CAPÍTULO 3

3

EL PRINCIPIO DEL PALOMAR

Víctor Lanchares Barrasa
Universidad de La Rioja

Palabras clave

- *Palomas y nidos*
- *Principio del palomar generalizado*
- *Combinatoria*

Cuando nos enfrentamos a la resolución de un problema matemático, uno tiende a pensar que se requieren técnicas y conocimientos sofisticados. Sin embargo, en algunas ocasiones, solo son necesarias algunas nociones o principios elementales, que podríamos decir que son de sentido común. No obstante, la aplicación de estos principios no siempre es evidente y es ahí donde radica la dificulatad. En este capítulo veremos una de las técnicas básicas para la resolución de algunos problemas, que van desde algunos muy elementales hasta otros de gran dificultad. La mayoría de ellos pertenecen a la clase de problemas en los que se pide demostrar la existencia o no de una determinada propiedad. En este sentido, como norma general, tendremos demostraciones no constructivas, es decir, demostraciones en las que no podemos dar un ejemplo concreto que pruebe nuestra afirmación.

3.1 Introducción

El *principio del palomar* o *principio de las cajas* nos presenta una afirmación que, aparentemente, no necesita demostración.

Proposición 3.1 (Principio del palomar)

Si distribuimos una serie de objetos en cajas y hay más objetos que cajas, entonces habrá una caja que contenga al menos dos objetos.

No es difícil formular una versión generalizada de este mismo principio, que ponemos ya en términos matemáticos.

Proposición 3.2 (Principio del palomar generalizado)

Si distribuimos $km + n$ objetos en m cajas, y $n \geq 1$, entonces alguna caja tiene al menos $k + 1$ objetos.

Demostración Supongamos que ninguna de las m cajas tiene más de k objetos, y $n > 1$. Entonces, el número total de objetos es menor o igual que km, que es estrictamente menor que el total de objetos $km + n$. Así, hemos llegado a una contradicción, por lo que alguna caja tiene que tener más de k objetos, es decir, al menos $k + 1$. ■

El origen de este principio se atribuye al matemático del siglo XIX Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien lo aplicó para realizar algunas demostraciones en sus investigaciones matemáticas, por lo que también se conoce como principio de Dirichlet. Sin embargo, debemos remontarnos un par de siglos atrás, hasta el siglo XVII, para encontrar la que parece ser la primera aparición de este principio. Está relacionada con una sorprendente afirmación que sirve como punto de partida para ver la potencia del mismo:

> *"Es absolutamente necesario que haya dos hombres con el mismo número de pelos en la cabeza.[1]"*

Con toda seguridad podemos afirmar que no hay ningún hombre que tenga más de un millón de pelos en la cabeza. Como en el mundo hay más de un millón de hombres, necesariamente debe haber dos de ellos con el mismo número de pelos.

Nota: *Tal como se dijo al principio, esto es una prueba de existencia y no podemos decir qué personas en concreto son las que tienen igual número de pelos.*

En el ejemplo que acabamos de ver, es fácil reconocer que el principio del palomar nos va a conducir a la solución. De hecho, es más o menos evidente identificar los objetos, o palomas, y las cajas, o nidos. En este caso, los nidos son los números comprendidos entre el 0 (para aquellos hombres que no tienen ningún pelo en la cabeza) y un millón (aquellos que tienen el mayor número posible de pelos), mientras que las palomas son todos los hombres que hay en el mundo. Antes de plantear una serie de ejercicios elementales, veamos un par de ejemplos más.

Ejemplo 3.1 Bruno tiene 10 bolsillos en el abrigo y 44 monedas de euro. Quiere meter las monedas en los bolsillos, de manera que en cada bolsillo haya un número distinto de monedas. ¿Es posible hacerlo?

Solución *En este caso los nidos van a ser los números del 0 al 9, que representan el número de monedas que*

[1]Jean Leurechon. *Récréation Mathematique: Composee De Plusieurs Problemes Plaisants Et Facetieux*, 1626.

puede haber en un bolsillo, mientras que las palomas serán los bolsillos. Si hubiera una paloma en cada nido, habríamos sido capaces de poner en cada uno de los 10 bolsillos un número distinto de monedas. Ahora bien, en ese caso tendríamos $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ *monedas, pero eso no es posible, ya que solo hay 44 monedas. Esto quiere decir que alguno de los nidos está ocupado por más de una paloma o, lo que es lo mismo, hay la misma cantidad de monedas en dos de los bolsillos.*

Ejemplo 3.2 Un total de n equipos de fútbol se enfrentan entre sí jugando partidos todos los fines de semana hasta que al final se enfrenten todos contra todos. Pruébese que al acabar cada fin de semana siempre hay dos equipos que han jugado, hasta ese momento, el mismo número de partidos.

Solución *Identificamos los nidos como el número de partidos que ha podido jugar un equipo hasta ese momento. Este número puede variar entre 0, si todavía no ha jugado ningún partido, y* $n-1$*, si se ha enfrentado a todos los demás equipos. Así, tenemos* n *nidos y* n *equipos. Parece que no podemos aplicar el principio del palomar, pero analicemos un poco mejor la situación. Los nidos* 0 *y* $n-1$ *son incompatibles, pues no puede darse el caso de que un equipo haya jugado contra todos los demás y otro no haya jugado ningún partido. Por lo tanto el número de nidos es uno menos, es decir* $n-1$*. Como hay* n *equipos, en algún nido tiene que haber al menos dos equipos. Es decir, todas las semanas habrá al menos dos equipos que lleven jugados el mismo número de partidos.*

3.2 El principio del palomar y problemas aritméticos

Una vez que hemos visto algunas aplicaciones casi inmediatas del principio del palomar, vamos a pasar a conssiderar su aplicación a algunos problemas interesantes en el contexto de la aritmética. Esto nos va a permitir probar algunas propiedades que, con otras técnicas, sería más complicado de hacer. Para empezar, vamos a considerar un ejemplo bastante sencillo

Ejemplo 3.3 Probar que, dados 8 números naturales cualesquiera, siempre hay al menos dos cuya diferencia es múltiplo de 7.

Solución *En este caso los nidos van a ser los posibles restos que se obtienen al dividir un número por 7. Es decir, los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. En total hay 7 restos posibles. Como tenemos 8 números, podemos asegurar que habrá al menos dos de ellos que dejan el mismo resto al dividirlos por 7. Por tanto, la diferencia de estos dos números es divisible por 7.*

Nota: *Podemos generalizar el enunciado del ejemplo anterior a cualquier número. Así, podemos afirmar que, dada una colección de* $n+1$ *números, siempre hay dos de ellos cuya diferencia es un múltiplo de* n*.*

A aprtir de aquí, se puede explotar esta misma idea para abordar problemas más complejos. Este es el caso del siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4 Probar que existe al menos un número, cuyos dígitos son todos igual a 1, que es múltiplo de 7.

Solución *Consideremos los 8 números* $a_1=1$, $a_2=11$, $a_3=111$, $a_4=1111$, $a_5=11111$, $a_6=111111$, $a_7=1111111$, $a_8=11111111$*. Por el problema anterior, hay dos de ellos,* a_i*,* a_j *(*$i<j$*), cuya diferencia es múltiplo de 7. Es decir*

$$a_j - a_i = \underbrace{1\cdots1}_{j-i}\underbrace{0\cdots0}_{i} = \underbrace{1\cdots1}_{j-i}10^i = \dot{7},$$

donde $\dot{7}$ significa un múltiplo de 7. Puesto que 10^i no es múltiplo de 7, ya que 7 y 10 son primos entre sí (no tienen divisores comunes), entonces $\underbrace{1\cdots 1}_{j-i}$ es múltiplo de 7.

Al igual que antes, podemos generalizar el enunciado del ejemplo anterior y formular la siguiente proposición.

Proposición 3.3

Si n y 10 son primos entre sí, entonces existe al menos un número, cuyos dígitos son todos iguales, que es múltiplo de n.

Explotando aún más la idea del Ejemplo 3.3 se puede abordar el siguiente problema.

Problema 3.1 Probar que existe una potencia de 3 que acaba en 001.

Solución *Como en los casos anteriores, tomamos los números $a_j = 3^j$, con $j = 1, \ldots, 1001$, es decir las primeras 1001 potencias de 3. Según lo que hemos visto, necesariamente dos de ellas dejan el mismo resto al dividir por 1000. Por tanto, existen índices i, j, con $i < j$, tales que $3^j - 3^i$ es múltiplo de 1000. Por otra parte,*

$$3^j - 3^i = 3^i(3^{j-i} - 1) = \dot{1000}.$$

Como 3 y 1000 no tienen divisores comunes, $3^{j-i} - 1$ es múltiplo de 1000, es decir, acaba en tres ceros. Por tanto, 3^{j-i} acaba en 001.

3.3 El principio del palomar y desigualdades

Los problemas relacionados con la aritmética no son los únicos en los que podemos aplicar el principio del palomar. Donde se revela también útil es en el terreno de las desigualdades, por su puesto no en todos los casos. De hecho, fue aquí donde Dirichlet lo aplicó con éxito. El siguiente ejemplo está en la línea de lo que Dirichlet llegó a probar sobre lo que se conoce como aproximaciones diofantinas de los números reales.

Ejemplo 3.5 Sea x un número real cualquiera. Probar que entre los números

$$x, 2x, 3x, \ldots, (n-1)x$$

hay al menos uno cuya distancia a un número entero es a lo sumo $1/n$.

Solución *Lo primero es ver que basta considerar la parte decimal de los $n-1$ números, que es lo que nos va a indicar la distancia a un entero. Ahora, dividimos el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos de longitud $1/n$, como se muestra en la Figura 3.1*

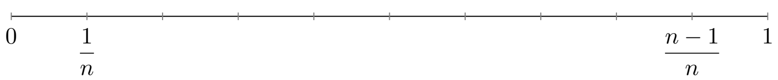

Figura 3.1: División del intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos.

Si al menos uno de los números está en el intervalo $[0, 1/n]$ o en el $[(n-1)/n, 1]$, ya estaría probado. Si este no fuera el caso, habría $n-1$ números distribuidos en $n-2$ intervalos y en uno de ellos habría al menos dos, digamos jx y kx, con $k > j$ (véase la Figura 3.2). Ahora bien, $(k-j)x$, es uno de los números que nos han dado y su distancia a un entero es claramente inferior a $1/n$, lo que contradice que no haya ningún número en el primer o último intervalo.

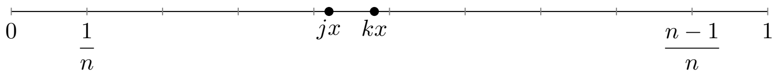

Figura 3.2: Los números jx y kx, con $k > j$, que están en el mismo subintervalo.

Nótese que el problema anterior es un problema de existencia, donde lo que se busca es probar que uno de los números dados, no importa en concreto cuál, verifica la propiedad deseada. En este sentido, no es un problema clásico de desigualdades como puede ser probar que, dados a y b, números reales cualesquiera, $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Este matiz suele ser una pista para conducirnos al principio del palomar. Es decir, si tenemos que probar la existencia o no de alguna propiedad, el principio del palomar puede estar escondido detrás de la demostración. Esto es lo que sucede con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6 Probar que existen enteros a, b y c, no todos cero y cuyo valor absoluto es menor que 1.000.000, tales que

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.$$

Solución *La idea es considerar suficientes números en un determinado intervalo, de manera que pueda dividirse en partes de longitud apropiada y aplicar el pricipio del palomar para ver que dos de dichos números están en el mismo subintervalo. Lo que viene ahora es una cuestión de ajustar la cantidad de números y la longitud del intervalo. Para determinar la cantidad de números nos fijamos en la cota para los valores de los parámetros a, b y c. Como todos son menores que 1.000.000, vamos a considerar el siguiente conjunto de 10^{18} números*

$$S = \{r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} \mid 0 \leq r, s, t < 10^6 - 1\}.$$

El siguiente paso es dar una cota para los números de este conjunto. Pero esto no es muy difícil, pues basta tomaar $a = b = c = 1.000.000$. De esta manera obtenemos la cota $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})10^6$. Entonces, para cada $x \in S$, $0 \leq x < d$. Como tenemos 10^{18} números, dividimos el intervalo $[0, d]$ en $10^{18} - 1$ partes iguales. Es decir, cada parte tiene una longitud $L = d/(10^{18} - 1) < 10^{-11}$. Como hay más números que partes en el intervalo $[0, d]$, por el principio del palomar, hay al menos dos elementos del conjunto S en un mismo subintervalo de longitud L. Si esos números son

$$s_1 = a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3}, \quad s_2 a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3},$$

entonces

$$s = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2} + (c_1 - c_2)\sqrt{3},$$

que está en el conjunto S, cumple que $|s| < L < 10^{-11}$.

3.4 El principio del palomar y problemas geométricos

El principio del palomar lo encontramos también en problemas de corte geométrico, donde los nidos, o palomares, pueden construirse gráficamente en algunos casos. Un ejemplo típico es el siguiente

Ejemplo 3.7 Prueba que, dados 5 puntos en un triángulo equilátero de lado 2, siempre podemos encontrar dos que están a distancia menor o igual que 1.

Solución *La idea es construir cuatro palomares, a partir de una división adecuada del triángulo equilátero en cuatro partes iguales. Esta división se ve en la Figura 3.3.*

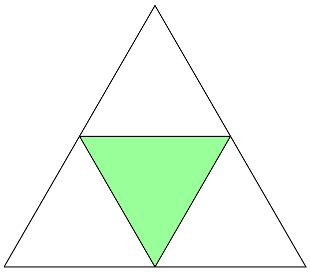

Figura 3.3: División del triángulo equilátero.

Observamos que el triángulo original se ha dividido en cuatro triángulos equiláteros de lado 1. Es evidente que, si tomamos 5 puntos, dos de ellos estarán en el mismo triángulo, por lo que su distancia no puede ser mayor que el lado del mismo, es decir 1.

Ejemplo 3.8 Dados 51 puntos en un cuadrado de lado 1, prueba que siempre podemos encontrar tres de ellos que pueden cubrirse con un círculo de radio 1/7.

Solución *Las condiciones del problema nos sugieren cuántos palomares debemos buscar. De hecho, al decirnos que hay al menos tres puntos, podemos pensar que hemos distribuido dos puntos en cada palomar y al final nos sobra uno que debemos de introducir en alguno de los palomares que ya tienen dos puntos. Así pues, buscamos 25 palomares, en los que habrá 2 puntos en cada uno de ellos y el punto 51 tendrá que estar en algún palomar con otros dos. Ahora bien, un cuadrado de lado 1 se puede dividir sin dificultad en 25 cuadrados de lado 1/5, como se muestra en la siguiente Figura 3.4. Por el principio del palomar, sabemos que en alguno de*

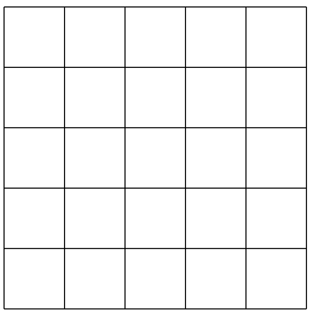

Figura 3.4: División de un cuadrado en 25 cuadrados de lado $1/5$.

estos cuadrados hay al menos tres puntos. Sin embargo, en el enunciado se habla de círculos. Para buscar el círculo, basta darse cuenta de que un cuadrado puede cubrirse con un círculo, cuyo radio, R, es la mitad de su diagonal. Como el lado del cuadrado es 1/5, se tiene

$$R = \frac{1}{5\sqrt{2}} < \frac{1}{7},$$

con lo que queda resuelto el problema.

Ejemplo 3.9 Se consideran 7 puntos en un rectángulo 3×4. Demuestra que siempre hay dos de ellos a distancia menor o igual que $\sqrt{5}$. Demuestra que esto sigue siendo cierto cuando se consideran 6 puntos.

Solución *Para resolver el primer apartado, construimos 6 palomares consistentes en rectángulos de dimensión* 2×1, *como se muestra en la Figura 3.5.*

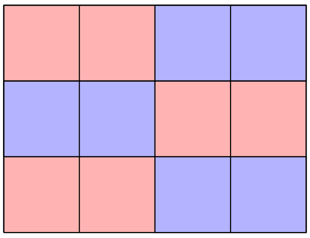

Figura 3.5: Construcción de 6 palomares.

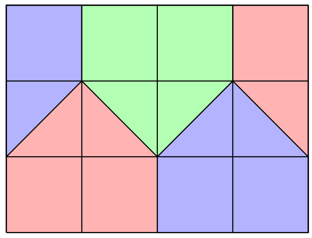

Figura 3.6: Construcción de 5 palomares.

La distancia máxima en cada uno de los palomares es igual a la diagonal del rectángulo, que es igual a $\sqrt{5}$. *Como hay 7 puntos y 6 palomares, hay al menos dos puntos a distancia no mayor que* $\sqrt{5}$.

Para la segunda parte, no valen los 6 palomares anteriores y hay que buscar 5 palomares en los cuales la distancia máxima siga siendo $\sqrt{5}$. *Eso puede conseguirse dividiendo el rectángulo como en la Figura 3.6.*

No siempre los problemas son del mismo tipo que los anteriores, la variedad de los mismos es muy grande y podemos ver aplicaciones del principio del palomar en problemas geométricos espaciales, aunque nosotros seguiremos en el plano, esta vez con problemas de coloración.

Ejemplo 3.10 Cada punto del plano está pintado de color rojo o de color azul. Probar que existe un rectángulo que tiene los cuatro vértices del mismo color.

Solución *Trazamos tres líneas paralelas, tal y como se muestra en la Figura 3.7, y sobre ellas vamos a encontrar los vértices de nuestro rectángulo.*

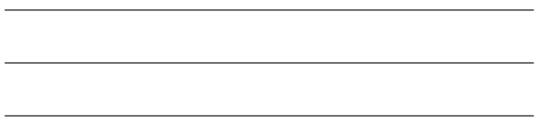

Figura 3.7: Líneas horizontales para construir el rectángulo.

La idea es situar sobre ellas suficientes puntos que nos permitan encontrar los vértices de nuestro rectángulo. Con tal fin, trazamos nueve líneas perpendiculares a las tres horizontales como en la Figura 3.8.

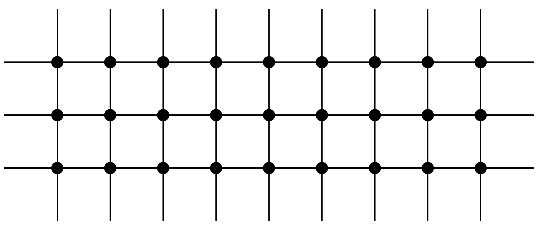

Figura 3.8: Intersección de la líneas verticales y horizontales.

Notemos que sobre cada línea vertical hay una terna de puntos, que son como resultado de la intersección de cada línea vertical con las tres líneas horizontales. Ahora bien, esos tres puntos pueden colorearse con dos colores de 8 formas diferentes (2 colores por cada punto). Las 8 diferentes coloración de esos tres puntos puede *verse en la Figura 3.9, donde hemos empezado por la primera fila coloreando todos los vértices son de color rojo y terminando en la octava columna coloreando todos los vértices de color azul.*

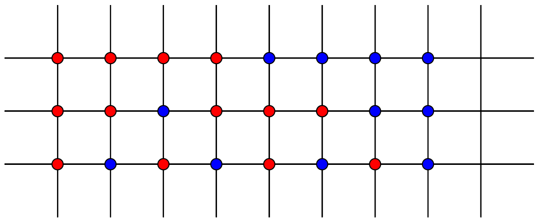

Figura 3.9: Las 8 posibles coloraciones de las ternas de puntos.

Cuando vayamos a colorear los tres puntos de la última recta, necesariamente tendremos que repetir una terna de colores y, de las ternas repetidas tendremos los vértices de nuestro rectángulo, ya que en cada terna hay siempre dos puntos del mismo color. El rectángulo cuyos vértices tienen la misma coloración, tal y como se muestra señalado en la Figura 3.10.

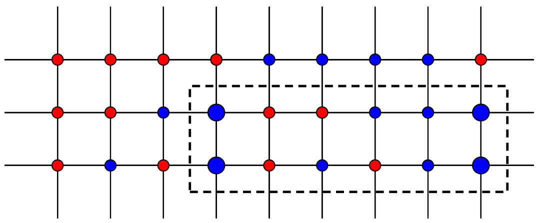

Figura 3.10: Rectángulo con los vértices del mismo color.

Ejercicios Propuestos

1. Una bolsa contiene bolas de cinco colores diferentes. ¿Cuál es el menor número de bolas que debemos sacar, sin mirarlas, para asegurar que tenemos dos del mismo color?

2. Pruébese que en un grupo de 37 personas hay al menos cuatro que han nacido en el mismo mes.

3. ¿Cuántas personas se necesitan para asegurar que hay dos que cumplen años el mismo día?

4. Si tenemos 10 pares de zapatos iguales, ¿cuántos zapatos debemos coger para asegurar que hemos sacado un par que nos podemos poner?

5. En un cajón hay 100 calcetines rojos, 80 verdes, 60 azules y 40 negros. Sacamos los calcetines al azar uno por uno, sin volverlos a meter en el cajón. ¿Cuál es el menor número de calcetines que debemos sacar para asegurar que hay al menos 10 pares de calcetines correctos?

6. Una persona toma al menos una aspirina diaria durante 30 días seguidos. Si ha tomado 45 aspirinas en total, pruébese que hay una serie de días consecutivos en los que ha tomado exactamente 14 aspirinas.

7. Dada una sucesión de n números enteros cualesquiera, no necesariamente diferentes, pruébese que siempre podemos elegir una subsucesión de términos consecutivos de manera que la suma de ellos es múltiplo de n.

8. Pruébese que, dados 52 números naturales cualesquiera, siempre hay dos cuya suma o cuya diferencia es múltiplo de 100.

9. Pruébese que existe al menos un número con sus cifras iguales a 1 y 3, al menos una de cada, que es múltiplo de 2021.

10. Sea a un número irracional. Pruébese que existen infinitos números racionales, $r = p/q$, tales que
$$|a - r| < \frac{1}{q^2}.$$

11. Pruébese que, dados 7 números enteros positivos menores o iguales que 126, siempre podemos encontrar dos de ellos, x, y, que satisfacen
$$1 < \frac{y}{x} \leq 2.$$

12. Tenemos un conjunto de 25 puntos en el plano de manera que, cualquiera que sean los tres que elijamos, hay dos de ellos que están a distancia menor que 1. Pruébese que existe un círculo de radio 1 que contiene al menos a 13 de dichos puntos.

13. Cada punto del plano está pintado de color rojo o de color azul. Pruébese que existen dos puntos del mismo color a distancia 1 (en realidad a una distancia arbitraria dada).

Bibliografía Adicional

1. Engel, A. (1998). The Box Principle. *Problem-Solving Strategies*. Editorial Springer, 59-84.