
Evaluación de rendimiento de los estimadores para los parámetros de la Distribución Burr XII

Performance Evaluation of Estimators for the Burr XII Distribution Parameters

Wyara Vanesa Moura E Silva^a
wyaravms@hotmail.com

Daniel Leonardo Ramirez Orozco^b
orozco.dlr@gmail.com

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo principal evaluar el rendimiento de los estimadores de máxima verosimilitud y estimadores puntuales bayesianos para los parámetros p e b de la distribución Burr XII y sus versiones corregidas por *bootstrap*. Simulaciones de Monte Carlo fueron utilizadas para el análisis, considerando diversos escenarios y verificando algunas propiedades de esos estimadores, como la media, varianza, sesgo y error cuadrático medio. Los estimadores corregidos presentaron mejores rendimientos en cuanto a la estimación por el método de máxima verosimilitud, no sucede lo mismo en las estimativas puntuales para el análisis de los estimadores bayesianos.

Palabras clave: Bootstrap, Corrección de Sesgo, Estimación Bayesiana, Máxima Verosimilitud, Simulación de Monte Carlo.

Abstract

The main objective of this paper is to evaluate the performance of maximum likelihood estimators and Bayesian point estimators for the parameters p and b of the Burr XII distribution and its *bootstrap*-corrected versions. Monte Carlo simulations were used for the analysis, considering various scenarios and verifying some properties of these estimators, such as the mean, variance, bias, and mean squared error. The corrected estimators presented better performances in terms of the estimation by the maximum likelihood method, the same does not happen in the point estimates for the analysis of the Bayesian estimators.

Keywords: Bootstrap, Bias Correction, Bayesian Estimation, Maximum Likelihood, Monte Carlo Simulation.

^aPrograma de Postgrado en Matemática Aplicada y Estadística, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil

^bPrograma de Postgrado en Matemática Aplicada y Estadística, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil

1. Introducción

La distribución Burr XII con dos parámetros (p y b), es una de las variaciones más utilizadas debido a sus ventajas para modelar eventos estocásticos. Esta distribución, ha ganado gran aplicabilidad en los últimos años en las áreas de control de calidad, análisis de confiabilidad y modelamiento de tiempos de falla. Zimmer et al. (1998) muestran una relación entre la distribución Burr XII con la distribución Log-Normal y su eficiente aplicación en el análisis de confiabilidad. Tadikamalla (1980) muestra una amplia relación entre la distribución Burr XII y varias otras distribuciones, como Weibull, Logística, Lomax, entre otras. La estimación de los parámetros de la distribución Burr XII para el caso de dos parámetros no es algo sencillo de realizar. Como Abbasi et al. (2010) menciona en su trabajo, en el que propone una estimación de dichos parámetros utilizando métodos basados en redes neuronales. Moore and Papadopoulos (2000) propusieron en su trabajo una estimación bayesiana para los parámetros de la distribución Burr XII como modelo de tiempo de falla, usando diferentes distribuciones a priori para los parámetros de la distribución.

Dado que los estimadores usuales pueden no funcionar satisfactoriamente en escenarios de tamaño de muestra pequeño, es necesario obtener estimadores que estén menos sesgados en muestras pequeñas.

Este trabajo tiene como foco principal evaluar el rendimiento de los estimadores puntuales y sus versiones corregidas por *bootstrap* de los parámetros de la distribución Burr XII con dos parámetros. Fueron realizadas simulaciones de Monte Carlo en el ambiente del software R Team (2014), utilizando muestras pseudoaleatorias generadas a partir de variables que siguen la distribución Burr XII, los estimadores puntuales serán estimados por los métodos de estimación de máxima verosimilitud y estimación bayesiana (utilizando distribuciones a *priori* no informativa y estimativas de la media a *posteriori* para cada parámetro).

Fueron considerados diferentes tamaños de muestra, así como diferentes valores para cada parámetro de la distribución Burr XII.

Después de esta sección introductoria, sigue una breve discusión de las características principales de la distribución Burr XII. En la Sección 3, se presenta y analiza cada estimador propuesto. La sección 4 contiene los resultados y las discusiones. Y finalmente, algunas conclusiones sobre los resultados encontrados.

2. Marco Teórico

La distribución Burr XII fue mencionada por primera vez en la literatura por Burr (1942), con la función de densidad y la función de distribución dadas por

$$f(x|p, b) = pbx^{b-1}(1+x^b)^{-(p+1)}, \quad p, b > 0, \quad (1)$$

$$F(x|p, b) = 1 - (1 - x^b)^{-p}, x \geq 0, \quad p, b > 0, \quad (2)$$

donde, p y b son parámetros de forma.

Es interesante notar que cuando $p = 1$ la distribución Burr XII se reduce a la distribución Log-Logística.

Los momentos de la distribución Burr XII están dados por

$$E(X^n) = p \frac{\Gamma(p - \frac{n}{b})\Gamma(1 + \frac{n}{b})}{\Gamma(p + 1)}.$$

Donde, la média y la variánza son, respectivamente

$$E(X) = p \frac{\Gamma(p - \frac{1}{b})\Gamma(1 + \frac{1}{b})}{\Gamma(p + 1)},$$

$$Var(X) = - \left[p \frac{\Gamma(p - \frac{1}{b})\Gamma(1 + \frac{1}{b})}{\Gamma(p + 1)} \right]^2 + p \frac{\Gamma(p - \frac{2}{b})\Gamma(1 + \frac{2}{b})}{\Gamma(p + 1)}.$$

En la Figura 1, se presentan gráficos de la función de distribución y función densidad para algunos valores de p , considerando $b = 1$.

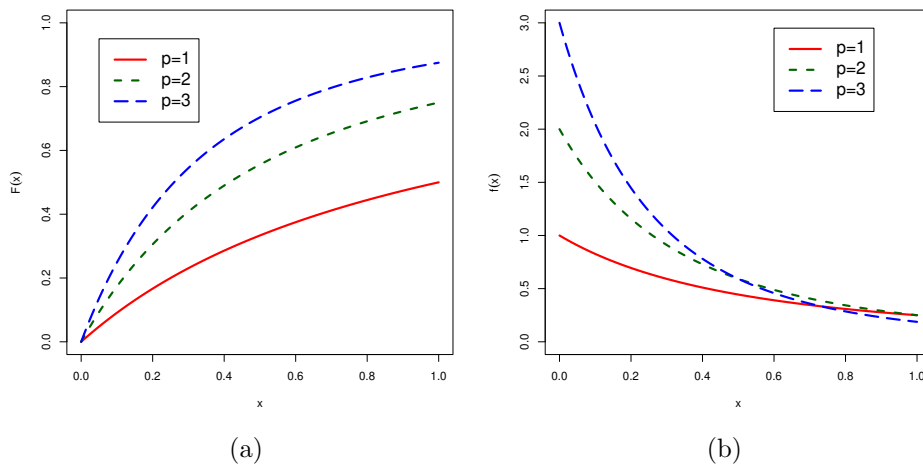


Figura 1: Burr XII: función de distribución (a) y función de densidad (b), para diferentes valores de p y b

3. Estimación de los Parámetros

Una de las principales etapas en el ajuste de un modelo es en cuanto a la estimación de los parámetros. Existen muchos métodos sugeridos para la realización de tal procedimiento. En esta sección, se presentarán métodos para la estimación de parámetros, para el caso específico de los parámetros p y b de la distribución Burr XII. Tales métodos serán la estimación por máxima verosimilitud y la estimación bayesiana.

3.1. Método de Máxima Verosimilitud

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de la distribución Burr XII de tamaño n , con parámetros p y b . Donde las funciones de densidad y de distribución se dan en (1) y (2) respectivamente.

Por lo tanto, la función de máxima verosimilitud presentada por Wang et al. (1996) está dada por

$$\begin{aligned} L(\theta|x) &= \prod_{i=1}^n f(x_i|p, b), \\ &= p^n b^n \prod_{i=1}^n (x_i^{b-1}) \prod_{i=1}^n (1 + x_i^b)^{-(p+1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Cuya función log-verosimilitud está representada por la forma

$$\begin{aligned} l(\theta|x) &= \log L(\theta|x), \\ &= n \log(pb) + (b-1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - (p+1) \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i^b). \end{aligned}$$

Así, los estimadores de máxima verosimilitud de p y b respectivamente, se pueden obtener resolviendo las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} l(\theta|x) &= \frac{n}{p} - \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i^b), \\ \frac{\partial}{\partial b} l(\theta|x) &= \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - (p+1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^b \log(x_i)}{(1 + x_i^b)}. \end{aligned}$$

Es posible observar que los estimadores de máxima verosimilitud de p y b no pueden resolverse explícitamente. Por lo tanto, las soluciones se pueden obtener

utilizando métodos numéricos de maximización de funciones. En este trabajo, se utilizó el método BFGS, el cual se incluye en las clases de procedimientos iterativos conocidos como métodos quasi-Newton, para maximizar aquí la función de máxima verosimilitud.

3.2. Estimación bayesiana

Otro enfoque para estimar parámetros de funciones es el bayesiano, donde se supone que los parámetros de interés siguen una distribución de probabilidad. La inferencia bayesiana se compone de dos elementos importantes, la función de verosimilitud $l(\theta|x)$ de la distribución de probabilidad, y la distribución $f(\theta)$ que representa la distribución del parámetro θ , conocida como distribución a *priori*, que recibe este nombre porque es la distribución de probabilidad de θ antes de que se observen los datos, representados por x . La inferencia sobre θ se basa en su función de densidad de probabilidad después que los datos son observados. Esta función se denomina función de densidad de probabilidad a *posteriori*, representada por $f(\theta|x)$ y obtenida a través del Teorema de Bayes dado por:

$$f(\theta|x) = \frac{l(\theta|x)f(\theta)}{\int l(\theta|x)f(\theta)d\theta}.$$

Debido a la dificultad de obtener la distribución a *posteriori*, mediante procesos analíticos o incluso por aproximación numérica, se utiliza un método de integración denominado método de Montecarlo vía cadenas de Markov (MCMC) Gamerman and Lopes (2006). Los dos métodos principales de MCMC son el muestreador de Gibbs (Gibbs Sampling) y el algoritmo Metropolis-Hastings. En este trabajo se utilizó el algoritmo Metropolis-Hasting para estimar las distribuciones posteriores marginales para cada parámetro de la distribución Burr XII.

Considerando entonces la función de densidad de la distribución Burr XII (1) y la función de verosimilitud para p y b (3). Consideraremos las siguientes funciones de densidad a *priori* para p y b , teniendo en cuenta que $p > 0$ y $b > 0$:

- $p \sim \text{Gamma}(a_1, b_1)$, a_1, b_1 son conocidos;
- $b \sim \text{Gamma}(a_2, b_2)$, a_2, b_2 son conocidos.

Entonces, tenemos que la distribución conjunta a *priori* para los parámetros p y b está dada por

$$\begin{aligned} p(p, b) &= f_G(p|a_1, b_1)f_G(b|a_2, b_2), \\ &\propto p^{a_1-1} \exp\{-pb_1\} * b^{a_2-1} \exp\{-bb_2\}. \end{aligned}$$

En el que se asumió la independencia entre los parámetros p y b . La distribución conjunta a *posteriori* para p y b viene dada por

$$\begin{aligned} f(p, b|x) &\propto l(\theta|x)p(p, b), \\ &\propto p^n b^n \prod_{i=1}^n (x_i^{b-1}) \prod_{i=1}^n (1 + x_i^b)^{-(p+1)}, \\ &\times p^{a_1-1} \exp\{-pb_1\} * b^{a_2-1} \exp\{-bb_2\}. \end{aligned}$$

Los valores elegidos para a_1, b_1, a_2, b_2 fueron 0.01, con el fin de obtener una varianza que sea grande, ya que se trata de priori no informativo, dado que no tenemos conocimiento sobre la distribución de los parámetros.

3.3. Método de Bootstrap

El método *bootstrap* fue introducido por Efron (1979) y se conoce como una técnica de remuestreo, en la que se realizan simulaciones de Monte Carlo tomando submuestras de la muestra original. Además de ser visto como un método computacional de inferencia estadística que substituye los cálculos analíticos por esfuerzo computacional.

Existen dos variaciones de *bootstrap*, a saber, el *bootstrap* paramétrico y el *bootstrap* no paramétrico. *bootstrap* paramétrico se refiere al caso en el que el remuestreo se realiza con base en una distribución conocida o establecida.

Por otro lado, en *bootstrap* no paramétrico existe el desconocimiento de la distribución verdadera (F) de los datos. En este trabajo se utilizará el *bootstrap* paramétrico.

3.4. Corrección de sesgo por *bootstrap*

La corrección de sesgo por *bootstrap* ha sido ampliamente utilizada para obtener estimadores corregidos, es decir, estimadores con valores de sesgo más bajos. Efron and Tibshirani (1993) describen en detalle la corrección del sesgo por *bootstrap*.

La idea general es utilizar el remuestreo de los datos con el objetivo de estimar la función de sesgo. Suponga que $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de una función de distribución $F = F_\theta(x)$, donde $\theta = t(F)$ es el parámetro y $\hat{\theta} = s(X)$ es el estimador de θ . El sesgo de $\hat{\theta}$ se define como

$$B_F(\hat{\theta}) = E_F[s(X)] - t(F) = E_F(\hat{\theta}) - \theta,$$

donde el subíndice F indica que la esperanza matemática se calcula con base en F . Por lo tanto, las estimativas de sesgo del *bootstrap* paramétrico están dadas por

$$\begin{aligned} B_{\hat{F}}(\hat{\theta}) &= E_{\hat{F}}[s(X)] - t(\hat{F}), \\ &= \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}. \end{aligned}$$

Para B grande, se genera B muestras independientes $X = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_B^*)$ de X , calculando las respectivas réplicas *bootstrap* $(\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_B^*)$ donde $\theta_i^* = s(X_i^*)$ para $i = (1, 2, \dots, B)$, entonces podemos aproximar $E_{\hat{F}}[s(X)]$ por $\hat{\theta}^*$ donde

$$\hat{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}_i^*.$$

Por lo tanto, se obtienen estimativas *bootstrap* de sesgo que están dadas por

$$\hat{B}_{\hat{F}}(\hat{\theta}) = \hat{\theta}^* - s(X).$$

Ahora se utilizan las estimativas de los parámetros *bootstrap* para construir una estimativa de la función de sesgo corregida MacKinnon and Smith Jr (1998) por *bootstrap* que esta dada por

$$\hat{\theta}^c = 2\hat{\theta} - \hat{\theta}^*.$$

4. Resultados y Discusión

Se utilizaron simulaciones de Monte Carlo en el software R Team (2014) para evaluar el desempeño de los estimadores de máxima verosimilitud ($\hat{\theta}$) y bayesianos (media de la distribución a *posteriori*) ($\hat{\theta}$) de la distribución Burr XII para el caso de dos parámetros y sus versiones de estimadores corregidos.

La simulación de una variable X con distribución Bur XII fue realizada a través del método de la transformada inversa en el que $\epsilon \sim U(0, 1)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - (1 - x^b)^{-p} = \epsilon, \\ \Rightarrow \quad x &= \left(\frac{1}{1 - \epsilon^{1/p}} \right)^{1/b}. \end{aligned}$$

Los tamaños de muestra que se consideraron fueron $n = 25, 50, 75$ y 100 . Para el parámetro p los valores $1, 2$ y 3 , y el parámetro b fijo en 1 , en todos los experimentos de Monte Carlo. Se utilizaron 300 réplicas de Monte Carlo y 100 réplicas de *bootstrap*.

Para analizar el desempeño en los resultados de la estimación puntual para cada tipo de estimación, se calcularon la media, el sesgo, la varianza (Var) y el error cuadrático medio de los estimadores (ECM).

Los resultados de la simulación se muestran en las Tablas 1, 2 y 3. Donde $\hat{\theta}$ y $\tilde{\theta}$ son los estimadores de máxima verosimilitud y bayesianos, respectivamente. $\hat{\theta}^*$ y $\tilde{\theta}^*$ los estimadores de máxima verosimilitud y los estimadores bayesianos corregidos por *bootstrap*.

La Tabla 1 presenta las estimativas para el caso en que $p = 1$ y $b = 1$. En este escenario, se puede observar que los estimadores \hat{p}^* y \tilde{p}^* presentaron, en valor absoluto, sesgo menor que el sesgo de los estimadores no corregidos en casi todos los tamaños muestrales. El estimador \hat{p}^* , se destaca, presentando menor sesgo. Por ejemplo, para $n = 25$, el sesgo de \hat{p}^* está dado, en valor absoluto, por 0.0072 mientras que el sesgo de \tilde{p}^* es 0.0630.

n	Estimador	Estimativas de p				Estimativas de b			
		Média	Sesgo	Var	ECM	Média	Sesgo	Var	ECM
25	$\hat{\theta}$	1.0704	0.0704	0.0632	0.0681	1.1110	0.1110	0.0529	0.0652
	$\hat{\theta}^*$	0.9928	-0.0072	0.0516	0.0517	0.9970	-0.0030	0.0378	0.0378
	$\tilde{\theta}$	1.0675	0.0675	0.0615	0.0661	1.1174	0.1174	0.0565	0.0703
	$\tilde{\theta}^*$	1.0630	0.0630	0.0645	0.0685	1.1171	0.1171	0.0594	0.0731
50	$\hat{\theta}$	1.0474	0.0474	0.0284	0.0306	1.0645	0.0645	0.0230	0.0272
	$\hat{\theta}^*$	0.9954	-0.0046	0.0241	0.0241	1.0029	0.0029	0.0190	0.0190
	$\tilde{\theta}$	1.0468	0.0468	0.0289	0.0311	1.0690	0.0690	0.0243	0.0291
	$\tilde{\theta}^*$	1.0456	0.0456	0.0306	0.0326	1.0709	0.0709	0.0258	0.0308
75	$\hat{\theta}$	1.0216	0.0216	0.0171	0.0176	1.0430	0.0430	0.0126	0.0145
	$\hat{\theta}^*$	0.9834	-0.0166	0.0156	0.0159	0.9972	-0.0028	0.0112	0.0112
	$\tilde{\theta}$	1.0225	0.0225	0.0169	0.0174	1.0441	0.0441	0.0127	0.0147
	$\tilde{\theta}^*$	1.0228	0.0228	0.0171	0.0177	1.0433	0.0433	0.0129	0.0147
100	$\hat{\theta}$	1.0500	0.0500	0.0118	0.0143	1.0217	0.0217	0.0095	0.0099
	$\hat{\theta}^*$	1.0130	0.0130	0.0103	0.0105	0.9872	-0.0128	0.0085	0.0087
	$\tilde{\theta}$	1.0499	0.0499	0.0120	0.0145	1.0237	0.0237	0.0096	0.0102
	$\tilde{\theta}^*$	1.0494	0.0494	0.0126	0.0150	1.0244	0.0244	0.0099	0.0105

Tabla 1: Estimativas de los parámetros de la distribución Burr XII, para el caso de $p = 1$ y $b = 1$

En relación a el ECM, se observa que el estimador que presentó menor ECM para el parámetro p fue el estimador \hat{p}^* . Y se puede observar que el estimador \tilde{p} presentó menor ECM comparado con el estimador \tilde{p}^* . También se observa que, a medida que se aumenta el tamaño de la muestra, el ECM de los cuatro estimadores disminuye.

En cuanto al parámetro b , se observa que el estimador \hat{b}^* presentó menor sesgo, destacándose de los demás. Además de tener un menor ECM para todos los tamaños de la muestra. Más aún, respecto al parámetro b , el estimador \tilde{b} fue el que presentó menor ECM comparado con el estimador \tilde{b}^* , su versión corregida.

Las Tablas 2 y 3 presentan las estimativas para el caso donde $p = 2$ y $p = 3$ con $b = 1$, respectivamente. Evidenciando las mismas interpretaciones que las de

la Tabla 1, respecto al estimador \hat{p}^* que presentaron los mejores resultados con menor sesgo y ECM en todos los escenarios y tamaños de la muestra.

n	Estimador	Estimativas de p				Estimativas de b			
		Média	Sesgo	Var	ECM	Média	Sesgo	Var	ECM
25	$\hat{\theta}$	2.2049	0.2049	0.2068	0.2488	1.0673	0.0673	0.0287	0.0333
	$\hat{\theta}^*$	2.0228	0.0228	0.1718	0.1723	0.9992	-0.0008	0.0256	0.0256
	$\tilde{\theta}$	2.2042	0.2042	0.2238	0.2655	1.0655	0.0655	0.0301	0.0344
	$\tilde{\theta}^*$	2.2081	0.2081	0.2745	0.3178	1.0663	0.0663	0.0327	0.0370
50	$\hat{\theta}$	2.1174	0.1174	0.0814	0.0952	1.0261	0.0261	0.0129	0.0136
	$\hat{\theta}^*$	2.0078	0.0078	0.0774	0.0775	0.9895	-0.0105	0.0122	0.0123
	$\tilde{\theta}$	2.1045	0.1045	0.0824	0.0933	1.0253	0.0253	0.0130	0.0137
	$\tilde{\theta}^*$	2.0965	0.0965	0.0931	0.1024	1.0258	0.0258	0.0133	0.0140
75	$\hat{\theta}$	2.0899	0.0899	0.0505	0.0586	1.0297	0.0297	0.0078	0.0087
	$\hat{\theta}^*$	1.9971	-0.0029	0.0473	0.0474	1.0005	0.0005	0.0075	0.0075
	$\tilde{\theta}$	2.0817	0.0817	0.0525	0.0592	1.0291	0.0291	0.0079	0.0087
	$\tilde{\theta}^*$	2.0776	0.0776	0.0586	0.0646	1.0293	0.0293	0.0080	0.0089
100	$\hat{\theta}$	2.0653	0.0653	0.0394	0.0436	1.0227	0.0227	0.0060	0.0065
	$\hat{\theta}^*$	1.9861	-0.0139	0.0368	0.0370	0.9980	-0.0020	0.0056	0.0056
	$\tilde{\theta}$	2.0615	0.0615	0.0396	0.0434	1.0223	0.0223	0.0061	0.0066
	$\tilde{\theta}^*$	2.0606	0.0606	0.0418	0.0455	1.0226	0.0226	0.0062	0.0067

Tabla 2: Estimativas de los parámetros de la distribución Burr XII, para el caso de $p = 2$ y $b = 1$

n	Estimador	Estimativas de p				Estimativas de b			
		Média	Sesgo	Var	ECM	Média	Sesgo	Var	ECM
25	$\hat{\theta}$	3.2033	0.2033	0.5129	0.5542	1.0466	0.0466	0.0265	0.0287
	$\hat{\theta}^*$	2.9024	-0.0976	0.3705	0.3801	0.9912	-0.0088	0.0242	0.0243
	$\tilde{\theta}$	3.1942	0.1942	0.5956	0.6334	1.0416	0.0416	0.0261	0.0278
	$\tilde{\theta}^*$	3.1605	0.1605	0.8211	0.8469	1.0384	0.0384	0.0270	0.0285
50	$\hat{\theta}$	3.1965	0.1965	0.2309	0.2695	1.0349	0.0349	0.0124	0.0136
	$\hat{\theta}^*$	3.0421	0.0421	0.2087	0.2105	1.0060	0.0060	0.0119	0.0119
	$\tilde{\theta}$	3.1782	0.1782	0.2264	0.2582	1.0322	0.0322	0.0121	0.0131
	$\tilde{\theta}^*$	3.1636	0.1636	0.2720	0.2987	1.0314	0.0314	0.0122	0.0132
75	$\hat{\theta}$	3.1178	0.1178	0.1525	0.1664	1.0264	0.0264	0.0094	0.0101
	$\hat{\theta}^*$	3.0038	0.0038	0.1477	0.1477	1.0044	0.0044	0.0095	0.0095
	$\tilde{\theta}$	3.1032	0.1032	0.1537	0.1643	1.0244	0.0244	0.0094	0.0100
	$\tilde{\theta}^*$	3.0924	0.0924	0.1739	0.1824	1.0238	0.0238	0.0095	0.0101
100	$\hat{\theta}$	3.1301	0.1301	0.0962	0.1132	1.0231	0.0231	0.0054	0.0060
	$\hat{\theta}^*$	3.0340	0.0340	0.0932	0.0944	1.0060	0.0060	0.0054	0.0054
	$\tilde{\theta}$	3.1307	0.1307	0.1051	0.1222	1.0224	0.0224	0.0055	0.0060
	$\tilde{\theta}^*$	3.1360	0.1360	0.1265	0.1450	1.0228	0.0228	0.0057	0.0062

Tabla 3: Estimativas de los parámetros de la distribución Burr XII, para el caso de $p = 3$ y $b = 1$

Así, observando las tres tablas para el parámetro p , el estimador \hat{p}^* fue el que mejores resultados obtuvo, en términos de sesgo y ECM, mostrando así la efectividad

de las correcciones de sesgo por *bootstrap*, ya en cuanto al estimador \tilde{p}^* no presentó menores resultados de sesgos y ECM que sus versiones no corregidas, solo en algunos casos. Lo mismo ocurre con el parámetro b , los estimadores \hat{b}^* presentaron mejores desempeños en todos los escenarios, y el estimador \tilde{b} presentando mejores resultados generales.

También vale la pena mencionar, con respecto al escenario de la Tabla 2, que los segundos mejores resultados para el parámetro b fueron \tilde{b} con respecto al sesgo, y \hat{b} con respecto al ECM, en todos los tamaños de muestra. Y en la Tabla 3, el segundo mejor resultado con respecto al parámetro b fue \tilde{b} , en relación con el ECM. Cabe destacar que los estimadores \hat{p}^* y \hat{b}^* fueron los que obtuvieron los menores sesgos y ECM en todos los tamaños de la muestra, en todos los escenarios.

5. Consideraciones Finales

Luego de presentar algunas características de la distribución Burr XII, fueron evaluados a partir de simulaciones de Monte Carlo el comportamiento de los estimadores puntuales de la distribución Burr XII, utilizando el método de máxima verosimilitud y el método bayesiano, tomando la media de la distribución a *posteriori* y sus respectivas versiones corregidas por *bootstrap* en algunos escenarios, con diferentes tamaños de muestra y valores de parámetros.

Los resultados obtenidos mostraron que las correcciones de sesgo por *bootstrap* para el método de estimación por máxima verosimilitud presentaron mejor desempeño, en términos de sesgo y ECM, para los dos parámetros p e b . En cuanto al parámetro b , el segundo mejor resultado, el método bayesiano presentó mejor desempeño que las versiones corregidas por *bootstrap*, ocurriendo lo mismo en algunos escenarios con respecto al parámetro p .

Se puede concluir entonces que los estimadores corregidos de sesgo por *bootstrap*, son recomendados para estimar los parámetros p e b de la distribución Burr XII, en cuanto a la estimación realizada por máxima verosimilitud, y por el método de estimación bayesiano, es preferible utilizar las estimaciones sin corrección de sesgo por *bootstrap*.

Agradecimientos:

La investigación de Wyara Moura y Daniel Orozco contó con el apoyo del gobierno de Brasil a través de la Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código 001.

Recibido:

Aceptado:

Referencias

- B. Abbasi, S. Z. Hosseinifard, and M. Abdollahian. On the estimating burr xii distribution parameters. In *2010 Seventh International Conference on Information Technology: New Generations*, pages 168–170. IEEE, 2010.
- A. Bovas and A. Thavaneswaran. A nonlinear time series model and estimation of missing data. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 43(3):493–504, September 1991.
- I. W. Burr. Cumulative frequency functions. *The Annals of mathematical statistics*, 13(2):215–232, 1942.
- S. Calderon and F. Nieto. Bayesian analysis of Multivariate Threshold Autoregressive Models with Missing Data. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 46(1):296–318, 2017.
- B. P. Carlin and S. Chib. Bayesian Model Choice via Markov Chain Monte Carlo Methods. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 57(3):473–484, September 1995.
- B. P. Carlin, N. G. Polson, and D. S. Stoffer. A Monte Carlo approach to Nonnormal and Nonlinear State-Space Modeling. *Journal of the American Statistical Association*, 87(418):473–484, June 1992.
- C. Carter and R. Konh. On Gibbs Sampling for State Space Models. *Biometrika*, 81(3):541–553, August 1994.
- C. Chen and J. Lee. Bayesian inference of threshold autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, 16(5):483–492, September 1995.
- C. W. S. Chen, F. Liu, and R. Gerlach. Bayesian subset selection for threshold autoregressive moving-average models. *Computational Statistics*, 26(1):1–30, 2011.
- S. Chib. Marginal Likelihood from the Gibbs Output. *Journal of the American Statistical Association*, 90(432):1313–1321, December 1995.
- S. Chib and I. Jeliazkov. Marginal Likelihood from the Metropolis-Hastings Output. *Journal of the American Statistical Association*, 96(453):270–281, March 2001.
- J. G. De Gooijer and A. Vidiella-i Anguera. Forecasting threshold cointegrated systems. *International Journal of Forecasting*, 20(2):237–253, 2004.
- P. Dellaportas, J. Forster, and I. Ntzoufras. On Bayesian model and variable selection using MCMC. *Statistics and Computing*, 12(1):27–36, 2002.
- B. Efron. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, pages 1–26, 1979.

- B. Efron and R. J. Tibshirani. An introduction to the bootstrap chapman & hall. *New York*, 436, 1993.
- S. Frühwirth-Schnatter. Data augmentation and dynamic linear models. *Journal of Time Series Analysis*, 15(2):183–202, March 1995.
- D. Gamerman and H. F. Lopes. *Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. CRC Press, 2006.
- E. George and R. McCulloch. Variable Selection Via Gibbs Sampling. *Journal of the American Statistical Association*, 8(423):881–889, September 1993.
- P. Green. Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Computation and Bayesian Model Determination. *Biometrika*, 82(4):711–732, December 1995.
- B. Hansen. Threshold autoregression in economics. *Statistics and Its Interface*, 4(2):123–127, 2011.
- A. Harvey. *Forecasting, structural time series model and the Kalman filter*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. ISBN 0-521-32196-4.
- T. Hong and T. Lee. Diagnostic Checking for the Adequacy of Nonlinear Time Series Models. *Econometric Theory*, 19(6):1065–1121, December 2003.
- L. Kuo and B. Mallick. Variable Selection for Regression Models. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 60(1):65–81, April 1998.
- Y. Kwon. *Bayesian Analysis of Threshold Autoregressive Models*. PhD thesis, University of Tennessee - Knoxville, 2003.
- Y. Kwon, H. Bozdogan, and H. Bensmail. Performance of Model Selection Criteria in Bayesian Threshold VAR (TVAR) Models. *Econometric Reviews*, 28(1-3):83–101, December 2009.
- S. Ling and W. Li. Diagnostic checking of nonlinear multivariate time series with multivariate arch errors. *Journal of Time Series Analysis.*, 18(5):447–464, September 1997.
- J. G. MacKinnon and A. A. Smith Jr. Approximate bias correction in econometrics. *Journal of Econometrics*, 85(2):205–230, 1998.
- S. Meyn and R. Tweedie. *Markov Chains and Stochastic Stability*. Oxford Statistical Science. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge, 2009. ISBN 978-0-511-51671-9.
- D. Moore and A. S. Papadopoulos. The burr type xii distribution as a failure model under various loss functions. *Microelectronics Reliability*, 40(12):2117–2122, 2000.
- F. Nieto. Modeling Bivariate Threshold Autoregressive Processes in the Presence of Missing Data. *Communications in Statistics - Theory and Methods.*, 34(4): 905–930, February 2005.

- F. Nieto. Forecasting with univariate TAR models. *Statistical Methodology*, 5(3): 263–273, May 2008.
- F. Nieto and M. Hoyos. Testing Linearity against a Univariate TAR Specification in Time Series with Missing Data. *Revista Colombiana de Estadística*, 34(1): 73–94, June 2011.
- F. Nieto, H. Zhang, and W. Li. Using the Reversible Jump MCMC Procedure for Identifying and Estimating Univariate TAR Models. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 42(4):814–840, 2013.
- R. O’Hara and M. Sillanpaa. A Review of Bayesian Variable Selection Methods: What, How and Which. *Bayesian Analysis*, 4(1):85–118, 2009.
- R. Paroli and L. Spezia. Bayesian Variable Selection in Markov Mixture Models. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 37(1):25–47, 2008.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013. URL <http://www.R-project.org/>.
- C. Robert and G. Casella. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer texts in Statistics. Springer Science+Business Media Inc., 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2004. ISBN 0-387-21339-6.
- T. Safadi and P. Morettin. Bayesian Analysis of Threshold Autoregressive Moving Average Models. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B.*, 62(3): 353–371, December 2000.
- M. So and C. W. S. Chen. Subset Threshold Autoregression. *Journal of Forecasting*, 22(1):49–66, January 2003.
- P. R. Tadikamalla. A look at the burr and related distributions. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, pages 337–344, 1980.
- R. C. Team. R: A language and environment for statistical computing. 2014.
- A. Thavaneswaran and A. Bovas. Estimation of multivariate non-linear time series models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 29(3):351–363, 1991.
- H. Tong. *Nonlinear Time Series, A Dynamical System Approach*. Oxford Statistical Science. Oxford University Press, Oxford, 1990. ISBN 0-19-852300-9.
- R. S. Tsay. Testing and Modeling Multivariate Threshold Models. *Journal of the American Statistical Association*, 93(443):467–482, July 1998.
- L. Vargas. Cálculo de la distribución predictiva en un modelo TAR. Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 2012.
- F. Wang, J. B. Keats, and W. J. Zimmer. Maximum likelihood estimation of the burr xii parameters with censored and uncensored data. *Microelectronics Reliability*, 36(3):359–362, 1996.

C. Wu and J. Lee. Forecasting Time-Varying Covariance with a Robust Bayesian Threshold Model. *Journal of Forecasting*, 30(5):451–468, August 2011.

W. J. Zimmer, J. B. Keats, and F. Wang. The burr xii distribution in reliability analysis. *Journal of quality technology*, 30(4):386–394, 1998.