CAPÍTULO 9

9

PRINCIPIO EXTREMAL

Ana Navarro Quiles
Universitat de València

Palabras clave

- *Principio extremal*
- *Método variacional*
- *Principio de buena ordenación*
- *Valor extremo*

El principio extremal es un método de demostración que, usado de forma correcta, suele llevar a soluciones de problemas complejos de una forma considerablemente corta y sencilla. En muchos problemas se pide analizar la existencia de un objeto que cumple ciertas condiciones. El principio extremal consiste en prestar atención a los objetos que maximizan o minimizan alguna función, convenientemente relacionada con la condición dada en el problema, y tratar de probar por reducción al absurdo que estos objetos cumplen la condición pedida. Es decir, por reducción al absurdo, partimos de que no se cumple el enunciado a probar. Se muestra que el objeto resultante tiene la propiedad deseada mostrando que una pequeña perturbación (o variación, de ahí método de las variaciones) incrementa (en el caso del máximo) o disminuye (en el del mínimo) el valor dado de una función convenientemente definida, llegando a una contradicción.

El capítulo se organiza en dos secciones. En la primera sección, definiremos el método del principio extremal así como sus condiciones de aplicabilidad, haciendo un breve repaso sobre algunas propiedades que nos aseguran la existencia de valores extremos, ya sea máximo o mínimo. Algunos ejemplos de aplicación del método, entre los que encontramos el famoso problema de Sylvester, serán resueltos en la sección 2.

9.1 Introducción

El principio extremal se basa en el análisis de los máximos/mínimos de una expresión previamente definida. Pero, esta expresión, dependiendo del problema a resolver, puede ser una función, una sucesión, un conjunto, etc. Para poder aplicar dicho método, tenemos que tener claro el concepto de máximo y mínimo. Introducimos a continuación el concepto de máximo y mínimo de una función y de un conjunto.

Definición 9.1 (Máximo y mínimo local)

*Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $P = (x_0, f(x_0))$ un punto perteneciente a la gráfica de la función. Se dice que P es un **máximo local** de f, si existe un entorno de centro x_0, $\mathcal{E}_{x_0} \subset A$, tal que para todo $x \in \mathcal{E}_{x_0}$ se cumple $f(x) < f(x_0)$.*
*Análogamente, el punto P és un **mínimo local** de f, si existe un entorno de centro x_0, $\mathcal{E}_{x_0} \subset A$, tal que para todo $x \in \mathcal{E}_{x_0}$ se cumple $f(x) > f(x_0)$.*

Definición 9.2 (Máximo y mínimo global)

*Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $P = (x_0, f(x_0))$ un punto perteneciente a la gráfica de la función. Se dice que P es un **máximo global** de f, si para todo $x \in A$, x distinto de x_0, se cumple $f(x) < f(x_0)$.*
*Análogamente, el punto P és un **mínimo global** de f, si para todo $x \in A$, x distinto de x_0, se cumple $f(x) > f(x_0)$.*

Definición 9.3 (Máximo y mínimo de un conjunto)

*Decimos que K es **cota superior** del conjunto D si $x \leq K$ para todo x del conjunto. A la menor de las cotas superiores de D se le denomina **supremo**. Si el supremo pertenece al conjunto se le llama **máximo** (o último elemento).*
*Análogamente, decimos que k es **cota inferior** del conjunto D si $x \geq k$ para todo x del conjunto. A la mayor de las cotas inferiores de D se le denomina **ínfimo**. Si el ínfimo pertenece al conjunto se le llama **mínimo** (o primer elemento).*

El principio extremal consiste en examinar los objetos que maximizan o minimizan una función/conjunto relacionada con la condición del problema con el objetivo de llegar a una contradicción.

Nota: *Supongamos problemas en los que puedas ordenar los elementos que aparecen en él. Es decir, tenemos un conjunto $A = \{a_1, ..., a_n\}$ formado por n elementos ordenables, los cuales cumplen una cierta condición. Supongamos que los elementos ya están ordenados, es decir, el primer elemento va a ser el más pequeño y el último el más grande. El principio extremal consiste en suponer que a es el mínimo y probar que existe otro $a^* \in A$ tal que $a^* < a$, siendo a^* otro elemento que también lo cumple la condición dada. Por lo que se llegaríamos a una contradicción.*

Como hemos indicado anteriormente, este método de demostración se puede aplicar siempre y cuando exista ese objeto que minimiza o maximiza dicha función o conjunto. Por tanto, vamos a recordar a continuación tres propiedades importantes para la existencia de elemento mínimo o máximo.

Proposición 9.1 (Existencia de mínimo o máximo)

1. *Todo conjunto finito no vacío de números reales tiene elemento minimal y maximal, los cuales no tienen por que ser únicos.*
2. *Todo subconjunto no vacío de enteros positivos contiene un elemento que es el más pequeño. Esta propiedad se conoce como el* ***principio de buena ordenación****.*
3. *Un conjunto infinito de números reales no tiene porque tener elemento minimal o maximal. Si el conjunto está acotado superiormente, entonces tiene supremo. Análogamente, si está acotado inferiormente, tiene ínfimo.*

Ejemplo 9.1 $n\sqrt{2}$ no es entero para cualquier entero positivo n.
Supongamos que existe n entero positivo tal que $n\sqrt{2}$ es entero. Vamos ahora a aplicar el principio extremal para llegar a una contradicción de esta afirmación.
Sea S el conjunto de todos los enteros positivos que cumplen la condición indicada, es decir,

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n\sqrt{2} \text{ es entero}\}.$$

Como $S \neq \emptyset$ (distinto del vacío), por el principio de buena ordenación, existe el menor elemento, que denotaremos por $k \in S$. Sea el entero positivo $(\sqrt{2}-1)k$, entonces

$$(\sqrt{2}-1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} \in \mathbb{N}.$$

Ya que ambos términos son enteros positivos y $2 > \sqrt{2}$. De esta forma, por definición del conjunto S, $(\sqrt{2}-1)k \in S$. Pero:

$$(\sqrt{2}-1)k < k.$$

Lo que nos lleva a contradicción con la hipótesis de que k es el menor elemento de S. Por tanto S es vacío, lo que implica que $n\sqrt{2}$ no es entero para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

9.2 Aplicación del principio extremal

En esta sección vamos a resolver algunos problemas aplicando el método del principio extremal. En particular, para ver su gran versatilidad, resolveremos tres problemas, cada uno perteneciente a un área diferente de las matemáticas: geometría, teoría de grafos y teoría de números.

Problema de Sylvester

Comenzaremos con la resolución de una famoso problema propuesto por Sylvester en 1893. Este problema matemático permaneció abierto hasta 1933 cuando Tibor Gallai publicó una complicada solución apelando a argumentos de geometría proyectiva. La solución que se propone a continuación con el uso del principio extremal es mucho más sencilla y fue hallada por Leroy Milton Kelly en 1948.

Problema 9.1 Sea S un conjunto finito de puntos en el plano, con la propiedad de que la recta determinada por dos puntos cualquiera del conjunto S pasa al menos por un tercer punto de S. Entonces, todos los puntos de S están alineados.

Solución *Supongamos que los puntos no están todos alineados y vamos a llegar a una contradicción usando* *el principio extremal. Sea A el conjunto de todos los pares de la forma (P, r), definido de la siguiente forma:*

$$A = \left\{ (P, r) : \begin{array}{l} r \text{ recta que pasa por dos puntos de } S \\ P \in S \text{ punto por el que } r \text{ no pasa} \end{array} \right\}.$$

Es decir, r es una recta que pasa por dos puntos del conjunto S (y por tanto por al menos un tercer punto, por hipótesis), pero no por P. Ahora, elegimos un punto p que minimiza la distancia de p a r (principio extremal, buscamos un extremo y queremos llegar a contradicción). Sea f el pie de la perpendicular de p a r. Como hemos indicado, r contiene al menos 3 puntos que llamaremos a, b y c. Debe haber dos de ellos, digamos a y b de un mismo lado de f. Sea b el que está más cerca de f de los dos. Entonces la distancia de b a la recta que une a y p es menor que la distancia de p a f. Por lo que llegamos a una contradicción, ya que hemos partido de la hipótesis de que la distancia del punto p a la recta r era la mínima. En la Figura 9.1 se encuentran los detalles gráficos de la resolución de este problema.

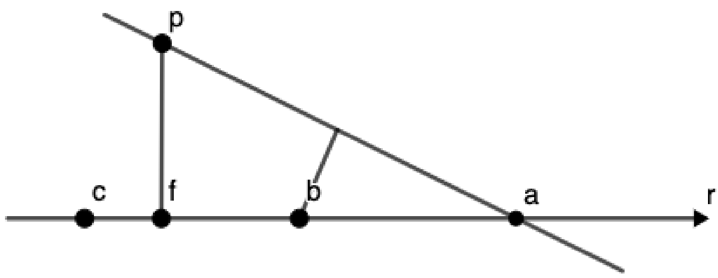

Figura 9.1: Detalles gráficos de la resolución del problema de Sylvester.

Nota: *El problema de Sylvester también puede ser encontrado en la literatura de forma más intuitiva como **problema del huerto**. Juanmi quiere plantar árboles y no quiere que estén todos en la misma línea. La condición para plantar es la siguiente: si una línea recta pasa por solo dos árboles tiene que plantar otro árbol en la misma línea, para que haya tres. Así Juanmi observó que a medida que agregaba árboles para eliminar una línea con dos árboles, otras nuevas líneas con dos árboles aparecían. Por ejemplo, si queremos plantar cuatro árboles, plantamos primero dos y en la misma línea tenemos que plantar el tercero. Para el cuarto, como no puede estar en la misma línea, lo plantamos fuera. Pero entonces existen líneas con únicamente dos árboles, por lo que no se cumple la propiedad. La única forma de cumplirla es alineando los cuatro árboles.*

Aplicación a la teoría de grafos

Problema 9.2 Todas las calles de Valdemadera son de un único sentido. Cada par de casas están conectadas exactamente por un camino de sentido dirigido. Vamos a demostrar que existe una casa que se puede alcanzar desde cada casa directamente o como mucho via otra vivienda.

Solución *Sea m el número máximo de caminos directos que conducen a cualquier casa, y sea M una casa para la cual se alcanza este máximo. Sea D el conjunto de las m casas que conectan directamente con M. Sea R el conjunto de todas las casas exceptuando a M y a las m casas en D. Observamos que:*

- *Si R es vacío, directamente se prueba el enunciado.*
- *Ahora, si no es vacío, sea $X \in R$, entonces existe E elemento del conjunto D con conexión $X \to E \to M$. Si no existiera tal E, entonces se podría llegar a X directamente desde todas las ciudades en D y desde M, es decir, $m + 1$ caminos conducirían a X, lo que contradice la suposición sobre M (la casa para*

la que se alcanza el máximo m). De esta forma queda probado el enunciado bajo las condiciones del problema.

En la Figura 9.2 se encuentran los detalles gráficos de la resolución de este problema.

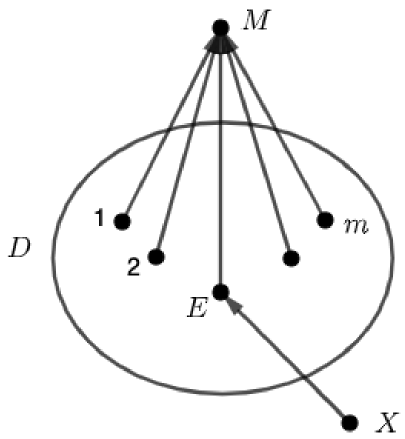

Figura 9.2: Detalles gráficos de la aplicación del principio extremal a un problema de teoría de grafos.

Aplicación a la teoría de números

Problema 9.3 No existen cuatro enteros positivos (x, y, z, u) que cumplan la siguiente relación:

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2).$$

Solución *Supongamos que existe dicho cuádruplo y vamos a llegar a una contradicción, usando el principio extremal. Sea A el conjunto de todos los cuádruplos que cumplen la relación indicada en el enunciado*

$$A = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{N}^4 \, : \, x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)\}.$$

Sea (a, b, c, d) aquel con menor $x^2 + y^2$. Entonces las siguientes implicaciones se cumplen

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2) \Longrightarrow 3|a^2 + b^2 \Longrightarrow 3|a \text{ y } 3|b \Longrightarrow a = 3a_1 \text{ y } b = 3b_1.$$

Por lo tanto

$$3(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 = (3a_1)^2 + (3b_1)^2 = 9(a_1^2 + b_1^2) \Longrightarrow (c^2 + d^2) = 3(a_1^2 + b_1^2).$$

De esta forma, hemos encontrado un cuádruplo $(c, d, a_1, b_1) \in A$. Pero $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$, lo que nos llevo a contradicción.

9.3 Problemas de olimpiadas matemáticas

Finalizamos esta serie de problemas, relativos al uso del principio extremal, con el siguiente problema enunciado para la olimpiada matemática húngara de 1990. Destacar que en este caso, aplicamos dicho método a un problema geométrico.

Problema 9.4 (Hungary Mathematical Olympiad, 1990). Considera un camino en el plano siguiendo las siguientes reglas: dado un punto (x, y) nos podemos mover en un paso a uno de los cuatro puntos $(x, y + 2x)$, $(x, y - 2x)$, $(x - 2y, y)$, $(x + 2y, y)$ con la restricción que no podemos volver atrás el paso que acabamos de hacer. Probar que, si comenzamos en el punto $P = (1, \sqrt{2})$ no podemos volver a dicho punto nunca más.

Solución *El punto P no está en las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ e $y = -x$. Entonces, exactamente uno de los cuatro posibles pasos nos deja cerca del origen, mientras que los tres restantes nos dejan alejados. Como la relación de las coordenadas de P es irracional al comienzo, la regla anterior sigue siendo válida durante todo el recorrido.*

Supongamos que después de n pasos volvemos al punto inicial, es decir,

$$P_0P_1...P_n = P_0 = (1, \sqrt{2}).$$

Si P_i es el punto más lejano del origen del camino cerrado obtenido, entonces:

$$d(OP_{i-1}) < d(OP_i) > d(OP_{i+1}), \quad \text{donde } d(OP_i) \text{ es la distancia del origen al punto } P_i.$$

Entonces, el único paso posible desde el punto P_i hacia el origen nos obliga a volver a P_{i-1}. Y esto es una contradicción, dado que no tenemos permitido volver atrás.

Ejercicios Propuestos

1. Cada punto reticular del plano cartesiano está etiquetado con un número entero positivo. Cada uno de estos números es la media aritmética de sus cuatro vecinos (arriba, abajo, izquierda, derecha). Demuestra que todas las etiquetas son iguales.

Definición 9.4

Un P de coordenadas (x, y) se llama ***reticular*** *si x e y son números enteros, es decir, si $x, y \in \mathbb{Z}$. Un plano reticular es el conjunto de puntos del plano cartesiano que son reticulares.*

2. Encuentra todas las soluciones positivas del sistema de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = x_3^2, \quad x_2 + x_3 = x_4^2, \quad x_3 + x_4 = x_5^2, \quad x_4 + x_5 = x_1^2, \quad x_5 + x_1 = x_2^2.$$

Bibliografía Adicional

1. Engel, A. (1998). The Extremal Principle. *Problem-Solving Strategies*. Editorial Springer, 39-58.