UNA MIRADA SOMERA A LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

Javier Fernando Pineda Gacharná

Licenciado en Matemáticas, Ingeniero de Petróleos, Especialista en Informática y Multimedia en Educación y estudios de Maestría en Economía. Docente de tiempo completo en la Facultad de Ciencias y Tecnologías de la Universidad Santo Tomás. email: javierpineda@ustadistancia.edu.co

Resumen

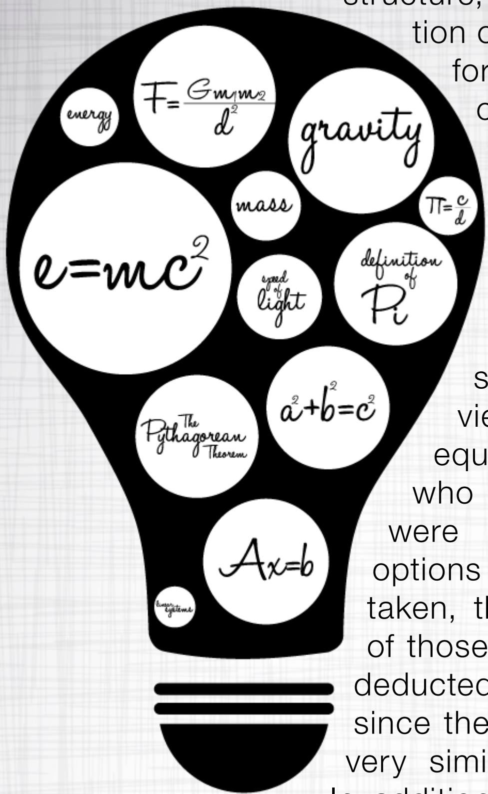
El trabajo presentado consiste en una reflexión poco profunda acerca de la ecuación diferencial logística. El objetivo es reconocer o recordar la utilidad de la ecuación logística en casos como en el estudio de poblaciones, así como en el de ventas de un producto determinado, además de otros ejemplos en los que se puede utilizar dicha ecuación. La ecuación diferencial logística tiene varias posibilidades de presentación, difieren en estructura, ubicación y definición de las constantes que la conforman, pero, a pesar de esas diferencias, todas sirven para modelar poblaciones de personas, de especies animales y estudios de mercados. Precisamente en la mirada a esta ecuación logística se abordaron tres autores que hablan sobre este tema, y se tomaron las posibilidades de cada ecuación, se dedujeron las soluciones de dos de las tres (Zill y Larson), ya que la tercera (Stewart) era muy similar a la segunda. Además, se dio solución a problemas de aplicación en los que se utilizaron tanto las ecuaciones diferenciales como sus respectivas soluciones. Se encontró que las gráficas de las soluciones, en los tres casos, tuvieron el mismo comportamiento y en los problemas resueltos se pudieron aclarar inquietudes similares.

Palabras clave

Ecuación diferencial logística, capacidad de soporte, velocidad de cambio, variables separables y condiciones iniciales.

Abstract

The work presented is a shallow reflection of the differential equation logistics. The aim is to recognize or remember the usefulness, of the logistic equation in the study of population as well as in the study of particular sales of a particular product, and other besides some other examples where this equation can be used product. Logistics differential equation has several presentation possibilities that differ in



structure, location and definition of the constants that form parameters that constructed it, but despite these differences, all serve to model populations of people, species of animals and market studies species. Precisely in view of this logistic equation, three authors who speak on this issue were addressed, the options of equation were taken, the solutions of two of those three authors were deducted (Zill and Larson), as since the third (Stewart) was very similar to the second. In addition the there is given solution to application problems by using both, their differential equations and their solutions. It was found that the graphs of the solutions in all three cases had the same behavior and solved problems could be resolved similar concerns.

Keywords

Logistic differential equation, bearing capacity, rate of change, separable variables and initial conditions.

Introducción

Explorando la web se encuentran muchos trabajos y artículos referidos a la ecuación logística, por ejemplo, en el artículo “La Ecuación Logística”, de Irene Peral Walias, se presenta un estudio profundo de esta,, en el que el nivel de las matemáticas utilizadas tiene alto grado de complejidad. Por otro lado, en la dirección web **http://www.uantof.cl,** aparece un estudio sobre Dinámica poblacional en el que se utiliza una matemática muy práctica que facilita su explicación. En el presente trabajo se utiliza una matemática sencilla, de donde se deriva el término “somera” usado en el título, con el fin de que los lectores puedan comprender las explicaciones dadas, puedan conocer qué es una ecuación diferencial y puedan conocer cómo se encuentra una solución, así como su representación gráfica y conozcan de qué manera se aplica el modelo en la resolución de problemas y el análisis de resultados.

Materiales o recursos

Para realizar esta reflexión, solamente se necesitaron tres libros, el computador, el programa wólfram mathematica, el recurso matemático y las ganas de explorar un tema para ver qué se puede aprender de nuevo.

La ecuación diferencial logística

Estudiar matemáticas no es solo entender definiciones, comprender operaciones o demostrar teoremas, es más que eso. Estudiando matemáticas la humanidad, a través de su historia, ha descubierto modelos matemáticos necesarios para entender, medir y cuantificar eventos del diario vivir y fenómenos naturales. Son innumerables los estudios relacionados con la matemática, en (Zill, 2011) aparece el siguiente planteamiento: En 1838, el biólogo matemático belga Pierre François-Verhulst, trabajó en modelos matemáticos para pronosticar la población humana de los países. La ecuación estudiada fue:

$$\frac{dp}{dt} = p\,(a - bp)$$

En la que a y b son constantes mayores que cero.

Esta ecuación diferencial se conoce como ECUACIÓN LOGÍSTICA, y la gráfica de una solución se denomina CURVA LOGÍSTICA, en la que $\frac{dp}{dt}$,significa la velocidad de cambio de la población p y p corresponde a la población en un tiempo determinado: t.

En (Larson, 2006), se asume que y=f(x), satisface la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = ky\,(1 - \frac{y}{L})$$

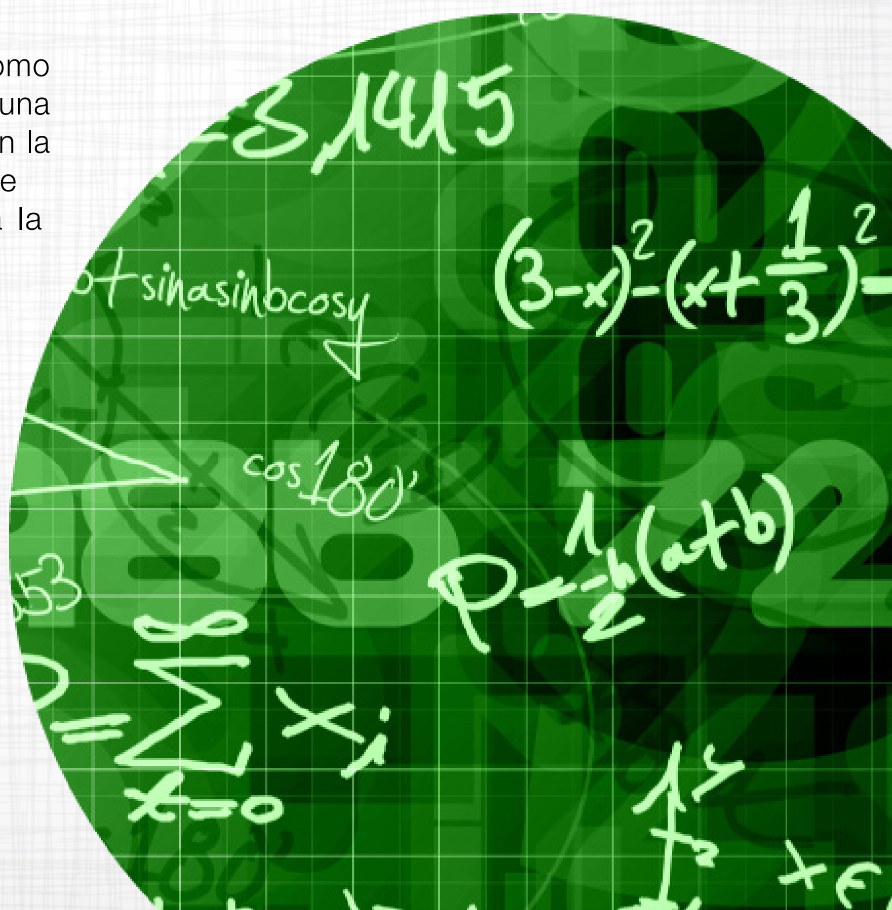
En la que k y L son constantes positivas.

$\frac{dy}{dt}$ significa el ritmo o velocidad de cambio de la variable y, la población en un instante de tiempo: t.

En (Stewart, 2008), se considera que una población suele incrementarse de forma exponencial en sus primeras etapas, pero se estabiliza finalmente y tiende a su capacidad de soporte debido a los recursos que son limitados. En dicha ecuación p(t) representa el tamaño de la población en el tiempo t, de donde se deriva que $\frac{dy}{dx} = kp$, si p es pequeña.

El modelo para el crecimiento poblacional conocido como ecuación diferencial logística se presenta mediante la siguiente expresión:

$$\frac{dp}{dt} = kp\,(1 - \frac{p}{L})$$



Esta ecuación explica que si p es pequeña comparada con L, entonces p/L tiende a cero, por lo que $dp/dt \approx kp$, ahora, si p tiende a L, entonces $p/k \to 1$ y $dp/dt \to 0$.

Como puede verse se han presentado tres puntos de vista de la ecuación logística, e incluso se podrían referenciar muchos, a partir de los cuales será posible encontrar solucio-nes, hacer análisis, plantear aplicaciones y encontrar diferencias y similitudes entre los tres planteamientos nombrados.

Para intentar contestar la anterior inquietud, primero se intentará dar solución a la ecuación diferencial de (Zill, 2011),

$\frac{dp}{dt} = p(a - bp)$, sujeta $p(0) = p_0$

Al observar la ecuación se puede buscar la solución usando el método de variables sepa-rables, por lo que se procede a organizar la ecuación, que se presentaría de la siguiente forma

$$\frac{dp}{p(a - bp)} = dt$$

Al aplicar fracciones parciales a la expresión de la izquierda se tiene que

$$\int \frac{A}{p} dp + \int \frac{B}{a - bp} dp = \int dt$$

Resolviendo las fracciones parciales, se llega a

$$\frac{1}{a} \int \frac{dp}{p} + \frac{b}{a} \int \frac{dp}{a - bp} = t + c$$

Resolviendo las integrales indicadas se tiene que

$$\frac{1}{a} lnp - \frac{1}{a} ln|a - bp| = t + c$$

Al Aplicar propiedades de logaritmos se llega a

$$ln \frac{p}{a - bp} = at + ac$$

Y, al aplicar propiedades de la potenciación

$$\frac{p}{a - bp} = e^{at+ac}$$

$$\frac{p}{a - bp} = e^{at} e^{ac}$$

Haciendo k=eac y sustituyendo, se obtiene

$$\frac{p}{a - bp} = ke^{at}$$

Despejando p se llega a

$$p = \frac{ake^{at}}{1 + bke^{at}}$$

En condiciones iniciales se tiene que $p(0) = p_0$ por lo cual

$$p_0 = \frac{ak}{1 + bk}$$

Despejando k

$$k = \frac{p_0}{a - p_0 b}$$

Sustituyendo k en p se tiene

$$p = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-at}}$$

Que es la solución de la ecuación diferencial logística dada, en la que p es la población en cualquier instante de tiempo: t, dado en meses.

Como aplicación de la solución de la ecuación diferencial logística, resuélvase el problema 1; Suponiendo que a=0.1 y b=1*10-7, encontrar p para t=30 meses, sabiendo que p0=8000, además, encontrar el valor del límite de la población pasado un largo periodo de tiempo.

Solución:

Utilizando la ecuación final de la deducción anterior, y con los datos dados se tiene

$$p = \frac{0.1*8000}{10^{-7}*8000+(0.1-10^{-7}*8000)e^{-0.1*30}} = 15827$$ personas

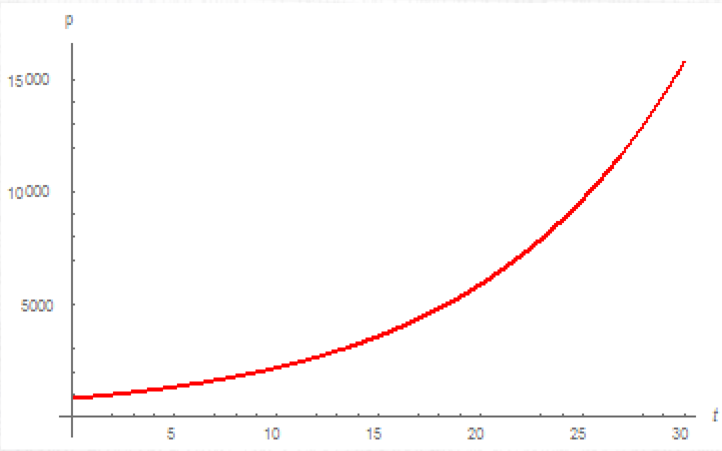


Figura 1: Población versus tiempo, problema 1.

Para encontrar el límite a un largo periodo de tiempo se procede así

$$\lim_{t\to\infty} p = \frac{a}{b} = 1000000$$ personas

Ahora se intentará verificar gráficamente el resultado (ver Figura 2).

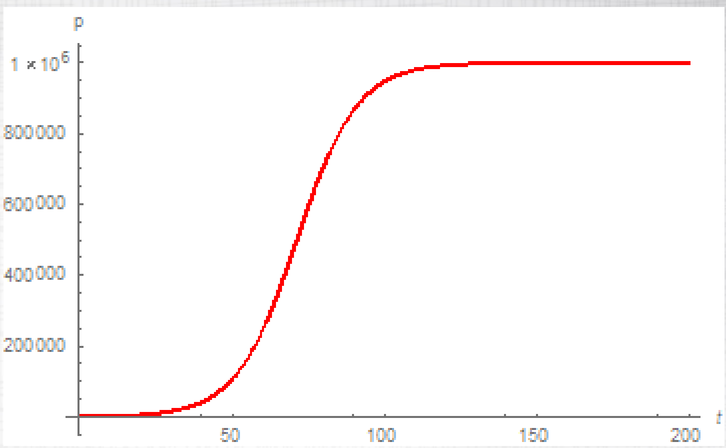


Figura 2: Capacidad de soporte, problema 1.

Como se puede evidenciar en la gráfica de población versus tiempo, cuando el tiempo tiende a un largo periodo, el valor de p se estabiliza en 1*106, lo que confirma el límite calculado. Igualmente, se puede verificar el valor de la población para un periodo de tiempo de 70 meses; por la ecuación se calcula que p es igual a 46752, valor que se puede leer en la Figura 2. Con las anteriores verificaciones y resultados generados por el modelo se puede hablar del comportamiento del mismo, al utilizar la ecuación diferencial, con la que es posible calcular la velocidad de cambio de población en cualquier instante de tiempo así:

Para t=30 meses

$$\frac{dp}{dt} = 15827(10^{-1} - 10^{-7} * 15827) = 1558$$

Personas/mes

Para t=70 meses

$$\frac{dp}{dt} = 467522(10^{-1} - 10^{-7} * 467522) = 24895$$

Personas/mes

Para t=100 meses, con p=946339

$$\frac{dp}{dt} = 946339(10^{-1} - 10^{-7} * 946339) = 5078$$

Personas/mes

Para un periodo de tiempo largo, por ejemplo para 200 meses se tiene que p=999958, en tanto que

$\frac{dp}{dt} = 999958(10^{-1} - 10^{-7} * 999958) = 4.2$

Personas/mes

Al analizar los resultados obtenidos y la Figura del modelo se evidencia que al comienzo, cuando el tiempo es 30 meses, la velocidad de cambio de la población es relativamente baja comparada con la cifra alcanzada a los 70 meses, a los 100 meses comienza a disminuir y a los 200 meses, considerado periodo de tiempo largo, su valor se acerca a cero, esto se evidencia en la Figura que representa la solución de la ecuación diferencial logística y explica por qué, a largo tiempo, se vuelve constante.

Para continuar, veamos la solución de la ecuación diferencial de (Larson, 2006), para ello se parte de $\frac{dy}{dt} = ky(1-\frac{y}{L})$, en la que k y

L son constantes positivas.

Y, al Aplicar separación de variables, se llega a

$$\frac{dy}{y(1-\frac{y}{L})} = kdt$$

Para resolver se integran términos

$$\int \frac{dy}{y(1-\frac{y}{L})} = \int kdt$$

Se aplican propiedades de las integrales y se resuelve

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L-y}\right) dy = \int kdt$$

$$lny - ln|L-y| = kt + c$$

Se aplican propiedades de logaritmos

$$ln\left|\frac{L-y}{y}\right| = -kt - c$$

$$\frac{L-y}{y} = e^{-kt-c}$$

Se hace b=e-c y se sustituye $\frac{L-y}{y} = be^{-kt}$

Se despeja y se llega a $y = \frac{L}{1+be^{-kt}}$

Para aplicar este modelo, procédase a dar solución al problema 2:

Para la ecuación diferencial logística dada, con p(0)=10, encontrar k, b, la capacidad de soporte y el valor de p en el cual la velocidad de crecimiento es más alta. Hacer análisis gráfico si es posible;

$$\frac{dp}{dt} = 3p(1-\frac{p}{100})$$

De la ecuación dada k=3, para hallar b se utiliza la solución de la ecuación diferencial con la condición dada p(0)=10, así

$$10 = \frac{100}{1+be^{-3*0}}$$

Despejando b se tiene que b=9

La capacidad de soporte se obtiene evaluando el límite de p cuando t tiende a infinito, respectivamente, así:

$\lim_{t\to\infty} p = \lim_{t\to\infty} \frac{100}{1+be^{-3t}} = 100$ Unidades

La solución de la ecuación diferencial dada presenta el modelo siguiente

$$p = \frac{100}{1+9e^{-3t}}$$

Que gráficamente se presenta en la Figura 3

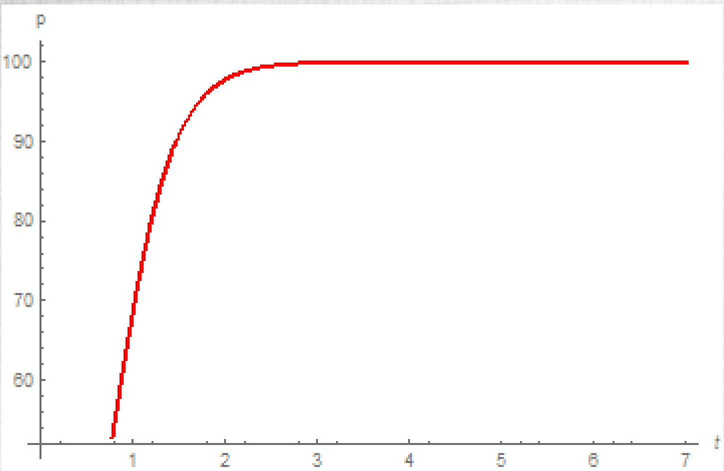


Figura 3: Población versus tiempo, problema 2.

La gráfica anterior, que representa la solución de la ecuación diferencial logística evidencia la coincidencia de los cálculos obtenidos por el modelo; por ejemplo, se observa que la capacidad de soporte del modelo es 100, para hacer análisis del modelo se puede predecir que dp/dt debe tender a cero en p=100. Haciendo el cálculo con la ecuación diferencial se tiene $\frac{dp}{dt} = 3 * 100\left(1 - \frac{100}{100}\right) = 0$

Por lo tanto queda confirmado el modelo.

Aplíquese el modelo en resolver otra situación: problema 3, a partir de una solución, escribir la ecuación diferencial logística:

Solución:

Sea, $p = \frac{1500}{1+24e^{-0.75t}}$ la ecuación logística que modela el crecimiento de una población.

Al evaluar la ecuación se puede saber:

La población inicial, se calcula haciendo t=0

$$p = \frac{1500}{1+24e^{-0.75t}} = \frac{1500}{1+24} = 60$$ Unidades

La capacidad límite o de soporte, se calcula con el límite cuando t tiende a infinito

$$\lim_{t\to\propto} \frac{1500}{1+24e^{-0.75\propto}} = \frac{1500}{1+0} = 1500$$ Unidades

La ecuación diferencial logística, conociendo del modelo k=0.75 y L=1500, se tiene

$$\frac{dp}{dt} = 0.75p(1 - \frac{p}{1500})$$

Gráficamente el modelo se representa en la Figura 4.

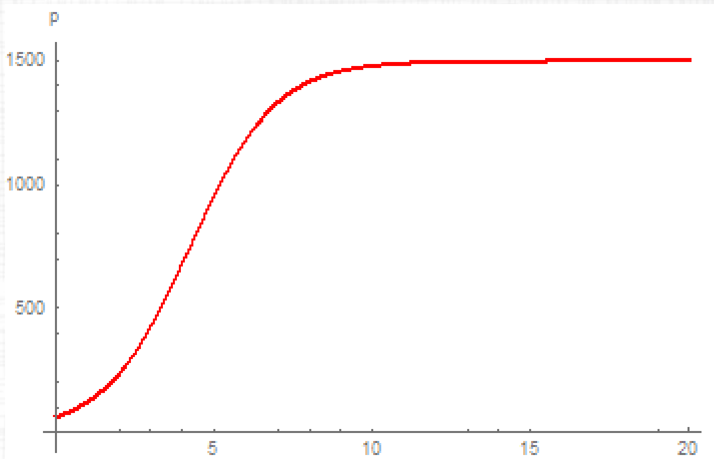


Figura 4: Gráfica modelo logístico, problema 3.

Por último, se va a estudiar la ecuación diferencial logística desde el punto de vista de (Stewart, 2008); partiendo de

$$\frac{dp}{dt} = kp(1 - \frac{p}{L})$$

Haciendo un proceso similar a los utilizados anteriormente para demostrar la ecuación diferencial dada, se llega a decir que el modelo de crecimiento de población es

$$p = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}$$

Siempre que $A = \frac{L - p_0}{p_0}$

Para aplicar el modelo dar solución al problema 4; la pesca de un pez en el océano pacífico ha sido representada por la ecuación diferencial $\frac{dp}{dt} = kp(1 - \frac{p}{L})$

En la que p es la biomasa del total de los integrantes de la población en kilogramos en el tiempo t medido en años, se estima que la capacidad de soporte L es 8*107 kilogramos y k=0.71 por año. Si p(0)=2*107 kilogramos cuál será la biomasa un año después y en cuánto tiempo la biomasa alcanzará 4*107 kilogramos?

Solución:

Conociendo L y p0 se calcula A

$$A = \frac{8*10^7 - 2*10^7}{2*10^7} = 3$$

Conociendo A y k, se encuentra el modelo

$$p = \frac{8 * 10^7}{1 + 3e^{-0.71t}}$$

De modo que en un año se tiene una biomasa de peces equivalente a

$$p = \frac{8*10^7}{1+3e^{-0.71}} = 3.23 * 10^7 \text{ Kilogramos}$$

Conociendo que p=4*107 kilogramos, se pude calcular el tiempo t del modelo y se encuentra que t=1.55 años. Véase la gráfica del modelo en la Figura 5

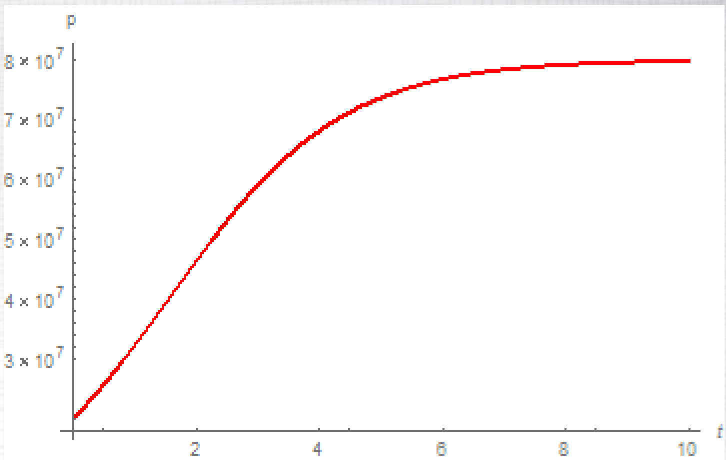


Figura 5: Gráfica del modelo logístico, problema 4.

Se han visto tres puntos de vista diferentes sobre la ecuación diferencial logística, viéndose que los tres modelos son similares al depender todos de la capacidad de soporte, de las condiciones iniciales y de los valores constantes. Además, los tres modelos, al ser aplicados, las gráficas presentaron similares comportamientos, se evidenciaron ritmos bajos al comienzo, luego ritmos altos a mediado tiempo y por último se ven ritmos que tienden a cero cuando se consigue la capacidad de soporte.

Adicional a los problemas planteados y resueltos, véase otro tipo de aplicación de la ecuación logística en el problema 5:

Para representar las ventas de un nuevo producto que se vende poco inicialmente (p(0)=25000) y que después se vende mejor, tendiendo a un nivel máximo de 80000 unidades, de saturación. Utilizar la función logística y con k=0.8 y hacer un análisis del modelo obtenido;

Solución: Sea la función logística

$$p = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}$$

Con la información dada se puede calcular A

$$A = \frac{80000 - 25000}{25000} = 2.2$$

Sustituyendo k y A en p, se tiene

$$p = \frac{80000}{1 + 2.2e^{-0.8t}}$$

La gráfica del modelo se ve en la Figura 6

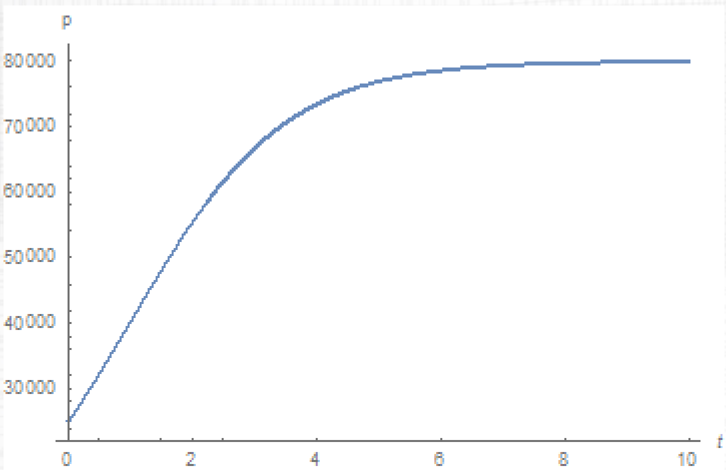


Figura 6: Gráfica del modelo logístico, problema 5.

Al observar la gráfica del modelo obtenido se ve que es evidente que esta se estabiliza en 80000 unidades, el cual se consigue después del año número seis. La gráfica evidencia una velocidad de crecimiento de las ventas hasta el tercer año, luego comienza a disminuir hasta el sexto año, en el que dp/dt tiende a cero y se explica con la capacidad de soporte del modelo. Verifíquese con las ecuaciones del modelo;

Para t=1 años

$p = \frac{80000}{1+2.2e^{-0.8}} = 40231$ Unidades

$\frac{dp}{dt} = 0.8 * 40231\left(1 - \frac{40231}{80000}\right) = 16000$ Unidades/año

Para t=2 años

$p = \frac{80000}{1+2.2e^{-1.6}} = 66562$ Unidades

$\frac{dp}{dt} = 0.8 * 66562\left(1 - \frac{66562}{80000}\right) = 8945$ Unidades/año

Para t=3 años

$p = \frac{80000}{1+2.2e^{-2.4}} = 66690$ Unidades

$\frac{dp}{dt} = 0.8 * 66690\left(1 - \frac{66690}{80000}\right) = 8876$ Unidades/año

Para t=4 años

$p = \frac{80000}{1+2.2e^{-3.2}} = 73416$ Unidades

$\frac{dp}{dt} = 0.8 * 74416\left(1 - \frac{74416}{80000}\right) = 4155$ Unidades/año

Para t=6 años

$p = \frac{80000}{1+2.2e^{-4.8}} = 78577$ Unidades

$\frac{dp}{dt} = 0.8 * 78577\left(1 - \frac{78577}{80000}\right) = 1118$ Unidades/año

Evidentemente en el año seis las ventas se acercan a la capacidad máxima y la velocidad de crecimiento de las mismas decae de forma pronunciada, lo que confirma el análisis hecho al observar la gráfica.

Conclusiones

Son muchos los ejemplos, soluciones, demostraciones y aplicaciones que se le pueden encontrar a la ecuación diferencial logística y se espera que la reflexión, presentada respecto al tema, sirva de entretención y fundamento para todos los lectores a quienes les interesa este tema.

Después de explorar la ecuación logística desde tres referentes fue posible ver que los tres autores dan soluciones diferentes en forma, utilizan diferentes constantes, pero los tres sirven para evaluar y analizar el comportamiento de poblaciones en diferentes contextos. Tal vez la diferencia estribaría en que en (Stewart, 2008) aparecen más aplicaciones de la ecuación diferencial logística, especialmente presentan estudios de especies animales como alces y coyotes, en cambio en (Larson, 2006) y (Zill, 2011) se preocuparon mucho por el carácter matemático de la ecuación.

Referencias bibliográficas

Larson, R. (2006). Cálculo. México DF: Mc Graw Hill.

Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable. México DF: Cengage Learning.

Zill, D. (2011). Cálculo, Trascendentes tempranas. México DF: Mc-Graw Hill.