



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i2p052-071>

Calculadora Gráfica de GeoGebra para el estudio de función polinómica, polinomio y serie de Taylor

Calculadora Gráfica GeoGebra para o estudo da função polinomial, polinomial e séries de Taylor

AGUSTINA BAYÉS¹
0000-0002-2126-8132

VIVIANA ANGÉLICA COSTA²
0000-0003-1782-5378

RESUMEN

Esta investigación se realiza en un curso de matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata y presenta la problemática del estudio de la serie y del polinomio de Taylor que requiere los saberes relativos a polinomio y función polinómica, que en Argentina se comienzan a estudiar en la escuela secundaria. La investigación se sustenta en el Aprendizaje Móvil. Se presentan dificultades observadas en estudiantes en el estudio de esos temas y en base a ello se diseña e implementa en la Calculadora Gráfica de GeoGebra un recurso didáctico. Además, se presentan los resultados de dos cuestionarios, uno previo a su uso, y otro posterior, que indaga sobre los saberes vinculados a los contenidos matemáticos mencionados. Finalmente se concluye que el recurso permitiría contribuir en la construcción del saber: polinomio y serie de Taylor.

Palabras-clave: Serie y polinomio de Taylor; Calculadora Gráfica de GeoGebra, Aprendizaje Móvil.

RESUMO

Esta pesquisa é realizada em um curso de matemática da Faculdade de Engenharia da Universidade Nacional de La Plata e apresenta o problema do estudo da série e do polinômio de Taylor que requer conhecimentos relacionados a polinômios e funções polinomiais, que na Argentina são Eles começar a estudar no ensino médio. A pesquisa é baseada em Mobile Learning. São apresentadas as dificuldades observadas nos alunos no estudo desses tópicos e, com base nisso, um recurso didático é projetado e implementado na Calculadora Gráfica GeoGebra. Além disso, são apresentados os resultados de dois questionários, um anterior à sua utilização e outro posterior, que indaga sobre os conhecimentos vinculados aos conteúdos matemáticos mencionados. Por fim, conclui-se que o recurso contribuiria para a construção do conhecimento: polinômios e séries de Taylor.

Palavras-chave: Série de Taylor e polinômio; Calculadora Gráfica GeoGebra, Aprendizagem móvel.

¹ IMApEC - Facultad de Ingeniería - UNLP – agustina.bayes@ing.unlp.edu.ar

² IMApEC - Facultad de Ingeniería - UNLP – vacosta@ing.unlp.edu.ar

Introducción

En este trabajo se presenta la problemática del estudio de polinomio y serie de Taylor, en un curso de matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Plata (FI-UNLP). Tales conceptos implican los relativos a polinomio y función polinómica que se estudian desde el cuarto año en la Escuela Secundaria en Argentina.

Las funciones polinómicas son de gran importancia en la matemática, otras ciencias e ingeniería, ya que son una familia de funciones definidas para todo número real, continuas, derivables e integrables en todo su dominio. Constituyen además una buena herramienta de modelización de diversos fenómenos físicos (movimiento rectilíneo uniforme, tiro oblicuo), económicos y químicos, entre otros, donde se analiza cómo se comporta una variable en respuesta a los cambios que se producen en otra. También, las funciones polinómicas y el polinomio de Taylor son útiles para interpolar (polinomio de Newton, de Lagrange y de Hermite, entre otros) o ajustar, un conjunto de datos obtenidos, en general, experimentalmente (Chapra et al., 2011).

El objetivo de este trabajo, es dar una visión respecto a los saberes que poseen estudiantes de un curso de la FI-UNLP sobre los contenidos matemáticos relativos a polinomio y serie de Taylor, y de cómo la inclusión de un recurso didáctico “Calculadora Gráfica de GeoGebra-Polinomio de Taylor” para ser usado en dispositivos móviles posibilita solucionar las dificultades de los estudiantes de ingeniería respecto a este contenido.

El texto se organiza del siguiente modo. Primero, se presenta el referencial teórico y las nociones básicas que lo sustentan. A continuación, se describe la metodología, el contexto institucional y curricular, relativo a cómo y dónde se estudian los contenidos de: polinomio, función polinómica, polinomio y serie de Taylor. Luego se mencionan dificultades que tienen algunos estudiantes en los cursos de matemática en FI-UNLP en el estudio de esos temas, como antecedente de la problemática planteada. Posteriormente se presenta el recurso didáctico diseñado “Calculadora Gráfica de GeoGebra-Polinomio de Taylor” para ser usado en dispositivos móviles, siendo ésta la tecnología que disponen los estudiantes en el aula. Luego, se presentan cuestionarios previo y posterior al uso del recurso didáctico, que indagan sobre los saberes de tales contenidos. Finalmente se exponen resultados de su implementación y se comparten las conclusiones.

1. Aprendizaje Móvil

El Aprendizaje Móvil (o mobile learning) es una forma de aprendizaje que se realiza a través del uso de dispositivos móviles, en general en tabletas digitales y/o

celulares, permitiendo que el usuario pueda interactuar con la información en cualquier momento y lugar, ingresar a internet, descargar archivos y usar aplicaciones creadas para un fin educativo (Ballesteros et al., 2020; Göksu & Atici, 2013).

Entre algunas de las ventajas que implica el uso de dispositivos móviles en el aula, se pueden destacar (Alsaadat, 2017; Drigas & Pappas, 2015; Fombona Cadavieco & Rodil Pérez, 2018; Tomaschko & Hohenwarter, 2017):

- Portabilidad: estos dispositivos son fáciles de transportar a cualquier lugar, debido a su pequeño tamaño.
- Ubicuidad: usable independientemente del lugar de ubicación
- Costo: generalmente, los dispositivos móviles son más económicos que otro tipo de dispositivos electrónicos, como por ejemplo computadoras portátiles.
- Inmediatez en la utilización.
- Participación de los estudiantes: pueden conducir a una mayor motivación y un rol más activo por parte del alumnado en el aula.
- Aumento de la alfabetización informática.

Además de lo mencionado anteriormente, la implementación de este tipo de aprendizaje, conlleva a que se generen algunas desventajas, como lo son:

- Limitado tamaño de la pantalla de los dispositivos, obstaculizando que no siempre se pueda ver correctamente el recurso creado para la computadora.
- Docentes con escasa preparación acerca de tecnología, del uso de GeoGebra y sobre la implementación del aprendizaje móvil.
- Distracción para parte de los estudiantes, debido a que estos dispositivos cuentan con diversas aplicaciones lúdicas y de comunicación.
- Falta de hábito de este tipo de aprendizaje tanto en estudiantes como docentes.
- Diversidad de modelos de dispositivos móviles y la rapidez con que evolucionan, lleva a tener que actualizar los recursos periódicamente, para que en todos los dispositivos puedan ser utilizarlos.
- Capacidad de memoria limitada, ya que generalmente, suele ser inferior a la memoria de las computadoras de escritorio.

En particular, la Calculadora Gráfica de GeoGebra, hace posible este tipo de aprendizaje, pudiendo ser usada tanto en línea, como en una aplicación móvil descargable desde apps store y google play.

Además, GeoGebra permite, entre otras tareas, que los docentes creen sus propios recursos didácticos interactivos o adapten, de acuerdo a sus necesidades, alguno ya creado por otro usuario. Pudiendo acceder a ellos a través del sitio web de GeoGebra (www.geogebra.org) que cuenta con miles de recursos de diversos temas y compartidos por la comunidad internacional de usuarios (Vitabar, 2014). Estos recursos pueden ser incluso descargados en el celular y dan lugar al Aprendizaje Móvil. Los recursos creados se realizan en una hoja de trabajo dinámica y su principal propósito es proporcionar un ambiente de aprendizaje para los estudiantes donde puedan activamente realizar experimentos matemáticos guiados (Hohenwarter & Preiner, 2008, p. 318).

2. Metodología

El enfoque de esta investigación es cualitativo y el alcance es del tipo descriptivo (Fernández Collado, Baptista Lucio & Hernández Sampieri, 2014). El contexto educativo en el que se realiza es un curso de matemática denominado Matemática C (MC) del ciclo básico de la FI-UNLP, ubicado en el tercer semestre de los planes de estudio.

Primero se describen los niveles educativos por los que transitan los estudiantes antes de llegar a MC: Escuela Secundaria (cuarto y quinto año), Matemática para la Ingeniería (MPI), Matemática A (MA) y Matemática B (MB), estas últimas en FI-UNLP. Para tal descripción, se observan los diseños curriculares de la Escuela Secundaria, los programas de estudio de las materias y las Guías de las cátedras en FI-UNLP mencionadas. Esto en relación al estudio de polinomios y función polinómica. Luego se describen los contenidos de polinomio y serie de Taylor en MC. Posterior a ello se presentan algunas de las dificultades que se han observado en escritos de los estudiantes que han cursado MC en relación a estos temas, en años anteriores al uso del recurso diseñado.

Posteriormente, se diseña un cuestionario realizado en Google Form, compuesto de nueve preguntas, entre abiertas, cerradas y de múltiples opciones, que consulta sobre los saberes relativos a: polinomio, propiedades, utilidades, graficar e identificar función polinómica a partir de una expresión algebraica dada. El mismo, se aplica en un curso de MC antes del inicio del estudio del tema polinomio y serie de Taylor.

A continuación, se describe el recurso didáctico que se diseña para el estudio de polinomio de Taylor y para ser usado en especial en dispositivos móviles en la Calculadora Gráfica de GeoGebra (Calculadora Gráfica-Polinomio de Taylor). Luego, al finalizar el estudio del tema en MC, se realiza un cuestionario con preguntas del mismo tenor al inicial, como instrumento que permita observar y contrastar con los resultados encontrados anteriormente.

Para evaluar la efectividad del recurso didáctico implementado, se trabaja con el factor propuesto por Hake (1998), ganancia relativa del aprendizaje “g”. Este índice resulta de calcular:

$$g = \frac{\langle Post \rangle - \langle Pre \rangle}{100 - \langle Pre \rangle}$$

entendiendo a los corchetes < > como el porcentaje del rendimiento medio de toda la población. Estos valores de g se encuentran entre 0 y 1; para valores de $g \leq 0,3$ la ganancia del aprendizaje es baja, para $0,3 < g \leq 0,7$ la ganancia es media, y para valores de $g \geq 0,7$ la ganancia relativa es alta. Según Hake, por resultados generales obtenidos en diversos estudios, muestra que los grupos con enseñanza tradicional obtienen valores de g alrededor de 0,16, mientras que los basados en cursos con métodos de enseñanza producto de investigación educativa, muestran factores de Hake que oscilan entre 0,35 y de 0,41, dependiendo de los métodos de enseñanza utilizados.

También se consultó a los estudiantes sobre la actividad realizada en la Calculadora Gráfica GeoGebra y su utilización, para resolver los problemas dados, con el objetivo de obtener información acerca de sus apreciaciones personales y testear estadísticamente mediante una prueba Chi-cuadrado, si existe una vinculación entre su uso y la aprobación o no del tema.

3. Contexto institucional y curricular

Los contenidos matemáticos necesarios para avanzar en el estudio de polinomio y serie de Taylor se comienzan a estudiar en la Escuela Secundaria. En ese nivel educativo, en Argentina, se estudia: polinomio y de función polinómica en los cursos de matemática con jóvenes de entre 15-16 años de edad (DGCyE, 2015), en el marco del Álgebra y estudio de funciones). Se estudia además, Teorema de Ruffini, Teorema del Resto y Teorema de Gauss. Se proponen actividades que incluyan prácticas asociadas a: calcular el valor numérico de un polinomio en un valor determinado, hallar las raíces de un polinomio, calcular las raíces mediante la Regla de Ruffini, descomponer un polinomio en factores primos, operar con polinomios (suma, resta, cociente y producto), graficar una función polinómica, resolver ecuaciones e inecuaciones de segundo grado e identificar distintas expresiones polinómicas. Para realizar algunas de tales actividades se promueve el uso de software. Estos contenidos se utilizan luego en el año siguiente en la Escuela Secundaria para el estudio de expresiones fraccionarias polinómicas y ecuaciones, donde es necesario el conocimiento relativo a la factorización de polinomios que permita reducir su expresión y poder hallar el conjunto solución.

En el nivel universitario, los estudiantes que cursan las carreras de ingeniería en FI-UNLP, retoman en MPI (primera asignatura para todas las carreras) los

contenidos relativos a polinomio y función polinómica estudiados en la Escuela Secundaria. En esta asignatura, se estudian (o se revisan nuevamente) los saberes de polinomio en una variable como una expresión algebraica. Luego en MA, la asignatura correlativa, los contenidos curriculares mínimos son los de derivación de funciones reales en una y varias variables, para luego continuar con el estudio de las funciones polinomiales, se realizan gráficas, se calcula su dominio e imagen. Posteriormente, se estudia derivada de una función y reglas de derivación, y los casos especiales de derivadas de funciones lineales y cuadráticas, y su aplicación en temas de física (por ejemplo variación). Además, se encuentra la definición de límite y de continuidad, en el que para resolver se debe operar con funciones polinómicas. En MB, se estudian los contenidos relativos a la integración de funciones y en particular de funciones polinómicas, sus propiedades, integral indefinida y métodos de integración. En este último caso, muchas de las técnicas de búsqueda de la función primitiva, requieren de aplicar el conocimiento de factorizar, buscar raíces y operar con polinomios. Además, el cálculo de áreas y de volúmenes, donde se requiere realizar gráficas de funciones y cálculo de intersecciones para describir los dominios de integración de las variables. También en MB se estudian los contenidos de Series Numéricas: convergencia de una serie, sumas parciales, series alternadas, series de términos positivos, serie geométrica, p-serie y telescópica. Las actividades a realizar incluyen: analizar convergencia, hallar su suma si converge y aplicar métodos o criterios de convergencia. Para justificar algunas de las técnicas, requieren del conocimiento de integrales impropias que también se estudian en esta asignatura.

Finalmente, los contenidos curriculares en MC son los de series de potencias, polinomio y serie de Taylor, Álgebra Lineal, ecuaciones diferenciales, aspectos básicos de Serie de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales. En particular, nos interesa en este trabajo, detallar los contenidos curriculares relativos a serie y polinomio de Taylor, que se estudia en el marco de Series de potencias. En la Guía de Cátedra de Matemática C, se proponen preguntas como ¿para qué valores de x una Serie de Potencias converge y a cuál función $f(x)$ en ese caso? Es decir, si existe el límite de las sumas parciales $S_n(x)$ (Polinomio de Taylor) para n tendiendo a infinito. Aquí es donde se utilizan los contenidos relativos a Series Numéricas. Luego se presenta un resultado que asegura que la función, suma de la serie de potencias, para los valores de x en el intervalo de convergencia, es continua, integrable y derivable. Posteriormente, se encuentran las relaciones que existen entre los coeficientes de la serie de potencias y las derivadas de la función suma en $x=a$, que da luego lugar a enunciar el resultado del Teorema de Taylor, que permite hacer (con ciertas hipótesis) el desarrollo de una función dada $f(x)$ en serie de potencias de $(x-a)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

En resumen, se estudia en MC: serie de potencias, serie de Taylor, sumas parciales (funciones polinómicas de grado n en variable x - Polinomio de Taylor), y se realizan tareas del estilo: operar con series, aplicar criterios de convergencia a una serie de potencias, hallar el radio de convergencia, encontrar las sumas parciales, graficar polinomio de Taylor, hallar de ser posible la suma de una serie convergente, encontrar el desarrollo en serie de Taylor de una función dada, acotar el error de una aproximación y calcular límites de funciones utilizando sus desarrollos en serie de Taylor.

4. Dificultades observadas en el aprendizaje de polinomio y serie de Taylor

Numerosas dificultades presentan los estudiantes en los cursos de MC durante el proceso de estudio de polinomio y serie de Taylor. En una encuesta realizada en el año 2017 en Costa y Rossignoli (2017) que contestaron 295 estudiantes cursantes de la asignatura MC, que el tema “series y polinomio de Taylor” fue para ellos en el que “tuvieron más dificultades en su aprendizaje, el más abstracto y para el que hubiesen necesitado más tiempo de estudio”. Estas dificultades por ellos mencionadas no se vincularían con la comprensión de la Guía de estudio ni en cómo lo explicó el profesor, si no con que tales contenidos comprenden una gran cantidad de otros más.

Además, a lo largo de los años, se observaron en las evaluaciones parciales numerosos errores en relación a polinomio, función polinómica, serie y polinomio de Taylor. Por ejemplo, en la Figura 1 y en la Figura 2, se muestra que no identifican el grado de un polinomio y los coeficientes del mismo, llevando esto a dificultades al momento de estudiar polinomio de Taylor para una función determinada y la relación entre los coeficientes y las derivadas de la función a la cual aproxima en un punto dado.

The image shows handwritten mathematical work on grid paper. At the top, it defines a polynomial $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{10} + \frac{(x^4/100)}{2}$. Below this, a boxed expression shows $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{10} + \frac{x^4}{200}$, with a large 'X' drawn over it. To the right, the error term is calculated as $|g(x) - P_2(x)| = \left| e^{-x/10} - \left(1 - \frac{x^2}{10} + \frac{x^4}{200} \right) \right| = R(x)$. An arrow points from the error term down to the inequality ≤ 1 .

Polinomio de Taylor $g(x)$ de grado 2
 con $n=2$ y $x=0$
 $g(x) = \frac{(x^2/10)^2}{2!}$ no es de grado 2

FIGURA 1: Errores en el grado del polinomio de Taylor.

b) $P_1 = f(a) + f'(a)(x-a)$ $a=1$ $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{2^n}$
 $f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^{n-1}}{2^n}$ $f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1-1)^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 0}{2^n} = 0$
 $P = 0 + 0(x-1) = 0$

FIGURA 2: Errores en los coeficientes del polinomio de Taylor.

Otra de las dificultades observadas es que no identifican cuáles expresiones algebraicas son polinómicas y cuáles son sus coeficientes (Figura 3). También se encontraron dificultades que se vinculan con las propiedades que posee el polinomio de Taylor que aproxima a una función $f(x)$ en un punto dado, observadas en las gráficas de ambas funciones (Figura 4). Ya que, en los puntos de coordenadas $x=a$, se verificará que $f(a)=P_n(a)$ y además las funciones $f(x)$ y $P_n(x)$ poseen la misma pendiente y concavidad en $x=a$.

$P(x) = \sqrt{1+4x} + \frac{2x^2}{\sqrt{1+4x} \cdot 2!}$ ✗
 $P(x) = 1 + 4x + \frac{4x^2}{2!}$

FIGURA 3: Errores en la noción de polinomio y sus coeficientes.

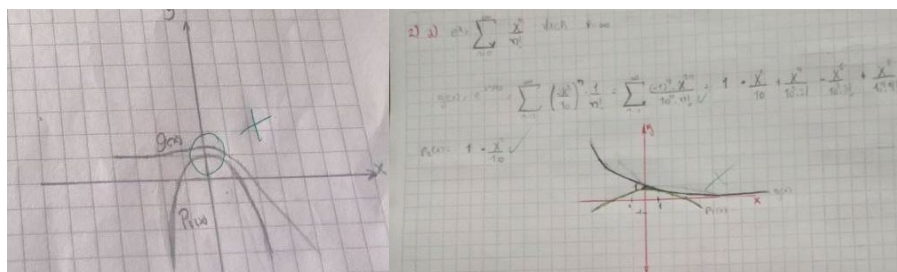


FIGURA 4: Errores observados en las gráficas del polinomio de Taylor y la función a la que aproxima en el entorno de un punto.

5. Cuestionario previo al estudio de polinomio y serie de Taylor

Como instrumento para conocer los conocimientos que posee el grupo de estudiantes participantes de la investigación, se implementó un cuestionario previo al estudio del tema en MC, mediante un formulario de *Google Forms*, el cual contaba con respuestas de múltiple opción y respuestas abiertas. Fue respondido por 75 estudiantes en forma anónima y voluntaria. Las respuestas a pregunta abierta, en párrafo corto o largo, se categorizan en tres, según el conocimiento que manifiestan del tema: “No sabe o no contesta”, “sabe regular”, y “sabe bien o muy bien”.

A continuación, se detallan las preguntas y las respuestas que se obtuvieron.

Las preguntas 1, 2 (Tabla 1) y la pregunta 3 (Tabla 2) tienen por objetivo indagar sobre los conocimientos que poseen los estudiantes sobre: polinomio, sus elementos y la identificación de expresiones polinómicas.

Tabla 1: Respuestas de los estudiantes a las preguntas 1 y 2 del cuestionario previo.

	Pregunta	Respuesta
1	¿Recuerdas haber estudiado polinomios en la Escuela Secundaria?	96% lo recuerda 3% no lo recuerda 2% no sabe
2	¿Qué es un polinomio? Con tus palabras descríbelo. ¿Cuáles elementos conoces de un polinomio?	Algunas respuestas: “No recuerdo”, “infinitos términos”, “tiene una variable”, “Expresión algebraica”, “monomios, sumas y restas”, “Expresión algebraica de suma o resta de monomios” 19%: No sabe o no contesta 52%: sabe regular 29%: sabe bien o muy bien

Tabla 2: Clasificación de respuestas de la Pregunta 3 del cuestionario previo

	Pregunta	Respuesta correcta	
3	$f(x) = 1 + x^3$	99%	
	$g(x) = 1 + \frac{1}{x}$	63%	
	Indicar cuales son funciones polinómicas.	$h(x) = (x - 1)^2 + 3(x - 1)$	97%
		$i(x) = \frac{x}{(x-1)}$	61%
		$p(x) = 5$	57%
		$q(x) = 1 + 2x$	97%

Las preguntas 4 y 5 (Tabla 3) tienen por objetivo examinar qué técnicas utilizan los estudiantes para graficar polinomios y cuáles operaciones son posibles realizar. La pregunta 6 (Tabla 4) tiene por objetivo principal reconocer en qué materias los estudiantes reconocen que adquieren esos conocimientos.

Tabla 3: Clasificación de respuestas de la Pregunta 4 y 5 del cuestionario previo.

	Pregunta	Respuesta
4	¿Cómo harías para realizar la gráfica de un polinomio y que te ayudaría realizarla? (Pregunta de respuesta abierta)	<p>“tabla de valores”, “de grado 1 o 2 saben la gráfica” “encontrar raíces y después evaluar puntos”, “con ayuda de un software”, “buscando puntos especiales, derivadas, raíces, etc”, “me ayudaría con técnicas aprendidas en materias anteriores”</p> <p>45%: No sabe o no contesta 21%: Sabe regular 34%: Sabe bien o muy bien</p>
5	¿Cuáles operaciones algebraicas puedes realizar siempre entre dos polinomios?	<p>Suma: 97% Resta: 92% Producto: 88% Cociente: 71%</p>
6	Ya en la Facultad de Ingeniería ¿en cuáles materias recuerdas haber utilizado polinomios o funciones polinómicas?	<p>Matemática PI: 96% Matemática A: 96% Matemática B: 55% Física I: 83%</p>

El objetivo de las preguntas 7, 8 es indagar sobre el conocimiento de las funciones lineales y cuadráticas en relación a qué sentido les han dado en su estudio. Las preguntas 9, 10 y 11 consultan sobre el conocimiento relativo a los conceptos de continuidad, derivabilidad e integrabilidad de las funciones polinómicas, estudiadas en MA y en MB (Tabla 4).

Tabla 4: Respuestas 7, 8, 9, 10 y 11 del cuestionario previo.

Pregunta	Respuesta		
7 Funciones polinómicas lineales: recuerdas para qué las ha utilizado, en qué tipo de problemas, que utilidad tienen y alguna característica de ellas.	“gráfica de una función”, “no recuerdo”, “funciones con exponente 1”	23%: sabe/No contesta	No
	“en rectas” “se halla fácil la pendiente” “En sistemas de ecuaciones, estudio de función, integrales”	33%: regular	Sabe regular
	“las funciones polinómicas lineales son polinomios de grado 1, gráficamente se podría caracterizar por ser una recta y a nivel de utilidades lo que más recuerdo es haberlas estudiado en mate A estudiando gráficas de funciones y su comportamiento. También al estudiar MRU”, “Son funciones creciente o decreciente constantemente, no tienen máximo o mínimos, su gráfico es una recta tienen grado 1 los utilicé en problemas de costos por cantidad, en física en MRU, y otros.”	44%: bien o muy bien	Sabe bien o muy bien
8 Funciones polinómicas cuadráticas: recuerdas para qué las ha utilizado, en qué tipo de problemas, que utilidad tienen y alguna característica de ellas.	“Siempre son positivas”, “Se utiliza en problemas donde varíe dos variables independientes”	28%: sabe/No contesta	No
	“presentan grado n se puede encontrar su punto mínimo y su máximo además de su concavidad”, “La gráfica de una función cuadrática pueden ser un círculo, elipse, parábola o hipérbola.” “parábolas”	24%: regular	Sabe regular
	“Son funciones polinómicas de segundo grado. Se usan para parábolas, curvas. Su ecuación $ax^2+bx+c=0$.”, “Se caracterizan por tener su exponente igual a 2. Se relacionan con las parábolas.”, “Su grado es 2, su gráfico es una parábola, pueden	48%: bien o muy bien	Sabe bien o muy bien

		tener raíces hasta 2, sus ramas son simétricas respecto al eje de simetría tienen un vértice, los utilicé en problemas de áreas, y otros que se podían representar por este tipo de modelo.”
9	¿Son continuas todas las funciones polinómicas?	“Si” el 60%, “No” el 36% , “No sabe” el 4%.
10	¿Son derivables todas las funciones polinómicas?	Si el 81%, No el 17%, No sabe el 2%.
11	¿Son integrables todas las funciones polinómicas?	Si el 75%, No el 15%, No sabe el 10%.

6. Recurso didáctico diseñado en la Calculadora Gráfica de GeoGebra

En base a las dificultades y errores que cometen los estudiantes durante el proceso de estudio del tema polinomio y serie de Taylor en MC, y considerando además que en la actualidad, diversos estudios científicos muestran que las herramientas tecnológicas facilitan la construcción de saberes matemáticos (Carrillo, 2012), es que se decide incorporar para el estudio del tema en uno de los cursos de MC y a modo experimental a partir el año 2019, el recurso didáctico diseñado (además de la Guía de estudio y las explicaciones del profesor) para ser usado en la Calculadora Gráfica de GeoGebra.

El recurso se diseñó especialmente para ser empleado en dispositivos móviles y se encuentra disponible en la página web de GeoGebra (de acceso libre <https://www.geogebra.org/m/xn2kn5rw>) o ingresando desde la aplicación Calculadora Gráfica con el nombre “Polinomio de Taylor”. En este recurso se puede ingresar la función “ $f(x)$ ” en la vista algebraica, el grado del polinomio “ n ” y el valor “ a ” alrededor de donde se desarrolla el polinomio de Taylor con deslizadores previamente definidos a tal fin. Se obtiene así, en la vista gráfica, la función y el polinomio (sumas parciales de la serie de Taylor), y en la vista algebraica la expresión polinómica. De este modo, al usar este recurso se pueden construir y graficar rápidamente los polinomios de Taylor (de distintos grados) y además observar a partir de estas, las propiedades que tienen con respecto a la función (Figura 5). Además, en el deslizador “ n ” se puede utilizar la opción de animación, que modifica dinámicamente el valor de grado y con ello la gráfica.

Su creación se realizó según directrices de diseño de materiales de GeoGebra, para que pueda ser utilizado en dispositivos móviles (Bayés, Del Río y Costa, 2018). Entre las características que se tuvieron en cuenta se destacan la medida de la pantalla (para que sea correcta su visualización en dispositivos de tamaño pequeño), no visualizar objetos que sean necesarios para la construcción, pero no para su uso e incorporación de interactividad mediante los deslizadores y la posibilidad de cambiar tanto la función $f(x)$ como el grado del polinomio, entre otras. La decisión de crear el recurso didáctico especialmente para estos dispositivos, radica en que en el contexto educativo en el cual se implementó (FI-UNLP) las aulas de clase no disponen de computadoras de escritorio y/o de notebook para trabajar con ellas, en cambio, los estudiantes poseen, la gran mayoría, dispositivos (teléfonos inteligentes) donde descargar la aplicación de GeoGebra para allí trabajar con el recurso didáctico.

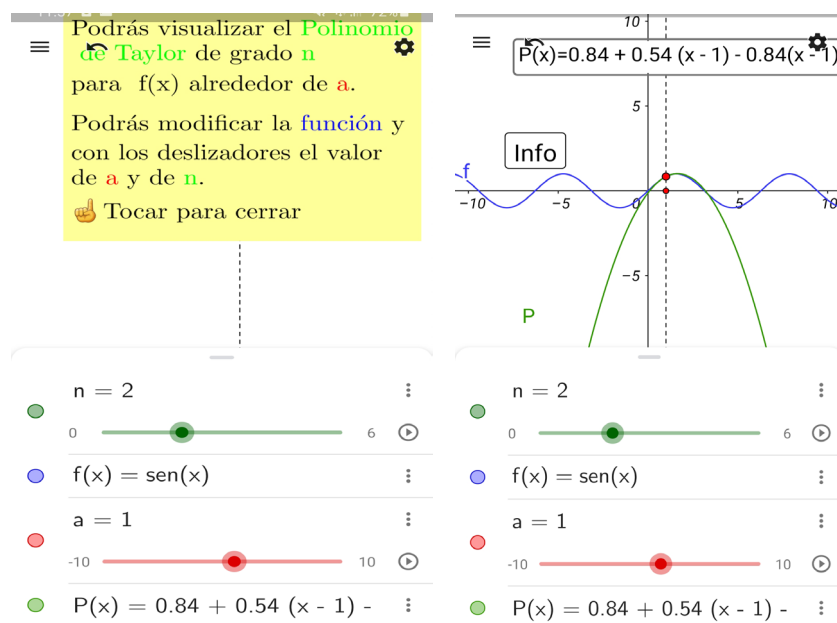


FIGURA 5: Recurso didáctico en la Calculadora Gráfica de GeoGebra diseñado para ser usado en dispositivos móviles.

7. Uso del recurso didáctico y cuestionario posterior al estudio de polinomio y serie de Taylor

El recurso didáctico es utilizado por los estudiantes durante el proceso de estudio de serie y polinomio de Taylor en uno de los cursos de MC en FI-UNLP, que es el primer tema con el que inicia la materia. El estudio se inicia recuperando los contenidos estudiados en MB sobre los conceptos de series numéricas (series de términos positivos, alternadas, criterios de convergencia), que se utilizan luego para estudiar la convergencia de la serie de Taylor. La modalidad de trabajo en el aula

es teórico-práctico y los estudiantes trabajan en grupos sobre un material elaborado por la cátedra que contiene material teórico, actividades, ejemplos y aplicaciones. En las clases, cuentan además con explicaciones teóricas y consultas con los docentes, y se promueve el uso de GeoGebra en sus dispositivos móviles para realizar gráficas, cálculos y verificaciones, tanto en las clases como en las evaluaciones parciales.

A modo de ejemplo, para el estudio de polinomio y serie de Taylor, una de las actividades propuestas en la Guía, es: “Hallar una serie de potencias que represente a $f(x) = e^{-x^2}$ en un entorno del cero, indicando el intervalo de validez. Utilizar en lo posible alguna serie de potencias conocida”. En general, para su resolución, los estudiantes utilizan la serie de Taylor conocida de $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ que converge para todo valor de x real, y haciendo un cambio de variables obtienen la serie: $e^{x^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}(-1)^n/n!$, también convergente en el mismo intervalo y sus sumas parciales son los polinomios de Taylor, de grado par que reflejan la característica de paridad de la función.

Usualmente, se utiliza esa notación con índice n para la sumatoria, que confunde a los estudiantes al momento de hallar un polinomio de Taylor de grado “ n ” determinado. En este caso, el recurso didáctico, colabora para subsanar tal problemática. En la figura 6, se observa: el valor n que indica el grado del polinomio ($n=0$, $n=2$, $n=4$), la función y el valor $a=0$ donde está centrado el mismo y las gráficas de $f(x)$ y de $P(x)$.

Posterior al estudio del tema en MC y utilizando para ello el recurso diseñado en la Calculadora Gráfica de GeoGebra, se realiza un cuestionario voluntario, al mismo grupo de estudiantes, con el objetivo de conocer sus aprendizajes. Para ello, se repiten las Preguntas 2, 3, 4 (del Cuestionario previo) y se agregan las preguntas: “¿Puedes mencionar alguna utilidad del uso de funciones polinómicas o polinomios para resolver problemas de ingeniería?” y “Con lo estudiado en Matemática C sobre el tema de Series de Potencias y Serie de Taylor, que conceptos nuevos agregaste a los que sabías sobre polinomio”.

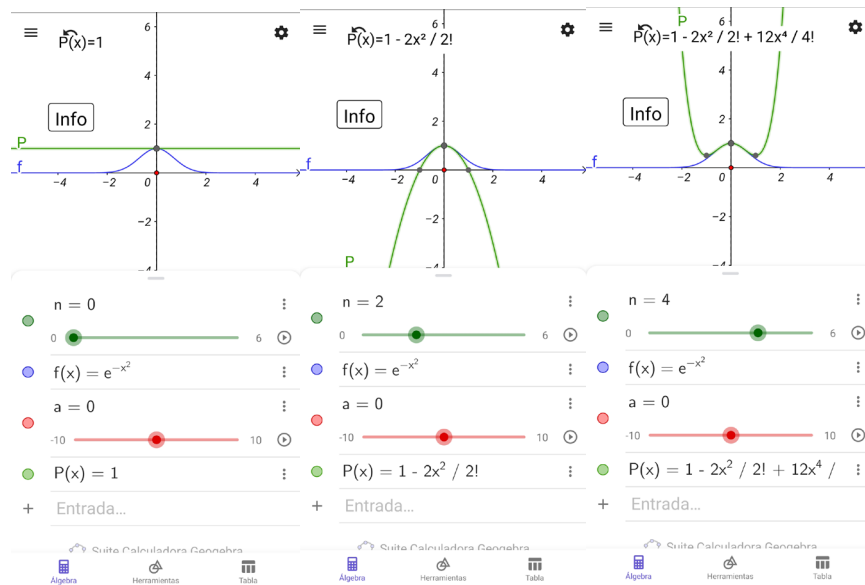


FIGURA 6: Recurso didáctico en la Calculadora Gráfica de GeoGebra. Polinomio de Taylor para la función e^{-x^2} alrededor de $a=0$.

El cuestionario fue respondido por una cantidad de 51 estudiantes y las respuestas que se obtuvieron se muestran en la tabla siguiente (Tabla 5).

Tabla 5: Respuestas 2, 3, 4, 5 y 6 del cuestionario posterior.

Pregunta	Respuesta correcta
¿Qué es un polinomio? Con tus palabras descríbelo.	4%: no sabe o no contesta
2 ¿Cuáles elementos conoces de un polinomio?	43%: sabe regular 53%: sabe bien o muy bien
3 Indicar cuales son funciones polinómicas.	100%
$f(x) = 1 + x^3$	65%
$g(x) = 1 + \frac{1}{x}$	100%
$h(x) = (x - 1)^2 + 3(x - 1)$	75%
$i(x) = \frac{x}{(x-1)}$	68%
$p(x) = 5$	98%
$q(x) = 1 + 2x$	
4 ¿Cómo harías para realizar la gráfica de un polinomio y que te ayudaría realizarla? (Pregunta de respuesta abierta)	15%: no sabe o no contesta 50%: sabe regular 35%: sabe bien o muy bien
5 ¿Puedes mencionar alguna “utilidad del uso de funciones polinómicas o funciones para resolver problemas de ingeniería?”	Utilidades matemáticas: 48% de Utilidades en ingeniería: 37% No mencionan utilidades: y 15%
“funcionabilidad de un	

panel solar”, “representar el movimiento de partículas”, “lanzamiento de proyectiles” y “cálculo de niveles de agua”

Con lo estudiado en Matemática C sobre el tema de Respuestas variadas donde
 6 Series de Potencias y Serie de Taylor, que conceptos destacan: las propiedades de nuevos agregaste a los que sabías sobre "polinomio". los polinomios, el uso de aproximación de funciones, la estimación de errores y la relación entre series y polinomios.

Continuando con el análisis de los resultados, calculamos el índice “g” dado por Hake, que muestra la ganancia de los resultados globales entre los cuestionarios previos y posterior al uso del recurso didáctico. Este índice se calcula para las preguntas 2, 3 y 4 que fueran las mismas en ambos cuestionarios. Para la pregunta 2, consideramos <pretest o pos test efectivo %> la cantidad que contestaron “bien o muy bien”. Para la pregunta 3, dado que consta de varios incisos, se calcula el valor <pre test o post test efectivo %> haciendo un promedio de las respuestas. Los resultados se muestran en el Tabla 6.

Tabla 6: Índice de ganancia (Hake).

Pregunta	2	3	4
Cuestionario previo	29%	79%	34%
Cuestionario posterior	53%	85%	35%
Índice g de ganancia (Hake)	0,33	0,30	0,01

Se observa que la mayor ganancia de aprendizaje se encuentra para las preguntas 2 y 3, que se relacionan con las preguntas: ¿Qué es un polinomio? Con tus palabras descríbelo. ¿Cuáles elementos conoces de un polinomio? y con “Indicar cuales son funciones polinómicas”.

8. Cuestionario en relación al uso del recurso didáctico

“Calculadora Gráfica de GeoGebra-Polinomio de Taylor”

Finalizado el estudio de los contenidos de polinomio y serie de Taylor en MC se les consultó a los estudiantes sobre el recurso utilizado en la Calculadora Gráfica de GeoGebra, con la siguiente pregunta ¿Qué ventajas crees que te dio el uso del recurso para el estudio del Polinomio de Taylor? Algunas respuestas fueron:

“Facilita mucho el entendimiento del tema”, “Nos ayudará a entenderlo mejor porque lo que hacemos analíticamente, lo vamos a ver gráficamente”, “Comprobar que la serie encontrada corresponde con la

función en el intervalo que corresponda”, “Mejor interpretación”, “Podés ver cómo a medida que los polinomios aumentan de grado se parecen más a la función verdadera”, “Mayor seguridad a la hora de resolver problemas y mayor exactitud”, “Un paso a paso de cómo usarlo específicamente”, “Hace más simple identificar la relación entre funciones”, “Lograr comprender mejor lo que aplicamos en las clases”, “Poder ver la aproximación de la serie y la función con facilidad”, “Está muy bueno para usar en clase”.

Además, se les consultó si lo utilizaron (Si/No) para el estudio del tema, o si sólo lo hicieron con “lápiz y papel” y los demás recursos didácticos de la asignatura (Guías de Cátedra y profesor, entre otros) y para cada respuesta se contabilizó la cantidad de estos según aprobaron o no el tema en las evaluaciones, obteniéndose los datos que se muestran en la Tabla 7. Se realiza un test chi-cuadrado³ para observar si existe relación entre el uso del recurso y la condición de aprobado. Se obtuvo en este caso un p-valor de 0.0011, que indica una fuerte vinculación.

Tabla 7: Datos de la encuesta realizada a estudiantes de Matemática C en el año 2019.

		Condición		
		Aprobado	Desaprobado	Totales
Uso Calculadora Gráfica de GeoGebra	si	52	3	55
	no	22	10	32
Totales		74	13	87

En la Figura 7 se muestran las respuestas a una de las evaluaciones de este tema en donde se observa por parte de un estudiante el uso de la Calculadora Gráfica para resolver el problema de: “Encontrar el desarrollo en serie de Taylor y su intervalo de validez de la función $\sin(3x)$ en un entorno de $a=\pi/2$. Dar el polinomio de Taylor grado 2 que aproxima a la función $\sin(3x)$ centrado en $\pi/2$ y graficarlo junto a la función en el intervalo $[0 ; \pi]$ ”.

³ El test que se utilizó fue contrarrestar la hipótesis nula H_0 : No hay relación entre el uso del recurso y la condición de aprobación y la hipótesis alternativa H_1 : Hay relación entre el uso del recurso y la condición de aprobación

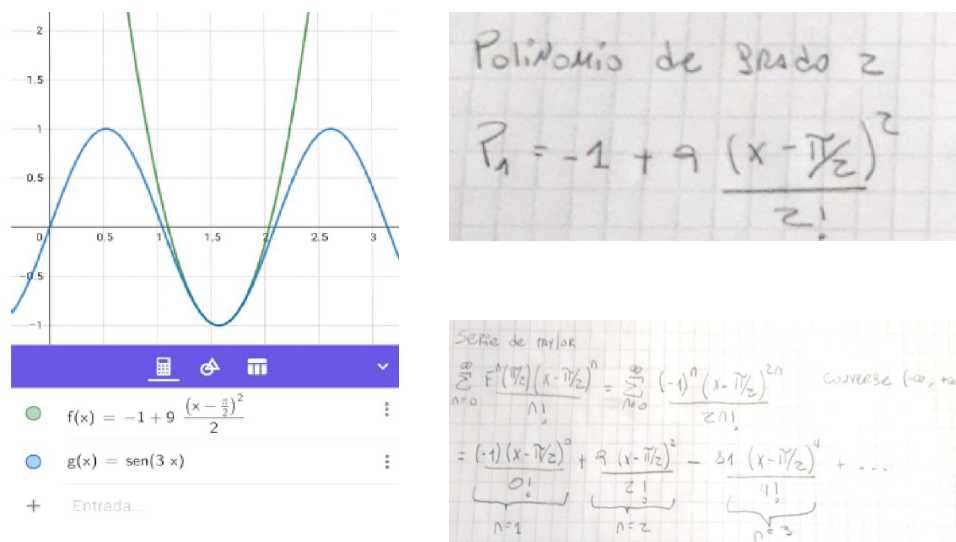


FIGURA 7: Resoluciones de estudiantes que utilizaron el recurso didáctico “Calculadora gráfica-polinomio de Taylor” en Matemática C.

Conclusiones

En este trabajo se presentaron los resultados de utilizar un recurso didáctico en un curso para estudiantes de ingeniería para el aprendizaje del tema polinomio y serie de Taylor, motivado por las dificultades encontradas en el estudio de este tema. Por ello se presentó un detalle de los conocimientos relativos a polinomios y funciones polinómicas que poseían los estudiantes al comenzar el curso de Matemática C, a partir de la implementación de un cuestionario previo. Se observó que alrededor del 50% posee una noción regular del concepto polinomio, pero la gran mayoría, identifican las funciones polinómicas dadas. En el caso de la función polinómica constante, el 40% no la identifica como tal, y las funciones racionales aproximadamente el 40% las clasifican como polinómicas. En relación a las técnicas que utilizan para graficar una función polinómica, se encontró que sólo el 34% conoce varias, mientras que el resto utiliza sólo tabla de valores y busca raíces en casos especiales, como por ejemplo funciones lineales y/o cuadráticas. En cuanto a las operaciones algebraicas, la suma, resta y producto, operaciones siempre válidas entre polinomios, las respuestas fueron correctas alrededor de un 90%, pero para el cociente, sólo fue de un 30%. También se pudo observar, que varios estudiantes reconocieron haber utilizado las funciones polinómicas en otras asignaturas, particularmente las funciones lineales y cuadráticas en física, detallando algunas ejemplificaciones. En cuanto al recurso didáctico diseñado en la Calculadora Gráfica de GeoGebra se observó: por un lado, que los estudiantes que lo utilizaron les resultó accesible, y por el otro, les permitió construir las gráficas

de los polinomios de Taylor junto a la función que aproxima, encontrándose además una mejora significativa en las calificaciones del tema para los que lo utilizaron. Con respecto al cuestionario posterior al estudio del tema, y comparándolo con el cuestionario previo, hubo una mejora en relación a la definición e identificación de polinomios, pero no así en las técnicas que utilizan para graficar funciones. Esto se puede observar en el índice Hake calculado, que indican una ganancia media para las preguntas 2 y 3, a diferencia de la pregunta que tiene por objetivo indagar las técnicas y/o métodos utilizados para graficar, el índice de Hake dio una ganancia baja. Además, se encontró que los estudiantes destacan las utilidades de los polinomios y funciones polinómicas en áreas de física, ingeniería y matemática. También mencionan las propiedades de los polinomios, el uso de aproximación de funciones, estimación de errores, relación entre series y polinomios, contenidos relativos a polinomio y serie de Taylor estudiadas en MC. Resumiendo, las dificultades observadas en los estudiantes, pueden deberse a que los contenidos estudiados tanto en la escuela secundaria como en los cursos previos a Matemática C en la FI-UNLP, no se lograron comprender en su totalidad. En general, estos conocimientos se consideran sabidos y se asumen (en general) aprendidos, y se utilizan en diversas áreas y distintas carreras, como por ejemplo en cursos de cálculo, álgebra lineal, estadística y probabilidades, pudiendo esto causar problemáticas en el estudio de temas en niveles educativos posteriores (Fonseca, Bosch y Gascón, 2010; Fonseca, 2004). En relación al recurso didáctico diseñado e implementado en el curso en estudio se concluye, a partir de los resultados obtenidos, que posibilita mejores aprendizajes y recupera saberes previos.

Referencias

- Alsaadat, K. (2017). Mobile Learning Technologies. *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*, 7(5), 2833–2837.
- Bayés, A., Del Río, L. y Costa, V. (2018). Diseño de materiales educativos para dispositivos móviles con GeoGebra: Análisis de un caso. *Virtual Educa Buenos Aires 2018*. Buenos Aires.
- Ballesteros-Ballesteros, V. A., Rodríguez-Cardoso, Ó. I., Lozano-Forero, S., y Nisperuza-Toledo, J. L. (2020). El aprendizaje móvil en educación superior: una experiencia desde la formación de ingenieros. *Revista científica*, (38), 243-257.
- Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (29), 9–22.
- Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M., y Benites, G. E. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros* (Vol. 5). McGraw-Hill.

Costa, V. A. y Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, 12.

DGCyE (2015). *Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires*. Recuperado de: http://www.abc.gob.ar/secundaria/sites/default/files/documentos/matematica_4.pdf

Drigas, A. S., y Pappas, M. A. (2015). A Review of Mobile Learning Applications for Mathematics. *International Journal of Interactive Mobile Technologies (IJIM)*, 9(3), 18–23.

Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P., & Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Fombona Cadavieco, J. y Rodil Pérez, F. (2018) Niveles de uso y aceptación de los dispositivos móviles en el aula. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 52, 21-35.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Fonseca, C., Bosch, M., y Gascón, J. (2010). *El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios*. *Educación matemática*, 22(2), 5-34.

Göksu, I., y Atici, B. (2013). Need For Mobile Learning: Technologies and Opportunities. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 103, 685–694.

Guía de Cátedra, Matemática C
https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0304/descargar.php?secc=0&id=F0304&id_inc=45370

Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American Journal of Physics*, 66(1), 64-74.

Hohenwarter, M., y Preiner, J. (2008). Design guidelines for dynamic mathematics worksheets. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 6, 311–323.

Tomaschko, M., & Hohenwarter, M. (2017). Integrating Mobile and Sensory Technologies in Mathematics Education. En 15th International Conference on Advances in Mobile Computing & Multimedia (MoMM2017). Salzburg.

Vitabar, F. (2014). GeoGebraTube: el siguiente nivel de la experiencia GeoGebra. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 38, 143–147.