de la comunidad estudiantil, los cuales constituyen una cadena de obstáculos, entre los que se encuentran como fuerte eslabón, la falta de motivación, por el hecho de que en el aula no se plantean problemas vinculados con situaciones prácticas relacionadas con el entorno individual y colectivo de los estudiantes, por lo regular se proponen solamente los ejercicios del libro de texto, con lo cual no se crea un clima favorable para motivarlos a partir de sus propias vivencias y experiencias, pues la resolución de problemas debe estimularse a través de la vinculación de los estudiantes con la realidad objetiva, con la vida práctica y cotidiana, logrando la motivación en la clase para los problemas que se van a resolver y de esta forma favorecer el aprovechamiento de los conocimientos previos y lograr la activa participación de los estudiantes en el proceso de solución. (Echeverría García, Luisa, 2009); El poco tiempo que se brinda a los estudiantes para resolver los problemas, lo que no estimula la reflexión (GUILERA, 2002); Marcando énfasis en la función que desempeñan los problemas matemáticas como medio de asimilación o fijación de conocimientos, sin aprovechar las potencialidades que brindan al desarrollo del pensamiento (SUÁREZ, 2003); Otro eslabón de esta cadena que contribuye a elevar el fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas, ha sido la falta de valoración y atención adecuada de los niveles de dificultad, lo cual ha limitado el uso de la analogía y el establecimiento de relaciones entre problemas ya resueltos, así como importantes reglas heurísticas en la resolución de problemas que contribuyen a la apropiación del modo de actuación de los estudiantes y brinda la posibilidad de reconocer las estrategias utilizadas y el proceder ante problemas similares.

Además, no se aseguran adecuadamente los saberes previos porque se violan en múltiples ocasiones el diagnóstico por elementos del conocimiento que es la vía principal para asegurar las condiciones y los saberes necesarios para la solución de diversos problemas según el dominio matemático correspondiente, pues si el estudiantado presenta dificultades en determinado contenido que sean necesarios para dar respuesta a la situación planteada, no podrá hacerlo, perdiendo el interés por la tarea propuesta. (Osorio, A. y Hernández, A., 2006); También se agrega que en múltiples ocasiones al proponer un problema al estudiantado, el personal docente le ofrece el modelo o la vía de solución y posteriormente se le pide que «resuelvan el problema», cuando en realidad lo que hacen es repetir el proceso de cálculo; esto trae como consecuencia que se limite en los estudiantes la capacidad de comprensión, interpretación y reflexión del problema, así como la creatividad en la búsqueda de la vía de solución. Es por eso que los problemas se utilizan más en función del desarrollo de habilidades de cálculo y no como objeto de enseñanza en sí misma.

Al realizar el análisis de estas dificultades y teniendo en cuenta que pueden ser relativas porque dependen del conocimiento y habilidades de los estudiantes, concluimos que estas no solo limitan el proceso de resolución de problemas, sino que además obstaculizan el desarrollo de las potencialidades de los estudiantes. Estas carencias o dificultades son consecuencias del escaso aprovechamiento de las potencialidades de la resolución de problemas para favorecer la actividad mental de los estudiantes, y justifican la necesidad de indagar acerca de su tratamiento metodológico con un enfoque desarrollado, que brinde a los docentes, propuestas concretas para mejorarlas.

### **La resolución de problemas en la Educación Superior**

Aprender a resolver problemas es una de las destrezas más importante que un estudiante universitario debe lograr. La formación y desarrollo de esta habilidad para resolver problemas de diferentes índoles se promovió con el objetivo precisamente de facilitar su solución, garantizando un mayor éxito en la formación ingenieril de los estudiantes, respecto a la atención que esto requiere, Rita Avendaño señala que, las habilidades se corresponden con las destrezas que se requieren para poder aplicar los conocimientos en situaciones concretas y se orientan hacia la capacitación, hacia el poder hacer (Avendaño, Rita, 1993).

La resolución de problemas matemáticos es considerada también una habilidad, en base a determinadas acciones que son las que permiten acceder a las vías para resolver los problemas, y

que se identifican con el nivel de dominio de la acción, pues el verdadero conocimiento se diferencia de la información, en que el estudiante sea capaz de operar con un concepto, una ley o una teoría, por tanto se puede hablar de conocimiento si hay dominio de la acción. (Delgado, J. R., 1999).

A partir de estas valoraciones se llega a la definición de la habilidad resolver problemas de Matemática que se entiende como: “proceso que implica la realización de una secuencia o serie de acciones para la obtención de una respuesta adecuada a una dificultad con intención de resolverla, es decir, la satisfacción de las exigencias (meta, objetivo) que conducen a la solución del problema matemático”. (Triana, Mazarío, Israel (2005).

Estas acciones constituyen un sistema que se formula para estructurar la habilidad resolver problemas de Matemática y que sean lo suficientemente generales aunque no universales, como para que una vez aplicado a la resolución de cualquier problema matemático de los que se abordan en el aula, se puedan transferir, mediante la enseñanza adecuada, a cualquier situación nueva que se presente a los estudiantes.

La enseñanza a través de la resolución de problemas nos brinda la posibilidad de proporcionar a nuestros estudiantes la capacidad autóctona para resolver sus propios problemas de forma tal que el aprendizaje se haga atrayente, autor realizado y creativo para que mucho de los hábitos que así se consolidan tengan un valor universal y no limitado al mundo de las matemáticas. (Horruitiner Silva P, 2006)

En la Educación Superior, cada disciplina aborda las cuestiones sobre el tema de la resolución de problemas desde su propia perspectiva pero siguiendo un mismo objetivo, dotar a los estudiantes con forma de pensamiento eficaces. Es por eso que los profesores deben estructurar los contenidos de forma que se logre una enseñanza más efectiva, así como descubrir los obstáculos que impidan nuestro objetivo en el contexto escolar.

La enseñanza y aprendizaje mediante la resolución de problemas, pone el énfasis en los procesos del pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas del pensamiento eficaces. (Martín Juan A; Gómez Ángel; Gómez Carlos, 2003) Para aprender eficazmente el estudiante debe descubrir de manera personal gran parte del material que se enseña y dado que aprenderá con su propio esfuerzo, debemos familiarizarlo con la forma

de su entorno concreto, luego con lo abstracto y después con la experiencia acumulada, este proceso se manifiesta en el contexto de las Matemáticas. Se desarrolla primeramente con la solución de problemas cotidianos que conducen a problemas matemáticos simples, para luego pasar a la abstracción entre los problemas cotidianos y los matemáticos, esto lo puede conseguir el estudiante de manera factible y natural con la dirección del personal docente. Así como los problemas de todos los días son el centro del pensamiento diario, debe lograrse que los problemas matemáticos sean el centro de la enseñanza matemática, que es vital para los estudiantes que cursan carreras de ciencias técnicas como Ingeniería Industrial.

Con el espíritu de la resolución de problemas se deben presentar cada tema matemático organizado de la siguiente forma:

- I. -Proponer una situación problémica de donde surja el tema de estudio (basada en la historia, aplicaciones, modelos etc.).
- II. -La manipulación autónoma de los estudiantes.
- III. -Familiarización con la situación y sus dificultades.
- IV. -Elaboración de estrategias posibles.
- V. -Ensayos diversos por los estudiantes.
- VI. -Herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados).
- VII. -Elección de estrategias.
- VIII. -Ataque y resolución del problema.
- IX. -Recorrido crítico (reflexión sobre el proceso).
- X. -Generalización.
- XI. -Nuevos problemas.
- XII. -Posible transformación de resultados, de métodos, de ideas etc.

Este procedimiento debe ser seguido en todas las clases de matemática porque estimula el estudio del tema que se aborda, hace que la actividad sea más novedosa, creativa y dinámica para los estudiantes de forma tal que el profesor coloque al estudiante en situación de participar y alimente el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos lograron con tanto esfuerzo, porque como bien dijo Polya en 1945, solo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas, y hay en la solución de cada problema, un poco de descubrimiento.(Polya, 1945, Pág.: 63 )



Además la resolución de problemas es un contenido matemático que contribuye a la formación intelectual y científica de los estudiantes porque la ciencia es esencia una actividad de resolución de problemas (Delgado, Adriana, 2010)

### **Características de la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la resolución de problemas**

Las ecuaciones diferenciales ordinarias constituyen el objetivo natural del análisis matemático y son una disciplina fundamental para analizar desde la óptica de las matemáticas, fenómenos físicos, químicos, biológicos, económico o de ingeniería. El estudio de problemas relacionados con ecuaciones diferenciales ha motivado la creación, y posterior desarrollo, de partes muy significativas del análisis matemático. La finalidad básica de las ecuaciones diferenciales es analizar el proceso de cambio en el mundo físico, así como los fenómenos naturales que aparecen las variables relacionadas con los índices de cambios mediante las leyes generales de la naturaleza que rigen estos fenómenos.

La resolución de las mismas trae considerables dificultades a los estudiantes, principalmente para determinar de qué tipo es la ecuación diferencial y después para poder aplicar el método de solución analítico que corresponde a ese tipo de ecuación diferencial, ya que cada tipo de E.D. se resuelve de una manera diferente mediante los métodos analíticos. Sin embargo, se puede evidenciar ciertas limitaciones que presentan estos métodos analíticos tales como: utilizan operaciones algebraicas, incluyendo la derivación y la integración para obtener la solución general a partir de la ecuación diferencial; la solución particular deseada se halla a partir de la solución general, buscando valores adecuados para las constantes arbitrarias; cada método analítico se ocupa de un tipo especial de ecuación diferencial ordinaria

Ecuación diferencial (E.D.) a una ecuación que relaciona una función (o variable dependiente), su variable o variables (variables independientes), y sus derivadas. Si la ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O); y si contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes, se llama ecuación en derivadas parciales (E.D.P.). Otro tipo de ecuaciones son las ecuaciones diferenciales de retraso (o retardo) que están caracterizadas por la presencia de un desplazamiento en el argumento o variable ( $x-x_0$ ).

Se llama orden de la ecuación diferencial al orden de la derivada o derivada parcial más alta que aparece en la ecuación. Se dice que una función  $y = \varphi(x)$  definida en un intervalo I es solución de



una diferencial en el intervalo si, sustituida en dicha ecuación, la reduce a una identidad. La ecuación diferencial ordinaria que posee en general una familia de infinitas soluciones dependientes de una constante arbitraria, se suele llamar solución general. Para cada valor de dicha constante arbitraria se obtiene una solución particular. Una E. D. se dice resoluble (o integrable) por cuadraturas si su solución es expresable mediante integrales.

En general, la solución de la ecuación diferencial de orden  $n$  dependerá de  $n$  parámetros. Pero incluso de esta forma pueden no obtenerse todas las soluciones de una E. D. Por ejemplo, cuando tenemos una familia uniparamétrica de soluciones de una E. D., una sencilla interpretación geométrica nos muestra que también la envolvente de la familia de curvas (si existe) es solución de la E. D. Se define como problema de valor inicial y problemas de valor frontera a aquellos en que la ecuación diferencial se resuelve sujeta a unas condiciones dadas que la función desconocida debe satisfacer.

Cuando el estudiante se enfrenta a un problema de aplicación en el que tenga que utilizar las ecuaciones diferenciales, un problema en el cual las matemáticas se aplican en otros campos, debe procesar la información hasta obtener el modelo matemático, a la deducción de las Ecuaciones Diferenciales a partir de situaciones físicas que se presentan en determinados problemas de carácter físico y/o técnico, a esta transición del problema, al Modelo Matemático correspondiente se llama Modelado (Sonia B. Concari, 2010).

La modelación matemática es una etapa compleja dentro de la resolución de un problema, debido a la variedad ilimitada de problemas de aplicación, particularmente aquellos cuyo modelado resulte en una ecuación diferencial, y la carencia de un grupo de reglas específicas que ayuden a obtener su solución.

Los problemas con estas características suelen ser muy difíciles para los estudiantes, pues requieren de un mayor esfuerzo, creatividad y habilidad para ordenar y transformar la información que brinda cada problema y consecuentemente con el modelo obtenido, el estudiante debe ser capaz de generar su propia estrategia de trabajo, transitando del conocimiento general al de casos particulares.

Resuelve la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:  $x^2 y'' + xy' - y = 0$

### **Acción 1:**

- i. Nos preguntamos cual es la expresión de mayor valor semántico: función.

- ii. Establecemos la incógnita: una función  $f(x)$  que satisfaga las condiciones que exige el problema.
- iii. Enunciaremos el problema con nuestras propias palabras: buscamos una función derivable respecto a  $x$  que cumpla con el problema planteado.
- iv. Parece que los datos son suficientes y tampoco parece haber datos sobrantes.
- v. Relacionamos los datos con las incógnitas: relacionamos la estructura.
- vi. Transformamos el problema en uno equivalente: el problema lo transformamos a resolver una ecuación diferencial, que cumpla las propiedades anteriores.
- vii. El problema se ubica en el campo del análisis.
- viii. Lo clasificamos: lo damos la clasificación de reductivo

### **Acción 2:**

Recordamos se ya hemos resuelto algunos problema parecido o relacionado, suponiendo que es nuevo nos damos la tarea de crear una estrategia de solución.

A partir de la expresión del problema y de los que entendemos, nos trazaremos el objetivo de convertir la ecuación en alguna que ya conozcamos su relación: en esta se idealizan dos formas para desarrollar la solución del problema.

### **Acción 3:**

- i. Escoger un lenguaje apropiado para expresar la solución.
- ii. Nos preguntamos si puede ser generalizado el método de solución: al parecer si un problema tiene características similares, tentativamente podemos aplicar la vía de solución.
- iii. Las dos vías de solución nos dan distintas características heurística, la primera de transformar la ecuación en homogénea (principio de reducción) y la segunda fue establecer una solución tentativa (método analítico).
- iv. ¿Responde realmente el problema? Sí porque la función que se determina satisface la ecuación diferencial dada.

## **Metodología para la resolución de problemas propuesto**

La resolución de los problemas que se propone, debe desarrollarse en un ambiente que propicie la comunicación; se concreta en la utilización de diversos métodos y técnicas grupales, el diálogo heurístico donde los estudiantes expongan sus vivencias personales y propongan vías de

solucionosa los problemas elaborados. Debe tener una flexibilidad metodológica permitiendo que los diferentes ejercicios que conforman los problemas se puedan desarrollar, teniendo en cuenta los diferentes niveles de desempeño cognitivo. Se debe decidir el objetivo y el contenido según el diagnóstico. Que se les exige a los estudiantes la lectura consciente de los ejercicios. Que los alumnos sepan el algoritmo a utilizar. Iniciar siempre la ejecución del sistema de ejercicios retomando el algoritmo. Que las clases de Matemática se desarrollen siempre que sea posible mediante la resolución de ejercicios o problemas ya que la resolución de problemas puede estar dirigido a la formación de un concepto, a la asimilación de un teorema o la asimilación de procedimientos. Al proponerlas se debe tener en cuenta la etapa de: orientación, ejecución y control, por la importancia que tiene para el desarrollo de la motivación en los estudiantes. Para eso, se recomienda que el profesor debe ser capaz de profundizar y actualizar constantemente sus conocimientos metodológicos, científicos y su accionar educativo, de acuerdo con los constantes cambios de los programas del grado.

1. La motivación tiene que llevar a los alumnos a la importante convicción de que la ejercitación intensiva es necesaria para una asimilación firme de los contenidos tratados.
2. En la orientación hacia el objetivo el alumno debe llegar a conocer qué grupos de ejercicios han de ser tratados en la clase, con qué complejidad, qué conocimientos previos necesita, es decir, debe hacérsele penetrar en la estructura de la clase para que comprenda qué se espera de él.
3. Durante la ejercitación hay que hacer notar a los alumnos en momento adecuados, el progreso en el desarrollo del poder, haciéndoles notar como a medida que avanza su aprendizaje pueden resolver ejercicios más difíciles que en la clase anterior.
4. En el control de los resultados el profesor debe hacer ver a sus alumnos los errores cometidos y, sobre todo, sus causas y cómo eliminarlas; para ello se debe saber manejar la crítica y la autocrítica, al incorporar al resto del grupo al análisis del ejercicio.

Además, de forma constante, el profesor debe tomar nota de los errores típicos que aparecen de manera general. A través de la crítica el profesor debe lograr que los alumnos reconozcan que en la solución de un ejercicio deben alcanzar precisión, rapidez, solidez y limpieza. El profesor, como dirigente de la clase de ejercitación, debe lograr, mediante impulsos adecuados, que los alumnos participen activamente en el análisis de las situaciones que se les plantean, sin limitar su iniciativa,

mostrando lo logrado y lo que falta por lograr. El uso racional y efectivo del tiempo en la clase de ejercitación es determinante para su éxito. En este sentido el profesor debe buscar formas ágiles para la asignación y revisión de los ejercicios, evitando "puntos muertos" y repeticiones innecesarias. Así, la asignación puede hacerse a través de un libro de texto, mediante la utilización de hojas de trabajo, mediante un cuadro resumen preparado en el pizarrón, etc., mientras que la revisión se puede realizar preguntando el resultado alcanzado o revisando en el pizarrón aquellos ejercicios de mayor dificultad o cuya solución puede realizarse por varias vías.

### **Conclusión**

Las ecuaciones diferenciales son considerada una herramienta matemática básica para resolver problemas por la infinidad de aplicaciones que poseen y para utilizarla con éxito el estudiante debe ser capaz de reconocer, clasificar, aplicar y analizar a un nivel básico, ecuaciones diferenciales ordinarias, así como proponer estrategias y los métodos para su solución, debe tener una idea acerca del lugar especial que tienen las ecuaciones diferenciales, y de problemas que se plantean en términos de aquellas, tener los conocimientos necesarios para ubicarlos en su contexto teórico, estimar su grado de complejidad y dominar algunos métodos para su tratamiento. El profesor, como dirigente de la clase de resolución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, debe lograr, mediante impulsos adecuados, que los alumnos participen activamente en el análisis de las situaciones que se les plantean, sin limitar su iniciativa, mostrando lo logrado y lo que falta por lograr, dirigiendo sus actividades hacia: Creación de una motivación, la orientación hacia el objetivo y el control de los resultados.

### **Referencias**

1. HUANCAYO. (2019). El papel de la interdisciplinariedad en la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Docentes (revistaib)* [consultado en 21 de septiembre 2019] disponible en: [www.google.com](http://www.google.com). 2019.
2. Pedroso, S. B., Montes de Oca, S. H., & Carazo, B. A. (1992). *METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA TOMO 1*. Havana-Cuba: Pueblo y educación.

3. Pérez, M. Á., Carazo, B. A., & Jiménez, E. V. (2014). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Havana-Cuba: Pueblo y Educación.
4. Rodríguez, M. A. (2009). Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden. México: Centro de investigación de ciencias aplicadas y tecnologías aplicadas.
5. Suarez, C. A. (2015). Modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden con geogebra: Actividades para resolver problemas de mezclas.

©2020 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).