CAPÍTULO 1

1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

José Ignacio Extremiana Aldana y Judit Mínguez Ceniceros
Universidad de La Rioja

Palabras clave

- *Números naturales*
- *Efecto dominó*
- *Base de la Inducción*
- *Hipótesis de la Inducción*

En este capítulo vamos a hablar de la reacción en cadena o el efecto dominó matemático. Es decir, vamos a hablar de cómo demostrar propiedades de los números naturales usando el principio de inducción matemática.

1.1 Introducción

Los días 18 y 19 de noviembre de 2004 en Donostia-San Sebastián tuvieron lugar *Las Jornadas sobre la Popularización de la Ciencia: las Matemáticas*, organizadas por la Sección de Matemáticas de la Universidad de País Vasco y la Real Sociedad Matemática Española (Comisión de Divulgación). Como resultado de estas Jornadas la Editorial Nivola publicó el Libro *Divulgar las Matemáticas* (Editorial Nivola, 2005). Una de las secciones de las Jornadas tenía como tema principal *Educación e Investigación*. Durante las sesiones de trabajo, uno de los ponentes, Juan Luis Vázquez, premio nacional de investigación en 2003 y, más tarde, conferenciante plenario en el Congreso Mundial de matemáticos 2006, defendió con entusiasmo que *"los números son el territorio de los matemáticos"*. Los participantes en la sección finalizaron la redacción de las conclusiones de la misma con la propuesta de dos eslóganes:

- ¡Ponga un matemático en su empresa!
- ¡El número es nuestro!

Afortunadamente, desde 2004, ha crecido de manera exponencial la consideración social de las matemáticas y cada vez son más las empresas que cuentan en su plantilla con matemáticos.

Efectivamente, los números son cosa de matemáticos. Los matemáticos somos (o debemos ser) "domadores" de números, expertos manipuladores que los analizan, estudian sus propiedades y relaciones, "los doman" y, una vez "domesticados", los ponen a disposición de la sociedad para que los utilice.

Como con las fieras, para "domar" números hay que *conocer bien su territorio*, saber en qué *familias se distribuyen*, cuáles son las *relaciones entre las familias*, *entender bien su comportamiento*, tanto cuando están en familia como individualmente. Un buen domador, para someter a sus presas, debe *intuir adecuadamente* cual va a ser su conducta y prever sus reacciones para evitar sorpresas desagradables y, por supuesto, *confirmar (o no) las intuiciones y previsiones*.

Una vez domados los números que se han estudiado, cuando se conocen las reglas universales que los rigen y los métodos que funcionan con ellos, se muestra a la sociedad (otros investigadores, programadores, ingenieros, economistas, empresarios, educadores, etc.) cómo han de utilizarse para obtener de ellos el máximo beneficio, y se advierte de los peligros de la mala utilización (como si fuesen gremlins).

Hay muchas clases de números, algunos de ellos se explican en Educación Primaria, como, por ejemplo, "los de contar" (que los matemáticos llamamos "naturales"), los negativos (que junto con los naturales forman la familia de los enteros) y los fraccionarios (que junto con los enteros forman la familia de los racionales). Los primeros números que se aprenden en la escuela, los primeros que utilizó la humanidad, son "los de contar". Los psicólogos y pedagogos han dedicado muchos esfuerzos para analizar cómo los humanos aprehendemos el concepto de número natural (de número, dicen ellos), y quienes se dedican a la didáctica a mostrar las mejores maneras de facilitar en los alumnos la comprensión y buen manejo de los números naturales y las operaciones que con ellos pueden realizarse.

Vamos a centrar nuestro estudio en los números naturales y adentrarnos un poco en su mundo que tiene todavía muchos territorios inexplorados y otros que, aunque han sido explorados, no son conocidos en su totalidad.

1.2 Algunos ejemplos de intuiciones de propiedades de familias de números naturales

Los matemáticos hemos descubierto que todo número natural puede descomponerse en producto de números primos de manera única. En este sentido, los números primos son como los ladrillos de los que están fabricados los números, de alguna manera, juegan el papel de los elementos químicos en la composición de las sustancias. La diferencia es que hay muchos más números primos que elementos químicos.

A pesar de su aparente simplicidad, los números naturales encierran muchos secretos y aplicaciones impensables. Por ejemplo, ¿quién podría imaginar hace 100 años que los números primos (una subfamilia de los números naturales) iban a ser imprescindibles para la seguridad en las comunicaciones?

Esta utilidad hace necesario descubrir números primos, saber dónde se esconden en el conjunto tan bien ordenado de los números naturales, y, si es posible, dar con una "fórmula" que nos proporcione tantos números primos como deseemos para usarlos cuando sea preciso.

A continuación, vamos a buscar números primos. Mostramos dos procedimientos de obtenerlos:

1. **Primer Procedimiento:** Después de buscar varias fórmulas, nos encontramos con el siguiente polinomio que genera números primos.

$$P(n) = n^2 + n + 41.$$

Vamos a comprobar que efectivamente obtenemos números primos calculando el valor que da el polinomio con los primeros números naturales. El Cuadro 1.1 muestra los valores que se obtienen.

n	p(n)
0	41
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
7	97
8	113
9	131
10	151
...	...
20	461
...	...
30	971
...	...
39	1421

Cuadro 1.1: Números primos usando el polinomio $P(n) = n^2 + n + 41$.

Animamos a quienes lean esto a completar la tabla con los números naturales que faltan y a comprobar que, efectivamente, todos los números naturales que se obtienen de $p(n)$ con los 40 primeros números naturales (incluimos el cero) son todos primos.

Después de ese esfuerzo, parece natural conjeturar que n^2+n+41 produce números primos para cualquier número natural n.

2. **Segundo Procedimiento:** Uno de los problemas clásicos, además de los conocidísimos cuadratura del círculo, trisección del ángulo y duplicación del cubo, era construir con regla y compás cualquier polígono regular de n lados. Este problema no se resolvió hasta 1837, cuando Wantzel completó la demostración del teorema enunciado por Gauss en sus *Disquisitiones Arithmeticae*. Un polígono regular de n lados puede construirse con regla y compás si n es producto de una potencia de 2 y números primos de Fermat distintos, y solo en ese caso.

   Un número primo de Fermat es un número de la forma $2^{2^p}+1$ (siendo p un número natural) y que, además, es primo. Para saber qué polígonos son construibles con regla y compás es necesario conocer los números de la forma $F_p = 2^{2^p}+1$ y saber si son primos o no. Vamos a calcular los números de Fermat.

p	F_p
0	$2^{2^0}+1=3$
1	$2^{2^1}+1=5$
2	$2^{2^2}+1=17$
3	$2^{2^3}+1=257$
4	$2^{2^4}+1=65537$
...	...

   Todos son números primos. Podemos conjeturar, de hecho Fermat así lo hizo, que para cualquier número natural F_p va a ser un número primo.

¡Olé! ¡Tenemos dos maneras de conseguir números primos! Quién los necesite que nos los pida. Somos capaces de proporcionarlos tan grandes como se quiera. Basta con utilizar, en cualquiera de las dos fórmulas generadoras, un número natural suficientemente grande.

Puede que estos razonamientos hayan convencido a algunos, pero ¡somos matemáticos! y los matemáticos no nos conformamos con mostrar, ¡tenemos que demostrar!, y para ello debemos desarrollar una cadena de razonamientos que prueben, sin ninguna duda, que la afirmación (la proposición, el teorema) que hemos enunciado es cierta. En las afirmaciones anteriores “hemos supuesto” que son ciertas. NO las hemos demostrado.

1.2.1 Comprobación de la validez de las intuiciones

La primera de las conjeturas es fácil de rebatir. Calculamos $p(40)$

$$p(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2,$$
$$p(41) = 41^2 + 41 + 41 = 1763 = 41 \times 43.$$

Por lo tanto el polinomio $p(40) = n^2 + n + 41$ NO proporciona números primos para cualquier natural n.

Vamos con la segunda conjetura. Calculemos F_5

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297.$$

¿Cómo se sabe que este número de 10 cifras es primo? La respuesta es sencilla. Calculamos su raíz cuadrada, que es, aproximadamente, 65536 y vamos dividiendo F_5 por todos los números primos menores que 65536. Si no es divisible por ninguno, el número es primo.

Este procedimiento es fácil de implementar en un ordenador, pero, como el lector ya habrá supuesto, para números “pequeños”, de pocas cifras, un ordenador potente tarda muy poco en dar la respuesta; para números grandes, por ejemplo de 100 cifras, el coste operacional es tremendo y los ordenadores más potentes tardan mucho en dar la respuesta. Por eso hay que utilizar otros procedimientos.

Euler, después de la muerte de Fermat, en 1732, demostró que

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417.$$

Por lo tanto, la conjetura de Fermat (y nuestra) es incorrecta.

¿Qué pasa con los restantes números de Fermat? Vamos a calcular algunos:

- $F_6 = 2^{64} + 1 = 18.446.744.073.709.551.617 = 274.177 \times 67.280.421.310.721$
- $F_7 = 2^{128} + 1 = 340.282.366.920.938.463.463.374.607.431.768.211.457 =$
  $= 59.649.589.127.497.217 \times 5.704.689.200.685.129.054.721$
- $F_8 = 2^{256} + 1 = 115.792.089.237.316.195.423.570.985.008.687.907.853.269.984.$
  $665.640.564.039.457.584.007.913.129.639.937 =$
  $= 1.238.926.361.552.897 \times 93.461.639.715.357.977.769.163.558.199.606.896.584$
  $.051.237.541.638.188.580.280.321$

Estos tres son números compuestos. Desde 2003 sabemos que desde F_5 hasta F_{32} son todos números compuestos.

¿Conjeturamos que no hay más números primos de Fermat que los cinco primeros? Los dos ejemplos anteriores, muestran que no vale que una igualdad, una afirmación, se verifique para un gran número de números naturales. Para afirmar su validez, dado que es imposible verificarla para todos los números naturales, es preciso proporcionar un razonamiento que la demuestre.

Como curiosidad añadimos que Fermat no ha sido el único de los grandes matemáticos que ha hecho suposiciones erróneas. En el libro *Inducción en la Geometría* de I. Goloviná e I. M. Yaglóm (Editorial Mir, Moscú. Segunda Edición 1981) se muestra el siguiente ejemplo, G. W. Leibniz demostró que $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ es divisible por 3, $n^5 - n$ es divisible por 5 y $n^7 - n$ es divisible por 7. Dedujo que para todo número impar k y $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^k - n$ es divisible por k. Sin embargo, pronto se dio cuenta que $2^9 - 2 = 510$ NO es divisible por 9.

1.3 La inducción matemática: Un procedimiento para validar conjeturas de números naturales.

El Principio de Inducción Matemática es una técnica de demostración que sirve para probar propiedades de los números naturales. Su enunciado es el siguiente:

Definición 1.1 (Principio de Inducción Matemática)

Una propiedad $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se cumplen:

a) La propiedad es cierta para $n = 1$, es decir, $P(1)$ es cierta. (Base de la Inducción)

b) Si suponemos que la propiedad es cierta para $n = k$ (Hipótesis de Inducción), entonces podemos probar que es cierta para $n = k + 1$. Es decir,

$$P(k) \quad \text{verdadera} \quad \Longrightarrow \quad P(k+1) \quad \text{verdadera}.$$

Por abreviar, en lo que sigue vamos a denotar por B.I. la Base de la Inducción y por H.I. la Hipótesis de Inducción, según la Definición 1.1.

Para hacernos una idea del significado pensemos en una sucesión infinita de fichas de dominó puestas de pie, como podemos ver en la Figura 1.1 (izquierda).

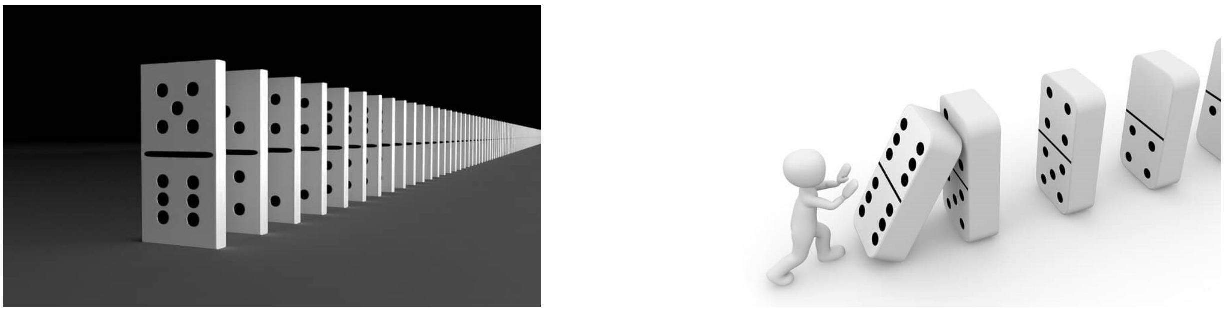

Figura 1.1: Representación del Principio de Inducción Matemática con fichas de dominó.

Si somos capaces de tirar la primera ficha como aparece en la Figura 1.1 (derecha) y estamos seguros de que las piezas están dispuestas de tal forma que cada ficha tirará la siguiente, por este efecto cadena, es seguro que todas las fichas del dominó caerán.

Ejemplo 1.1 Afirmamos que la suma de los n primeros números impares es n^2. Esto es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

La intuición de que la igualdad es cierta nos la proporciona Figura 1.2.

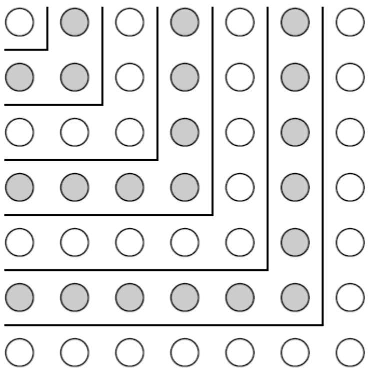

Figura 1.2: Suma de los n primeros números impares.

Para demostrar la afirmación utilizamos el método de inducción.

B.I. ¿Es cierta la igualdad para $n = 1$? Sí. $1 = 1^2$.

H.I. Supuesta cierta la igualdad para $n = k$, ¿es cierta para $n = k + 1$?
Supongamos que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 = k^2.$$

¿Será cierta para $n = k + 1$?, es decir, ¿será verdad la siguiente igualdad?

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Usamos la Hipótesis de Inducción (H.I.) para escribir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Por tanto la fórmula es verdadera. Podemos afirmar, por ejemplo que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 100001 = 50000^2$$

Ejemplo 1.2 (El pequeño Teorema de Fermat). Afirmamos que si p es un número primo y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$n^p - n \quad \text{es divisible por } p.$$

Apliquemos el método de inducción.

B.I. $n = 1$, $1^p - 1 = 0$ que es divisible por p.

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, $k^p - k$ es divisible por p ($k^p - k = m_1 p$).
¿Será cierto para $n = k + 1$? Aplicamos la Hipótesis de Inducción (H.I.)

$$(k+1)^p - (k+1) = k^p + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} k^j + 1 - k - 1 = pm_1 + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} k^j.$$

Si $1 \leq j \leq p - 1$,

$$\binom{p}{j} = \frac{p(p-1)\cdots(p-j+1)}{j!},$$

es divisible por p $\left(\binom{p}{j} = m_j p\right)$. Y por tanto

$$(k+1)^p - (k+1) = pm_1 + \sum_{j=1}^{p-1} m_j p k^j = pm_1 + p\sum_{j=1}^{p-1} m_j k^j = p\left(m_1 + \sum_{j=1}^{p-1} m_j k^j\right).$$

Como consecuencia de lo que acabamos de demostrar, sabemos (sin necesidad de comprobar nada) que el número $15^7 - 15$ es divisible por 7,o que $1234^{23} - 1234$ es divisible por 23.

1.4 Desarrollo metodológico

Para demostrar una igualdad, una proposición, una conjetura razonable por el método de inducción es fundamental comprobar que se cumplen las hipótesis a) y b) de la Definición 1.1 (¡las dos!). Si no se comprueba la Base de la Inducción (B.I.) es fácil llegar a absurdos. Por ejemplo, que todos los números naturales son iguales.

Ejemplo 1.3 (Necesidad de comprobar la base de la inducción). Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n = n+1$ (es decir, que todos los números naturales son iguales). Supongamos que la afirmación es cierta para $n = k$, esto es, $k = k + 1$. ¿Será cierto para $n = k + 1$? Por hipótesis de inducción, como $k = k + 1$, se sigue

$$k + 1 = k + 1 + 1 = k + 2,$$

por tanto, según el método de inducción la afirmación es cierta $\forall n$ y todos los números naturales son iguales.

Esto es absurdo y el fallo está en no haber comprobado que se cumple la base de la inducción ($1 = 2$).

Para ser conscientes de la necesidad de demostrar la hipótesis de inducción, el ejemplo que hemos usado en la introducción, el polinomio de Euler $p(n) = n^2 + n + 41$ como generador de números primos, es un claro ejemplo. No basta con que la propiedad que deseamos validar se cumpla para "muchos" números naturales.

Ejemplo 1.4 (Otro ejemplo de la necesidad de demostrar la hipótesis de inducción). Sea el polinomio $x^n - 1$ con $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que al factorizar este polinomio todos los coeficientes de sus factores tienen módulo 1.

Se puede comprobar (mejor utilizando un programa de cálculo simbólico como Mathematica, SAGE, Mapple,...) que la afirmación es cierta para $n = 1, 2, \ldots, 104$. Sin embargo, no es cierta para $n = 105$. En efecto,

$$\begin{aligned} x^{105} - 1 = &(-1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) \\ &(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8)(1-x+x^3-x^4+x^6-x^8+x^9-x^{11}+x^{12}) \\ &(1-x+x^5-x^6+x^7-x^8+x^{10}-x^{11}+x^{12}-x^{13}+x^{14}-x^{16}+x^{17}-x^{18}+x^{19}-x^{23}+x^{24}) \\ &(1+x+x^2-x^5-x^6-2x^7-x^8-x^9+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}+x^{16}+x^{17}-x^{20}-x^{22}-x^{24}-x^{26}-x^{28}+x^{31}+x^{32}+ \\ &x^{33}+x^{34}+x^{35}+x^{36}-x^{39}-x^{40}-2x^{41}-x^{42}-x^{43}+x^{46}+x^{47}+x^{48}). \end{aligned}$$

Queda claro que para poder elevar a teorema una afirmación relativa a los números naturales no vale con que se compruebe para varios números naturales, aunque se compruebe para una gran cantidad. Es necesario, para "demostrar" la afirmación por el método de inducción, comprobar la base de la inducción y la hipótesis de inducción (las dos).

Ejemplo 1.5 (Conjetura errónea). Sea $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Afirmamos que $S_n = \dfrac{n+1}{3n+1}$. Para ello, usamos el Principio de Inducción Matemática.

B.I. Veamos si es cierto para $n = 1$.
$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1+1}{3\cdot 1+1}.$$
Luego se cumple.

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir,
$$S_k = \frac{k+1}{3k+1}.$$
Veamos si es cierto para $n = k+1$.
$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^3+4k^2+8k+3}{(k+1)(k+2)(3k+1)}.$$

Por lo tanto la afirmación es falsa. Con este ejemplo mostramos que, en ocasiones, el método de inducción también sirve para comprobar que una conjetura es falsa (aunque en este ejemplo era fácil comprobar la falsedad sin recurrir al método de inducción).

Nota: *Antes de finalizar esta sección y poner varios ejemplos de demostraciones por el método de inducción de algunas igualdades y afirmaciones nada evidentes, es preciso formular algunas precisiones y observaciones relativas al principio de inducción.*

1. *El método de inducción solo sirve para demostrar propiedades y relaciones que dependen de los números naturales.*
2. *Para aplicar el método de inducción no es imprescindible que la propiedad o relación comience a verificarse para $n = 1$. También sirve para demostrar propiedades que dependen de los números naturales $P(n)$ a partir de $n \geq n_0$; en este caso la base de la inducción será con $n = n_0$. Igualmente,*

puede utilizarse para probar una proposición para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; en este caso, la base de la inducción será $n = 0$.

3. *Supuesto que la afirmación es cierta para $n = k$, para probar que la afirmación es cierta para $n = k+1$, es preciso utilizar la hipótesis de inducción.*
4. *Si para demostrar la hipótesis de inducción relativa a los números naturales para $n = k+1$ necesitamos que sea cierta para $n = k$ y $n = k-1$, la base de la inducción tiene que ser cierta para $n = 1$ y $n = 2$ (para los dos primeros números naturales a partir de los cuales debemos demostrar la propiedad). Obviamente, esta observación se extiende al caso en el que para demostrar la hipótesis de inducción para $n = k$ es necesario utilizar que sea cierta para 3 o más números precedentes.*

1.5 Problemas resueltos

En esta sección damos algunos ejemplos en los que aplicando el método de inducción se demuestran propiedades y relaciones que en ningún caso son intuitivas.

Problema 1.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un número tal que su expresión decimal consta de n dígitos, es divisible por 2^n y sus dígitos son 2's y 3's (o uno solo de los dos).

Solución *Aplicamos el Principio de Inducción Matemática:*

B.I. *Para $n = 1$, 2 es un número con 1 dígito que divisible por 2^1.*

H.I. *Supongamos que la afirmación es cierta para $n = k$, es decir, existe un número, m, de k dígitos que es divisible por 2^k y su expresión decimal sólo está formada por los dígitos 2 y 3.*
Por ser m divisible por 2^k, podemos escribir

$$m = 2^k j,\ j \in \mathbb{N}.$$

¿Será cierta la afirmación para $n = k+1$?

- *Si j es par, es decir, $j = 2r$. Tomamos el número*

$$2 \cdot 10^k + m,$$

que tiene $k+1$ dígitos y sólo contiene 2's y 3's en su expresión decimal. Veamos si es divisible por 2^{k+1}.

$$2 \cdot 10^k + m = 2 \cdot 2^k \cdot 5^k + 2^k \cdot j = 2^k(2 \cdot 5^k + 2r) = 2^{k+1}(5^k + r).$$

- *Si j es impar, $j = 2r+1$, tomamos número*

$$3 \cdot 10^k + m,$$

que tiene $k+1$ dígitos y sólo contiene 2's y 3's en su expresión decimal. ¿Es divisible por 2^{k+1}?

$$3 \cdot 10^k + m = 3 \cdot 2^k \cdot 5^k + 2^k(2r+1) = 2^k(3 \cdot 5^k + 2r+1) = 2^k(2s+1+2r+1) = 2^{k+1}(s+r+1).$$

Hemos utilizado que $3 \cdot 5^k$ es un número impar, por lo tanto, existe un número natural s tal que $3 \cdot 5^k = 2s+1$.

Problema 1.2 Para cada $N \in \mathbb{N}$, con $N > 1$ se cumple que

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4 \cdots \sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}} < 3.$$

Solución *En primer lugar observemos que si $N = 1$ el enunciado no tiene sentido pues el primer número que aparece dentro de la primera raíz es 2. Aplicamos nuevamente el Principio de Inducción Matemática:*

B.I. *Para $N = 1$ obtenemos $\sqrt{2} < 3$, que se trata de una desigualdad cierta.*

H.I. *Para demostrar la hipótesis de inducción vamos a utilizar "inducción inversa". Comenzaremos demostrando que la desigualdad*

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}} < m+1.$$

es cierta para $m = N$ (que es muy fácil) y luego iremos "descendiendo" hasta llegar a $m = 2$.

- *Veamos si es cierto para $m = N$. La desigualdad, en este caso es*

$$\sqrt{N} < N+1,$$

que, obviamente, es cierta.

- *Supongamos que es cierto para $m+1 < N$, es decir*

$$\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}} < m+2.$$

Entonces,

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}} < \sqrt{m(m+2)} < m+1.$$

Siguiendo este proceso concluimos que

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}} < 2+1 = 3.$$

Problema 1.3 En la década de los años 20 del s. XX, Wassily Kandinsky (1866-1944), uno de los pintores más influyentes de la historia y que entendía de Matemáticas y Física cuántica, experimentó en su obras con el círculo. *"Un círculo es una síntesis de las mayores oposiciones. Combina concéntrico y excéntrico en una forma y en equilibrio"*. En la Figura 1.3 se muestran dos de estas obras.

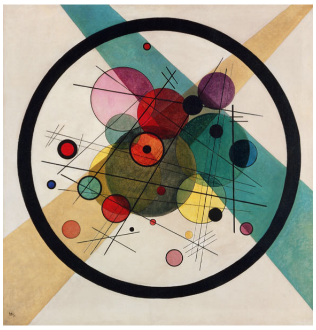

Figura 1.3: Obras de Kandinsky que involucra varios círculos.

Afirmamos que dados n círculos en el plano, Kandinsky puede pintar el "mapa" resultante únicamente con dos colores de manera que no haya regiones con frontera lineal común que tengan el mismo color (a este tipo de coloraciones se les denomina *coloración propia*).

Solución

- *Para $n = 1$ la afirmación, obviamente, es cierta (ver Figura 1.4). Kandinsky puede pintar el interior de la circunferencia con un color y el exterior con otro (marrón y blanco, por ejemplo).*

Figura 1.4: El caso para $n = 1$.

¿Qué ocurre cuando hay muchos círculos? Obviamente, si los círculos son exteriores todos a todos o a lo más tangentes (Figura 1.5), para dibujar con dos colores el mapa resultante, Kandinsky lo tiene muy fácil, pinta el interior de todos los círculos con un color (por ejemplo azul) y el exterior de otro (por ejemplo marrón).

No podemos dejar de mencionar un caso singular, que es el de los tres círculos entrelazados (anillos de Borromeo) para los que Kandinsky también tiene fácil pintar con dos colores. Pinta de un color la región que corresponde a la intersección de los tres círculos (el pintado de gris en la figura 1.6), de otro distinto la tres regiones que corresponden a las intersecciones de dos círculos, del primer color las tres regiones interiores a un solo círculo y del segundo color la región exterior a los tres círculos.

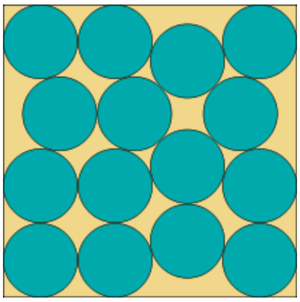

Figura 1.5: Muchos círculos tangentes.

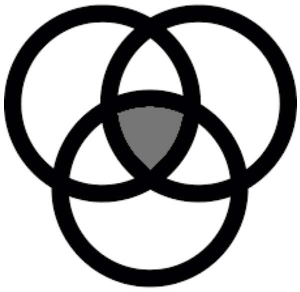

Figura 1.6: Anillos de Borromeo.

Los anillos de Borromeo se han utilizado como símbolo de la fuerza de la unión, llegando a significar a la Santísima Trinidad, figura 1.7, pues tomados dos a dos, los anillos están separados. El logo de la IMU (Unión Matemática Internacional), figura 1.8, es una variación de los anillos de Borromeo realizada por el matemático estadounidense John M. Sullivan.

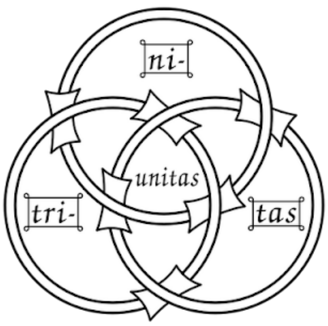

Figura 1.7: Santísima Trinidad.

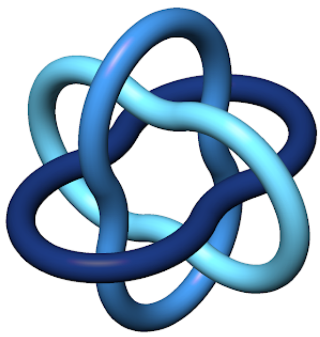

Figura 1.8: Logo de lal IMU.

Pero volvamos al problema que nos ocupa y demostremos la tesis.

- *Supongamos que la afirmación es cierta. Cuando hay dibujadas en el plano $n = k$ circunferencias Kandinsky puede pintar con dos colores el mapa que se produce en las condiciones establecidas.*
  Si se añade otra circunferencia (hay ahora $k+1$ circunferencias), Kandinsky realiza una nueva coloración de la siguiente manera: la parte “exterior” a esta nueva circunferencia la deja con los colores que tenía

antes de añadir esta última circunferencia; en la parte interior cambia los colores (donde había marrón se pone azul y donde había azul, marrón). Afirmamos que Kandinsky ha conseguido una coloración propia. En efecto:

- *dos regiones vecinas a través de esta nueva circunferencia tienen colores opuestos porque hemos invertido la coloración,*
- *dos regiones vecinas en el exterior de esta circunferencia tienen colores opuestos por hipótesis de inducción,*
- *dos regiones vecinas en el interior de esta circunferencia tienen colores opuestos por hipótesis de inducción.*

Problema 1.4 Si de entre los $2n$ primeros números naturales que escribiros de la forma $(1, 2, \ldots, 2n)$ se toman $n+1$ al azar y distintos entre sí, afirmamos que entre los números seleccionados existen al menos dos números tales que uno de ellos es divisible por el otro.

Solución *Aplicamos el Principio de Inducción Matemática:*

B. I. Si $n = 1$, en este caso, $2n = n + 1$, y $\{1, 2\}$ es el conjunto considerado. Obviamente se verifica la base de inducción.

H. I. Utilizamos para demostrar la hipótesis de inducción el método de reducción al absurdo.

Partimos de que entre los $2(n-1)$ primeros números naturales cuando se eligen al azar n números existen al menos 2 tales que uno divide al otro.

¿Sigue siendo cierto cuando tomamos los $2n$ primeros números? Supongamos que no, supongamos que entre los $2n$ primeros números, $1, 2, \ldots, 2n$, $n \geq 2$, se han encontrado $n+1$ $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ números tales que ninguno de ellos es divisible por cualquier otro. Llamamos M_{n+1} al conjunto formado por esos $n+1$ números, todos menores o iguales que $2n$,

$$M_{n+1} = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}.$$

Veremos que si esto es cierto, también es cierto que entre los $2n-2$ números $1, 2, \ldots, 2n-2$ podemos encontrar n números tales que ninguno de los n números sea divisible por otro cualquiera. Lo que contradice el supuesto del que partimos. Tenemos cuatro posibilidades:

1. $2n - 1 \notin M_{n+1}$ *y* $2n \notin M_{n+1}$.

   Quitamos un número $a_j \in M_{n+1}$. Entonces el conjunto $M_n = M_{n+1} \setminus \{a_j\}$ tiene n elementos ninguno de ellos mayor que $2n-2$ y ninguno divisible por cualquier otro.

2. $2n - 1 \in M_{n+1}$ *y* $2n \notin M_{n+1}$. *En este caso, consideramos $M_n = M_{n+1} \setminus \{2n-1\}$. De los n que quedan en M_n ninguno es mayor que $2n-2$ y ninguno es divisible por otro.*

3. $2n - 1 \notin M_{n+1}$ *y* $2n \in M_{n+1}$. *En este caso $M_n = M_{n+1} \setminus \{2n\}$ cumple nuestra condición.*

4. $2n - 1 \in M_{n+1}$ *y* $2n \in M_{n+1}$. *Notar que $n \notin M_{n+1}$ porque $2n$ es divisible por n. Quitamos $2n-1$ y $2n$ del conjunto M_{n+1}. Denotamos*

   $$M_{n-1} = M_{n+1} \setminus \{2n-1, 2n\}.$$

   Sea ahora

   $$M_n = M_{n-1} \cup \{n\}.$$

   Así M_n tiene n números ninguno de ellos mayor que $2n-2$. Nos falta ver que ningún elemento de M_n divide a ningún otro. Sabemos que ningún elemento de M_{n-1} divide a ningún otro (todos pertenecen a

M_{n+1}), queda por ver que n no es divisible por ningún número de M_{n-1} y n no divide a ningún número de M_{n-1}.

(a). No existe un número en M_{n-1} divisible por n ya que ninguno es mayor que $2n-2$.

(b). n no es divisible por ningún número en M_{n-1} porque $2n$ no es divisible por ningún número de M_{n-1}.

Por tanto, si la proposición es falsa para los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$, también es falsa para los $2(n-1)$ números $1, 2, \ldots 2n-2$.

Luego si la proposición es cierta para los $2(n-1)$ números $1, 2, \ldots 2n-2$, entonces también es cierta para los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$.

Ejercicios Propuestos

1. Probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un número de n dígitos que es divisible por 5^n y su expresión decimal contiene sólo los dígitos 5, 6, 7, 8 y 9.

2. Probar que $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

3. Probar que $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Probar que $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

5. Probar que para todo número natural (incluimos el 0) $A_n = 11^{(n+2)} + 12^{(2n+1)}$ es divisible por 133.

6. Probar que para todo número natural $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} > \sqrt{n}$.

7. Probar que para todo número natural $n > 4$ se verifican las siguiente desigualdades

   a) $2^n > 2n + 1$; b) $2^n > n^2$.

8. Probar que para todo ángulo α y para todo número natural n (incluimos el 0) se verifica la siguiente igualdad
$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1} \operatorname{sen}\alpha}.$$

Nota: *Los anteriores ejercicios están tomados del libro El método de la inducción matemática de I. S, Sominskii (Editorial Limusa, 1990).*

Nota: *El método de inducción matemática está explicado en muchos libros de matemáticas y es utilizado en numerosas demostraciones. Creemos que en estas breves notas se ha mostrado con suficiente claridad. Para profundizar un poco más, recomendamos los libros de Sominskii, y de Goloviná y Yaglóm, que forman parte de la colección Lecciones populares de Matemáticas de la Editorial Mir, que son los únicos referentes a este método que incluimos en la bibliografía. Consideramos que con estos dos libros se obtiene una visión muy completa del método de inducción matemática. El segundo puede ser considerado una continuación del primero.*

Bibliografía Adicional

1. Apostol, T. M. (1991). Inducción matemática, símbolos sumatorios y cuestiones relacionadas. *Calculus, Volume 1*. Editorial John Wiley & Sons, 457-515.

2. Engel, A. (1998). The Induction Principle. *Problem-Solving Strategies*. Editorial Springer, 205-220.