



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i2p119-137>

O GeoGebra no Estudo de Funções Trigonométricas a partir da Análise Gráfica¹

GeoGebra in the Study of Trigonometric Functions from Graphical Analysis

ÂNGELA FERNANDES PEREIRA²

0000-0002-1163-0409

HELDER VLADEMIRO CORREIA VAZ³

0000-0001-9473-1848

RESUMO

O presente trabalho descreve os resultados de uma experiência com o uso de tecnologias no ensino de Matemática, aplicação do software GeoGebra como recurso no ensino/aprendizagem de trigonometria. Pretendeu-se fazer o estudo das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir da análise gráfica, através da realização de tarefas suportadas pelo software GeoGebra. A intervenção metodológica foi realizada numa abordagem qualitativa com estudo de caso em contexto de investigação-ação numa turma de alunos do 12º ano de escolaridade e utilizou-se como instrumento de recolha de dados as produções dos alunos. A análise das atividades ajudou-nos a entender como os alunos realizaram suas análises e desenvolver a capacidade de visualização espacial por meio do processo de mover as figuras na tela do computador. Assim, o estudo levou-nos a concluir que a utilização do GeoGebra com uma abordagem baseada na investigação matemática contribuiu significativamente para a compreensão dos conteúdos envolvidos e um papel ativo dos alunos no processo de construção do conhecimento.

Palavras-Chave: Função Trigonométrica; GeoGebra; aprendizagem significativa.

ABSTRACT

The present work describes the results of an experience with the use of technologies in the mathematics teaching, GeoGebra software application as a resource in trigonometry teaching/learning. It was intended to study the trigonometric functions from the graphical analysis, through the task accomplishment supported by the GeoGebra software. The methodological intervention was carried out in a qualitative approach with a case study in the context of research-action in a class of students of the 12th grade and we used the students' productions as a data collection instrument. The analysis of the activities helped us to understand how the students performed their analyses and to develop the ability of spatial visualization through the moving figures process on the computer screen. Therefore, the study directed us to

¹ Este artigo apresenta uma pesquisa realizada no âmbito do Curso de Formação enquadrada no Projeto reforço da formação de professores de matemática em Cabo Verde, numa lógica STEAM & GeoGebra. O projeto tem o apoio do Instituto GeoGebra na Uiniversidade de Cabo Verde (IGCV); do Instituto GeoGebra de Portugal (IGP); da Organização: Programa Parcerias para o Desenvolvimento (OEI) e da Entidade financiadora: Fundação Calouste Gulbenkian

² Liceu Amílcar Cabral, Achada Riba - Assomada - Ângela Eloisa Fernandes Pereira – angela.eloisa15@gmail.com

³ Uni-Cv / Faed - Assomada - Helder Vlademiro Correia Vaz - helder.vaz@student.unicv.edu.cv

conclude that the use of GeoGebra with an approach based on mathematical investigation contributed significantly to the understanding of the contents involved and an active role of students in the process of knowledge construction.

Keywords: *Trigonometric Function, GeoGebra, meaningful learning*

Introdução

As constantes mudanças impostas pela sociedade da informação e a presença das tecnologias nas mais variadas camadas da sociedade, têm significado um repensar na educação e na sua forma de montar os currículos escolares.

Pesquisas que analisam as potencialidades das Tecnologias Informáticas (TI) em sala de aula ressaltam a sua relevância no ensino de Matemática. Borba & Penteadó (2007), asseguram que a TI é grande aliada no ensino da Matemática, visto que permite a experimentação e a ênfase no processo de visualização. Os referidos autores argumentam que, ao incluir a TI como parte das atividades em sala de aula, o aluno realiza descobertas incentivando a compreensão e dando significado ao conhecimento matemático.

Cabo Verde vem apostando decididamente no novo modelo de ensino interativo, para promover o desenvolvimento dos alunos, de modo a competir na economia global e vencer na Sociedade da Informação. Pois, o Decreto-Legislativo nº 13/2018, de 7 de dezembro, procede à primeira alteração ao Decreto-Legislativo nº 2/2010 de 7 de maio, que define as Bases do Sistema Educativo Cabo-verdiano (DLBSE), aprovadas pela Lei nº 103/III/90, de 29 de dezembro, na redação dada pela Lei nº 113/V/99, de 18 de outubro, estabelece os princípios fundamentais da organização, da gestão e do desenvolvimento dos currículos do ensino básico e secundário, afirmando que,

O Ministério da Educação de Cabo Verde tem desenvolvido o seu trabalho no sentido de responder ao desafio, do Programa do Governo IX Legislatura, [...] de edificar um sistema educativo integrado no conceito de economia do conhecimento, que oriente as crianças e os jovens para um domínio proficiente das línguas, das ciências integradas, das tecnologias e para a construção de um perfil cosmoplita aberto ao mundo, capaz de interiorizar valores intrínsecos ao saber ser e estar, de responsabilização mútuas, enquanto membros da comunidade de preparação para a aprendizagem ao longo da vida, cultura de investigação, experimentação e inovação 4(BORCV, 2022, p.1655).

Este novo modelo de ensino implica, o reposicionamento dos professores na sala de aula, passando de “repositores de conhecimento” para “facilitadores da aprendizagem”, propiciando aos estudantes uma aprendizagem significativa, que promove o desenvolvimento de competências mais complexas, valorizando os saberes disciplinares, bem como trabalho interdisciplinar e transdisciplinar e a

⁴ Boletim Oficial da República de Cabo Verde (BORCV) - I Série nº 68 – 12 de julho de 2022

capacidade de pesquisa, relação, análise, o domínio de técnicas de exposição e argumentação, a capacidade de trabalhar cooperativamente e com autonomia (BORCV, 2022, p.1663).

De acordo com o National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2015), todos os profissionais que estão ligados à área da educação, deveriam implementar as tecnologias digitais como prática em suas aulas, como se fossem parte do conteúdo de Matemática que se estuda na escola, possibilitando aos alunos conhecerem e explorarem o uso das tecnologias na aprendizagem dos conteúdos.

Ponte (2003), afirma que os professores de Matemática, em sua prática, precisam saber usar as ferramentas das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) em suas salas de aula, incluindo softwares educacionais próprios da sua disciplina ou de educação no âmbito geral.

Pois, um ponto fundamental no processo de ensino é que o professor demonstre ao aluno que a matemática pode ser interessante e útil, desenvolvendo no mesmo a capacidade de se tornar mais curioso e interessado em compreender o conteúdo transmitido. Mesmo que os professores percebam que a utilização das TIC realmente proporciona uma melhoria nos resultados do processo ensino e aprendizagem, ainda são poucos os professores que lançam mão desta ferramenta. Segundo Anjos e Mercado (2016), “O uso do computador no ensino de matemática está justamente na possibilidade dessa ferramenta apresentar um “novo olhar” sobre problemas antigos, ou ainda, nas ações de manipulação que viabilizem novos questionamentos através de conjecturas matemáticas”(p. 4).

Portanto, tais recursos, quando utilizados adequadamente, podem provocar mudanças na postura do professor e dos alunos no sentido de auxiliar na compreensão do que está sendo estudado. Porém, para que estas mudanças possam ocorrer, são necessárias algumas ações, igualmente importantes, como equipar as escolas com salas de informática com computadores ligados à internet e apoiar o professor para utilizar pedagogicamente estas tecnologias.

É inegável que, para um grande grupo de pessoas, a matemática é uma disciplina de suma importância. Outras pessoas acreditam que ela é útil no dia-a-dia. Porém, é comum ouvir, seja de alunos, seja de profissionais de diversas áreas, que a sua relação com a matemática não é ou não foi harmoniosa e prazerosa (JUCOSKI, 2011).

A Matemática escolar, muitas vezes, se distancia da Matemática utilizada no dia-a-dia, ou seja, o que se aprende na escola não é utilizado nas relações sociais, nas quais, a cada dia, se faz mais necessário o domínio de tecnologias ligadas à matemática e em particular à trigonometria. D’Ambrósio (1989, apud JUCOSKI 2011) salienta que:

A típica aula de Matemática ainda é uma aula expositiva, na qual o professor passa para o quadro negro, aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia do quadro para o seu caderno e, em seguida, procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender Matemática através de um processo de transmissão de conhecimento, além de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor (p. 17).

Dentro dos conteúdos da Matemática escolhemos trabalhar a trigonometria, incidindo concretamente sobre o tópico funções trigonométricas do programa da disciplina de Matemática do 11º ano de escolaridade, para ser lecionada no terceiro trimestre, mas, devido a alguns constrangimento por causa de covid-19, os alunos não conseguiram trabalhar no 11º ano, assim ficou por trabalhar no primeiro trimestre do 12º ano, visando a implementação de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra.

A Trigonometria surge como uma extensão da Geometria, e se desenvolveu no mundo antigo a partir das necessidades práticas ligadas a Astronomia, Agrimensura e Navegação. Atualmente, nas escolas e nos livros didáticos, se trabalha a apresentação verbal do conteúdo, e em seguida o aluno é submetido a exercícios que exigem cálculos e representações geométricas relacionadas a temática em estudo.

Há muito tempo que a Trigonometria nos fascina dada a sua presença em, praticamente todos os ramos da Matemática, sendo também utilizada na Física, Astronomia e muitas outras áreas. Destacamos este tópico pelo seu potencial para desenvolver o raciocínio matemático, habilidades e competências. No entanto, os alunos mostram clara dependência e centralidade no que o professor trabalha na aula, com pouca disposição em procurar os conhecimentos, investigar sobre os conteúdos. Da experiência como professores de matemática durante alguns anos, constata-se algumas fragilidades que dificultam um entendimento efetivo dos conceitos, afetando de maneira negativa o resultado dos alunos nas ferramentas avaliativas que propõem questões da trigonometria. Pelo facto das questões tratarem de trigonometria, as dificuldades situam se basicamente na interpretação geométrica geral, o que pode ser percebido através das dificuldades apresentados na interpretação de funções trigonométricas e de suas características e propriedades, no desconhecimento do significado das expressões.

Mas, as dificuldades que existem na aprendizagem da trigonometria podem ser originárias de diversas fontes relacionadas ao próprio aluno e a sua experiência cultural, dos materiais didáticos utilizados nas aulas e ainda pela complexidade do conteúdo trigonométrico, bem como à forma com que o professor de Matemática, mediador do processo de ensino e aprendizagem, atua.

A temática trigonometria gera interesse em diversos pesquisadores na área de Educação Matemática, e alguns desses têm buscado nas tecnologias digitais, possíveis soluções para a falta de abstração por parte de seus alunos, isso pode ser verificado nos textos de Sousa (2017), Dantas (2015), Lopes (2013) e Pedroso (2012). Esses autores acreditam que a utilização de um software educativo pode qualificar o processo de ensino e aprendizagem. Destacam que para o ensino de trigonometria é importante o uso de um software de geometria dinâmica como ferramenta auxiliar, pois os estudantes podem experimentar as transformações das funções, analisando e conjecturando sobre as características das funções.

Os softwares de geometria dinâmica têm como característica principal o movimento de objetos na tela. Possibilitam fazer investigações, descobertas, confirmar resultados, fazer simulações, e permitem levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática.

Existem vários softwares de Geometria Dinâmica, contudo, o GeoGebra se destaca, pois, permite trabalhar simultaneamente Geometria, Cálculo, Álgebra, Probabilidade e Estatística. Esse software foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo (HOHENWARTER, 2007), como um software educacional de uso livre. Nesse momento o GeoGebra está sendo um recurso muito usado pelos professores de Matemática em Cabo Verde, mas o contexto educativo ainda carece de equipamentos informáticos nas escolas públicas para a promoção do ensino suportado por esta ferramenta.

Segundo Nascimento; (2012 p. 113), o GeoGebra “é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário)”. Podemos aceder ao portal oficial do GeoGebra através do site www.geogebra.org de onde podemos trabalhar on-line ou baixar o aplicativo para ser instalado e utilizado no modo off-line. O software está disponível para ser utilizado em vários sistemas operativos, dos quais destacamos: Windows, android, Linux e IOS. Através do portal do GeoGebra tem-se acesso a variedades de atividades gratuitas, exercícios, aulas e jogos para matemática e ciência. Também é possível criar o perfil no GeoGebra sala de aula onde o professor tem a oportunidade de criar tarefas interativas envolvendo os alunos e acompanhar o progresso dos alunos analisando se iniciaram ou não as tarefas, realizar perguntas para a turma, visualizar e exibir as respostas dos alunos, realizar discussões interativas entre todos os alunos e grupos de alunos.

Este software matemático também, permite uma boa interatividade entre professor, aluno e conhecimento matemático, possibilitando trabalhar teoremas, construção de conceitos, testar hipóteses, fazer releituras importantes de conteúdos matemáticos, além de fácil manuseio. Podemos com seu uso, trabalhar o processo de ensino aprendizagem, passando de um modelo baseado na informação para um modelo fundamentado na construção do saber (VAZ E DE JESUS , 2014).

Portanto, para o ensino e aprendizagem da matemática é de extrema importância o uso do software GeoGebra na sala de aula, pois, esta ferramenta reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística, e cálculos simbólicos em um único ambiente e tem como vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si, possibilitando aos alunos uma aprendizagem significativa dos conteúdos.

Nas práticas do cotidiano de sala de aula, em que o processo exige experiências inovadoras, manuseamento de equipamentos informáticos os professores têm que estarem preparados para as possíveis situações imprevisíveis. Por tanto, quando isto acontece o professor tem de usá-lo de forma correta, desta forma, possibilita o desenvolvimento do professor, do aluno e do próprio processo de ensino-aprendizagem (BORBA e PENTEADO, 2016).

Tendo em conta as dificuldades dos alunos e a nossa experiência enquanto professores, este estudo tem os seguintes objetivos:

- ✓ Familiarizar os alunos com as ferramentas básicas do GeoGebra;
- ✓ Explorar os diferentes recursos e ferramentas do software GeoGebra, para a construção de objetos geométricos;
- ✓ Procurar analisar como se desenvolve a aprendizagem dos alunos em Trigonometria a partir de um conjunto de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra;
- ✓ Estabelecer conjecturas entre os objetos construídos através de manipulação;
- ✓ Analisar graficamente as funções seno, cosseno e tangente;
- ✓ Desenvolver a capacidade de comunicação, raciocínio e resolução de problemas.

Para responder a estes objetivos consideremos as seguintes questões de investigação:

- ✓ De que modos os alunos desenvolvem e relacionam conceitos trigonométricos quando usam o Geogebra?
- ✓ Será que o GeoGebra pode potenciar a capacidade de generalização e justificação dos alunos sobre as características das funções trigonométricas?

Metodologia

Tendo em conta o propósito e os objetivos delineados para o desenvolvimento desta investigação, a opção metodológica deste estudo pautou-se por uma investigação essencialmente qualitativa, de carácter descritivo-interpretativo, e através de uma abordagem ao estudo de caso em contexto de investigação-ação.

Bogdan e Biklen (1994), estabelecem cinco características fundamentais da investigação qualitativa: (1) a fonte direta de dados é o ambiente natural, sendo o

principal instrumento de recolha o próprio investigador; (2) os dados recolhidos são descritivos e não numéricos, tendo a forma de palavras ou imagens; (3) o investigador interessa-se sobretudo pelo processo, relegando para segundo plano os resultados; (4) a análise dos dados é feita de uma forma indutiva, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias; e (5) compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências, assume uma importância vital. Estas características coadunam-se com o objetivo e as condições deste estudo.

Os participantes na investigação são os alunos de uma turma do 12º ano da qual um dos investigadores é docente pelo segundo ano consecutivo. As observações são realizadas durante a experiência, na sala de informática da escola onde os alunos são chamados a desenvolverem as tarefas de investigação.

Esta investigação orientou-se através da análise documental e bibliográfica relativamente à GeoGebra e à matemática no ensino secundário (programa e livros didáticos do 11º e 12º ano) e procedeu-se à implementação do plano de ação através da realização da experiência na abordagem dos conteúdos trigonométricos, com recurso a GeoGebra.

A participação dos investigadores na estruturação prática do objeto do estudo e, posteriormente, no apoio aos alunos durante o desenvolvimento das aulas cujas planificações iam sofrendo reajustes de acordo com a reação dos alunos e outros constrangimentos que se fizeram sentir, leva a que este trabalho se aproxime daquilo que é definido como investigação-ação.

A investigação-ação trata-se de um tipo de investigação em que o investigador se envolve ativamente com vista à promoção de uma mudança social na educação. Consiste na recolha de informações sistemáticas com o objetivo de promover mudanças sociais (BOGDAN e BIKLEN, 1994).

Neste contexto de estudo, a investigação ação foi caracterizada por: a realização de investigação em fases, planeamento, ação, observação, reflexão/avaliação; a realização de experiência de estudo acompanhado com base em tarefas seguida de reflexão; o envolvimento dos participantes de uma forma ativa no trabalho de investigação e o envolvimento ativo dos investigadores na experiência em todo o processo investigativo.

Tendo presente os objetivos deste estudo, envolveu-se na investigação os alunos de uma das turmas do 12º ano de escolaridade do Liceu Amílcar Cabral na Cidade de Assomada, atribuída a um dos investigadores durante o ano letivo 2021/2022, realizou-se um estudo do tipo quase-experimental, uma vez que a amostra é não aleatória, por conveniência.

Os investigadores conceberam uma atividade cuja temática é a unidade trigonometria da disciplina de Matemática e incidiu diretamente sobre o tópico

Funções trigonométricas, do 11º ano de escolaridade para uma turma de alunos do 12º ano de escolaridade e teve como objetivo principal, relatar e refletir sobre a experiência, mostrando como se desenvolve a aprendizagem dos alunos em Trigonometria tendo por base um conjunto de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra. Num universo de 18 alunos, foram organizados em grupos de dois elementos somando um total de nove grupos, tendo sido atribuído um computador a cada grupo, colaborativamente, tinham de construir e analisar o objeto no GeoGebra, produzir um trabalho escrito sobre as tarefas propostas do que estavam a aprender.

A atividade sobre trigonometria foi resolvida pelos alunos no primeiro trimestre do ano letivo 2021/2022 e as sessões de trabalho decorreram nos dias 30 de outubro, 03 e 06 de novembro, numa das salas de informática do Liceu Amílcar Cabral que dispunha de 12 computadores, mas sem ligação à internet, conforme se ilustra no quadro 1 com a organização das atividades.

Sessões	Descrição	Duração	Data
1	Formação dos grupos de trabalho. Instalação dos Software GeoGebra nos computadores da sala de informática. Familiarização dos alunos com o GeoGebra	50 mim	30/10/2021
2	Resolução de Tarefas	50 mim	03/11/2021
3	Resolução de Tarefas	100 mim	06/11/2021

Quadro 1: Fonte: (Elaboração dos autores)

Portanto, os participantes deste estudo foram os alunos de uma das turmas do 12º ano, da área Económica e Social, constituída por 7 alunos do sexo masculino e 11 do sexo feminino. Pois, havia uma predominância de sujeitos do género feminino na turma, os alunos têm idades compreendidas entre os 17 e os 20 anos. Atendendo às opções metodológicas, um estudo de caso em contexto de investigação-ação, os investigadores tiveram uma participação ativa, trabalhando diretamente com os alunos em todo o processo da implementação da atividade.

Os dados foram recolhidos a partir da observação dos alunos na resolução das tarefas durante as sessões com recurso a GeoGebra utilizando uma grelha de observação e diário e a análise dos produtos criados pelos alunos, para além das observações e anotações feitas durante esta fase, foram registados através de fotografias o desenvolvimento da aula, pois, previamente a recolha de dados foi

solicitado aos alunos o termo de utilização das produções e imagens que se encontra na posse dos investigadores. que segundo Bogdan e Biklen (1994) e Lessard-Hébert, Goyette & Boutin (1996) são técnicas privilegiadas nas metodologias qualitativas.

Apresentação, análise e interpretação dos resultados

Descrição da atividade

Tendo em consideração a importância do conteúdo trigonométrico no ensino e aprendizagem de diversas áreas da matemática e o baixo nível de aproveitamento dos alunos relativamente a esse conteúdo em vários anos da experiência dos investigadores como professores, elaborou-se a atividade para o estudo das funções trigonométricas no GeoGebra com o intuito de melhorar o processo do ensino e da aprendizagem desse conteúdo trigonométrico e promover mais interesse e motivação nos alunos.

A atividade foi pensada para fazer o estudo da função Trigonométrica. No início do ano letivo, foram feitas revisões sobre os conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente nos triângulos conteúdos do 10º ano. Em seguida, trabalharam os conteúdos trigonométricos, tais como as relações entre graus e radianos, o círculo trigonométrico e seus quadrantes e as equações trigonométricas, pois eram os pré-requisitos importantes para o desenvolvimento da atividade.

Santos e Homa (2018), referem que “uma expansão para o estudo de funções trigonométricas no GeoGebra, é trabalhar com as transformações de translação, simetria, ampliação e redução” (p. 11). Portanto, segundo esses autores, o professor pode propor atividades que possibilita o aluno manipular os coeficientes de transformação e assim, visualmente entenda as mudanças e conjectura sobre as características das funções. Assim, indicamos os alunos a trabalharem com as funções:

$$\bullet f(x) = \sin(ax) + b \quad \bullet g(x) = \cos(ax) + b \quad \bullet h(x) = \operatorname{tg}(ax) + b$$

Os alunos trabalharam com a variação dos coeficientes um a um, possibilitando conjecturas sobre as relações entre a variação de cada coeficiente e a transformação associada às características das funções.

Conforme disposição dos computadores na sala de informática, cada grupo trabalhou em um computador, assim, eles poderiam se comunicar um com o outro a fim de discutirem as tarefas, portanto, a ênfase no processo de aprendizagem exige que se trabalhe com técnicas que incentivem a participação dos alunos, a interação entre eles, o debate, o diálogo, que promovam a produção do conhecimento [...] (MORAN, MASETTO e BEHRENS, 2000).

Iniciou-se a primeira sessão no dia 30 de outubro de 2021 pelas 10 horas com uma duração de 50 minutos, os investigadores levaram para a sala o computador portátil e um projetor multimédia. A expectativa dos alunos era grande, pois, sabiam que iam trabalhar com os computadores de um modo diferente. Foram expostos um pouco sobre o software GeoGebra e a razão da escolha deste, além da explicação de como seriam desenvolvidas as atividades investigativas e foi desenvolvida, com os alunos, algumas construções (incluindo a dos gráficos das funções trigonométricas) no GeoGebra para a sua familiarização. Constatamos que os alunos não conheciam o GeoGebra, mas, todos já tinham conhecimentos de informática.

Na segunda sessão, após apresentação da janela do GeoGebra com os respetivos gráficos das funções para o desenvolvimento da atividade, foi entregue, aos alunos, as tarefas, ou seja, a folha de atividade com os procedimentos para o estudo da função seno, cosseno e tangente. Sobre este registo, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), apontam que “É somente quando se dispõem a registar as suas conjeturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações” (p.33).

Tarefa I – Analisar o gráfico da função seno a partir do movimento dos seletores para conjeturar sobre as suas características.

Objetivamos com essa tarefa que os alunos investiguem as características (zeros, contradomínio, monotonia, extremos e período) da função seno, através do processo de movimento e visualização do objeto na tela.

Na tarefa I os alunos tinham de seguir alguns procedimentos para poderem conjeturar sobre a função seno. A tarefa consistia em mover os seletores a e b , registar as conclusões estabelecidas sobre a relação entre os seletores na análise das características da função, como mostra a Figura 1.

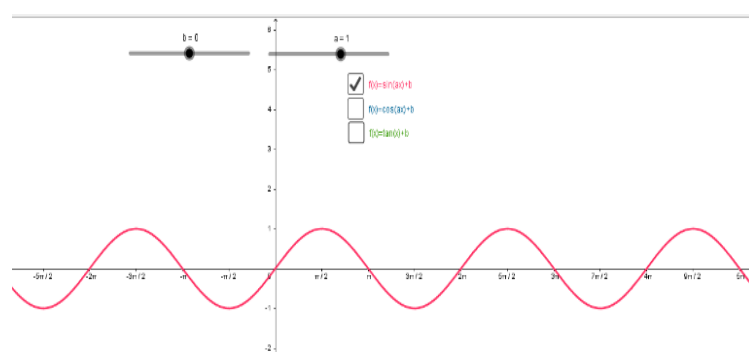


FIGURA 1: Gráfico da função seno

FONTE: Dados de campo, elaborado pelos autores

Portanto, os alunos tinham que fazer uma discussão em dupla sobre as conclusões que chegaram após o processo de mover o objeto na tela, fazendo as anotações por escrito, justificando o que foi observado após o processo de arrastar a figura pela tela na janela gráfica do software.

Vários grupos apresentaram dificuldades na análise das características, visto que registavam os elementos observados no gráfico, mas não verificaram o que acontecia ao mover os seletores para poderem tirar as conclusões estabelecidas. Portanto, é de realçar que os grupos pediram ajuda depois de várias tentativas não conseguidas.

Assim, a intervenção dos professores se faz necessária através de apoio, incentivo na execução da tarefa relativamente a raciocínios incompletos, mas os alunos se aperceberam que os professores não era o ponto central da interação exercida na sala de aula. De todas as vezes em que a ajuda foi solicitada, o papel dos professores esteve mais próximo da ideia de facilitador e orientador de processos, procurando desenvolver a autonomia dos alunos, incentivando-os a refletir, analisar e descobrir, criando uma atmosfera de cooperação, como forma de reflexão sobre os resultados que iam obtendo e validação das suas conjeturas.

Na terceira sessão, os alunos resolveram a tarefa II e a tarefa III, sem grandes intervenções dos professores e foram realizadas a discussão e a formalização dos resultados, etapa em que os alunos tiveram a oportunidade de compartilhar com toda a turma o trabalho realizado por eles.

Tarefa II – Analisar o gráfico da função cosseno a partir do movimento dos seletores para conjeturar sobre as suas propriedades.

Também nessa tarefa pretendeu-se que os alunos investigassem as características (zeros, contradomínio, monotonia, extremos e período) da função cosseno, através do processo de movimento e visualização do objeto na tela.

Na tarefa II - os alunos tinham de seguir alguns procedimentos para poderem conjeturar sobre a função cosseno. A tarefa consistia em mover os seletores a e b , registar as conclusões e estabelecer a relação entre os seletores na análise das características da função, como mostra a Figura 2.

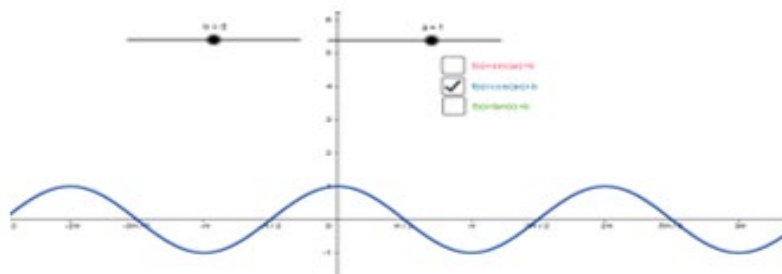


FIGURA 2: Gráfico da função cosseno

FONTE: Dados de campo, elaborado pelos autores

Nesta tarefa, demonstraram mais facilidade na análise das características da função cosseno para conseguirem tirar as respectivas conclusões, do que na anterior. Todos os grupos conseguiram observar, analisar, refletir e registar as conclusões conseguidas na tarefa.

Tarefa III – Analisar o gráfico da função tangente a partir do movimento dos seletores para conjecturar sobre as suas Características.

Assim como as tarefas anteriores, objetivamos que os alunos investigassem as características (zeros, contradomínio, monotonia, extremos e período) da função tangente, através do processo de movimento e visualização do objeto na tela.

Nesta tarefa os alunos tinham de seguir alguns procedimentos para poderem conjecturar sobre a função tangente. A tarefa consistia em mover os seletores a e b, registar as conclusões estabelecidas sobre a relação entre os seletores na análise das características, como mostra a Figura 3.

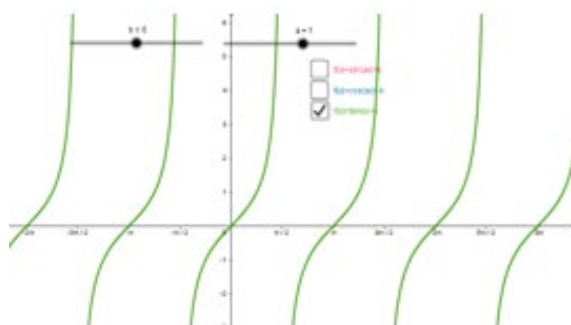


Figura 3: Gráfico da função tangente
FONTE: Dados de campo, elaborado pelos autores

Nesta tarefa, inicialmente os alunos demonstraram algumas dificuldades na análise do gráfico para conseguirem tirar as respectivas conclusões, solicitaram ajuda para esclarecimento das questões relativamente ao período, extremos e monotonia e afirmaram que é mais fácil analisar os gráficos anteriores do que o gráfico da função tangente. A maioria dos grupos conseguiram observar, analisar, refletir e registar as conclusões conseguidas na tarefa.

As reações dos alunos perante a atividade mostraram uma maior consciência, responsabilidade e preocupação com a qualidade das suas aprendizagens e com os produtos daí resultantes.

Avaliação da intervenção realizada

Consideramos que os registos feitos pelos alunos durante a realização da atividade e o momento de socialização das conjecturas nos permitem verificar se o

objetivo principal da intervenção – estudar as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente no que se refere a monotonia, contradomínio, zeros, extremos e período – foi alcançado.

Quanto aos registos feitos durante a atividade, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), apontam que “[...] a escrita dos resultados ajuda os alunos a clarificarem as suas ideias, nomeadamente a explicitar as suas conjecturas, e favorece o estabelecimento de consensos e de um entendimento comum quanto às suas realizações” (p. 36).

Os registos dos alunos apresentam, em sua maioria, respostas corretas. Pois conseguiram conjecturar sobre as relações entre a variação dos coeficientes e a transformação associada às características das funções.

Na tarefa I, que tratava do estudo da função seno, todos os grupos responderam corretamente todas as questões, porém, na questão b) apenas dois grupos (grupo 2 e 6) indicaram os zeros e registaram bem a conclusão sobre as relações entre a variação dos coeficientes e a transformação associada aos zeros e os demais só indicaram os zeros, o que é um indicativo de que compreenderam bem a análise gráfica da função seno e as características investigadas. Abaixo, destacamos algumas respostas dos grupos da tarefa I.

a) Alguns intervalos de monotonia (onde cresce e onde decresce) da função, move o seletor a observe o que acontece e anote as conclusões. Faça o mesmo para o seletor b.

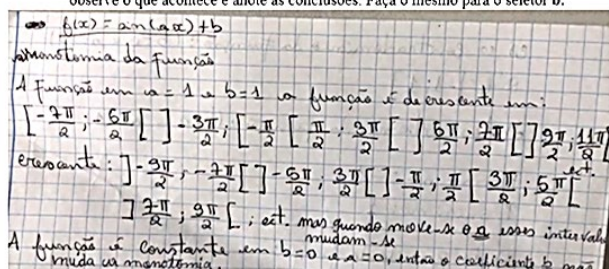


FIGURA 4: Resposta do grupo G6 à questão alínea a) e elementos do grupo G6 na resolução da tarefa

FONTE: Câmara fotográfica do iPhone

Nas respostas efetuadas, verificou-se que, dos nove grupos da turma, apenas um grupo não registou a conclusão sobre a relação entre a variação do coeficiente e a transformação associada à monotonia, indicou apenas alguns intervalos de monotonia. Entre os que registaram, cinco grupos estabeleceram a relação, como ilustra a resposta do grupo 6 (Figura 4), notamos que para os alunos é mais fácil enunciar as conjecturas oralmente do que registá-las, mostraram alguma insegurança em registrar as suas descobertas. Pois, responderam corretamente as questões, porém evidenciaram deficiências de comunicação quando registam as respostas.

Nesta questão os alunos além de indicarem alguns intervalos de monotonia deviam concluir que “ Os intervalos de monotonia da função trigonométrica variam

com a mudança do valor do coeficiente a , o valor do coeficiente b não intervém no estudo da monotonia”.

Ainda, na tarefa I, relativamente à questão sobre os zeros da função destacamos a resposta do grupo G2.

b) Os ângulos cujo valor de seno é zero, move o seletor a observe o que acontece e anote as conclusões. Faça o mesmo para o seletor b .

Zeros da função $f(x) = \text{sen}(ax) + b$
 Se $a = 2$ e $b = 0$
 Os zeros são $\{ \dots, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots \}$
 Quando movemos o b , vemos que a função tem zeros se b está entre 1 e -1 , para os outros valores não existem zeros.
 Quando movemos o a , vemos que os pontos dos zeros alteram.



FIGURA 5: Resposta do grupo G2 à tarefa I questão b) e elementos do grupo G2 na resolução da tarefa I

FONTE: Câmara fotográfica do iPhone

Relativamente à esta questão, nas respostas efetuadas, verificou-se que, dos nove grupos da turma, dois grupos registaram a conclusão sobre as relações entre a variação do coeficiente e a transformação associada aos zeros da função, como ilustra a resposta do grupo 2 (Figura 5), os demais grupos indicaram apenas alguns zeros.

Os outros grupos, talvez, pela insegurança, falta de atenção, raciocínio e rigor da escrita não registaram bem a relação entre a variação dos coeficientes e a transformação associada aos zeros, ou seja, indicaram apenas alguns zeros, como ilustra a resposta do grupo G3 (Figura 6).

b) Os ângulos cujo valor de seno é zero, move o seletor a observe o que acontece e anote as conclusões. Faça o mesmo para o seletor b .

b) A expressão geral dos zeros da função:
 Zeros em $(b=1; a=1)$
 são: $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{16\pi}{2}, \frac{19\pi}{2}, \frac{23\pi}{2}, \dots \right]$

FIGURA 6: Resposta do grupo G3 à tarefa I questão b

FONTE: Câmara fotográfica do iPhone

A exploração desta questão permitiu aos alunos verificarem que, a existência de zeros tanto na função seno como na função cosseno depende do valor do coeficiente b , mas que, os ângulos que correspondem aos zeros, além, do valor do coeficiente b também dependem do valor do coeficiente a .

Na tarefa II, que tratava do estudo da função cosseno, todos os grupos responderam corretamente todas as questões relativamente à função cosseno, sem nenhuma intervenção dos professores, parece que, depois da intervenção dos professores através de apoios e esclarecimento de dúvidas na resolução da tarefa I os alunos perceberam o desenvolvimento das tarefas, destacamos algumas respostas dos grupos da tarefa II.

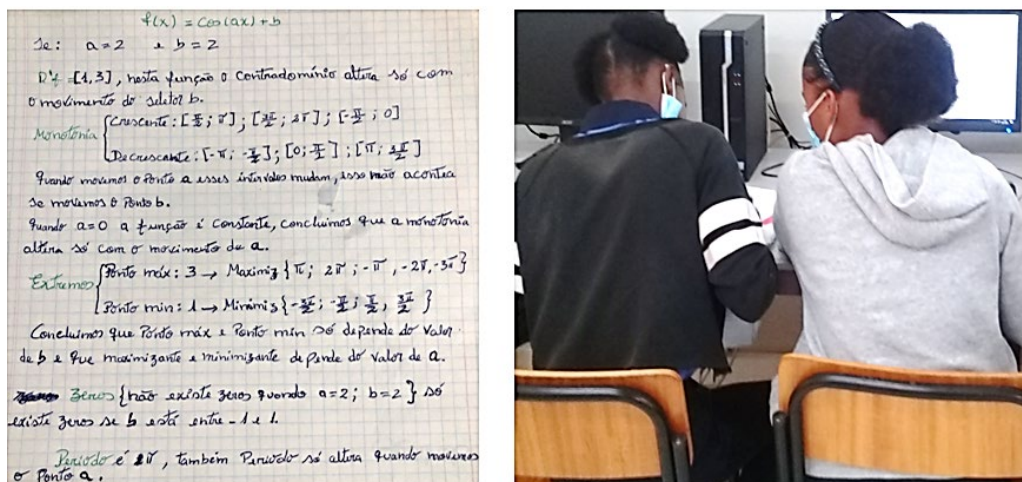


FIGURA 7: Resposta do grupo G5 á tarefa II questão c) e elementos do grupo G5 na resolução da tarefa II

FONTE: Câmara fotográfica do iPhone

Todos os grupos observaram e registaram que se movermos o seletor b o intervalo de contradomínio altera, mas que o intervalo se mantém com o movimento do seletor a, portanto, na discussão oral todos mostraram que aprenderam, que o contradomínio, o ponto máximo e o ponto mínimo nessas funções (seno e cosseno) só depende do coeficiente b. Também na análise da monotonia chegaram a conclusão que só depende do valor do coeficiente a, assim como os valores do domínio que correspondem ao ponto máximo e ao ponto mínimo e o período. Portanto nesta tarefa todos os grupos registaram as suas análises e conclusão e cinco grupos estabeleceram a relação, como ilustra a resposta do grupo G5 (Figura 7).

Na tarefa III, tinham que fazer o estudo da função tangente, na análise do gráfico, os grupos tiveram algumas dificuldades na interpretação dos extremos, da monotonia e do período, pois, a representação gráfica era diferente que a das funções anteriores, assim, os professores deram algumas orientações pedindo que verificassem esses conceitos e no final conseguiram responder as questões, mas a maioria dos grupos erraram a questão sobre o período e tentaram resolver analiticamente e dois grupos não responderam a questão sobre os extremos, no

entanto, pode se dizer que compreenderam a análise gráfica das função tangente e as características investigadas.

Todos os grupos acertaram as questões relativamente aos zeros, monotonia e contradomínio da função tangente. Abaixo, destacamos as respostas dos grupos relativamente a tarefa III.

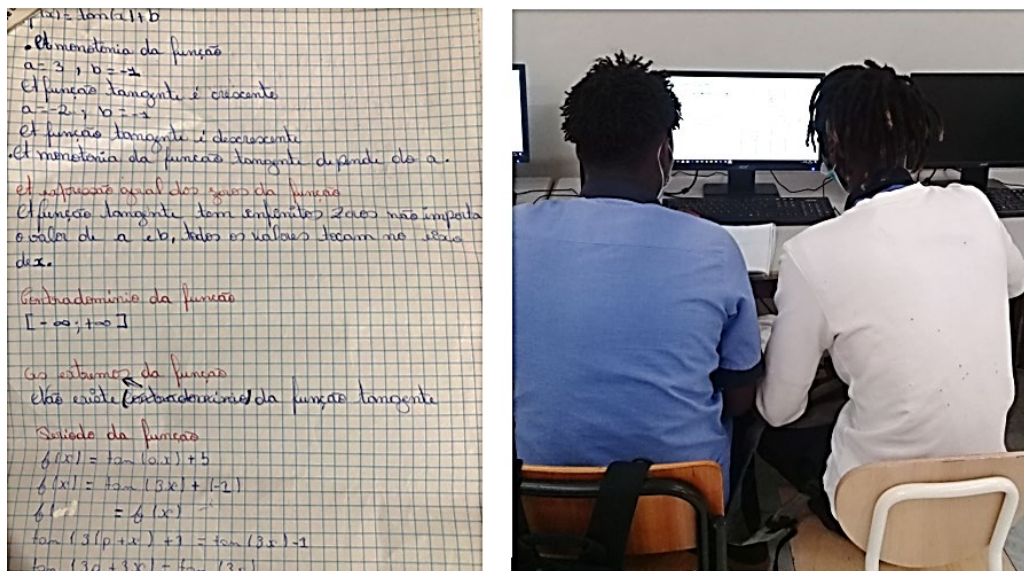


FIGURA 8: Resposta do grupo G9 á tarefa III e elementos do grupo G9 na resolução da tarefa III

FONTE: Câmara fotográfica do iPhone

Portanto, no final da realização das tarefas, tivemos um espaço de discussão e socialização dos trabalhos produzidos pelos alunos, possibilitando que as conjecturas que haviam sido feitas incorretamente por alguns grupos e ou incompletos por outros grupos sejam corrigidas, pois, constituiu-se num momento em que os alunos entraram em confronto com as suas estratégias, conjecturas e justificações, e os professores desempenhando o papel de moderadores. Também, possibilitou conjecturar que na análise das funções seno e cosseno, as variações do coeficiente a geram mudanças nos zeros e nos valores do domínio que correspondem ao ponto máximo e ao ponto mínimo, no período e na monotonia e as variações do coeficiente b geram mudanças na existência e/ou não dos zeros, no contradomínio e no ponto máximo e no ponto mínimo. Enquanto que na função tangente as variações do coeficiente b geram mudanças apenas nos zeros e as variações do coeficiente a geram mudanças nos zeros, no período e na monotonia.

Enquanto pesquisadores e professores, acreditamos que a atividade desenvolvida e a forma como as sequências da atividade foram elaboradas e a avaliação feita sobre as tarefas propostas nos mostraram que a inserção das

tecnologias nas aulas de Matemática, pode ser um importante recurso didático para a sala de aula.

Considerações Finais

O GeoGebra permite observar os efeitos da mudança de um determinado parâmetro no gráfico de uma função. Isso nos possibilita pensar de uma forma matematicamente diferente do que se estivéssemos trabalhando com uma construção estática ou apenas falando dela, sem nenhum recurso visual. Portanto acreditamos que, aprende-se de outras maneiras quando se interage com os recursos tecnológicos e conciliar as atividades de investigação a um software de Geometria Dinâmica foi um dos nossos objetivos, entendemos que foi um ponto positivo em nosso estudo, visto que, com atividades investigativas ligadas aos recursos tecnológicos, os alunos têm a possibilidade de formular conjecturas e usar processos e conhecimentos matemáticos que permitem tomar decisões sobre essas conjecturas que resistiram a sucessivos testes e todos esses processos foram facilitados pelo uso do GeoGebra, que permite a visualização de suas construções e modificações.

O uso do GeoGebra permite encorajar o processo de descoberta e de autoavaliação dos alunos, reservando momentos ao professor, através da verificação das produções, analisando como os alunos entenderam os procedimentos necessários para conjecturar sobre as características das funções.

Nesta investigação procurou-se analisar se o trabalho com o uso do GeoGebra facilita a aprendizagem de conceitos da trigonometria, através de uma atividade prática realizada, com foco nas características das funções seno, cosseno e tangente. A partir da análise gráfica.

Os resultados obtidos a partir das atividades desenvolvidas junto aos alunos, nos mostraram que o uso do GeoGebra trouxe uma contribuição significativa para a aprendizagem de diversos aspectos inerentes ao comportamento do gráfico das funções seno, cosseno e tangente através de manipulações de objeto. Contudo, pensamos que somente desenvolver as atividades no GeoGebra não seja suficiente. Também o momento de socialização e discussão das conjecturas levantadas pelos alunos potencializou a forma proposta para estudo das funções trigonométricas. Pois é o momento em que, os alunos puderam comparar os resultados obtidos e analisarem suas respostas, estratégias e justificações.

De realçar, também que merece destaque a funcionalidade dos registros feitos pelos alunos durante a realização das atividades. O registro trouxe a ligação da atividade no software ao conteúdo na linguagem Matemática para o aluno e, nessa investigação, foi um instrumento que possibilitou detectar como os alunos conseguiram estabelecer as relações entre a variação dos coeficientes e as

características através da observação e reflexão das regularidades, no entanto evidenciaram dificuldades na comunicação das suas ideias. Assim, julgamos ser importante que o professor solicite que os alunos façam registos durante a realização de atividades com o software GeoGebra, bem com outros softwares matemáticos.

A investigação realizada, permite-nos concluir que o uso do software GeoGebra juntamente com uma abordagem didática baseada na investigação matemática contribuiu significativamente para o desenvolvimento da aprendizagem dos conteúdos da trigonometria e propiciou que o aluno assuma um papel ativo no processo de construção do seu conhecimento, papel esse que julgamos ser fundamental para a aprendizagem.

Sobre algumas limitações que o professor pode enfrentar ao utilizar a TI em sala de aula, destacamos a dificuldade estrutural. Nem sempre há computadores suficientes nas escolas, ou em condições de uso. Para que possa haver alguma forma de trabalho organizado que incentive a aplicação de certas estratégias educacionais, os computadores devem existir em número compatível com a quantidade de alunos. No presente estudo, os alunos trabalhavam em duplas. Uma formação continua adequada dos professores também, é outro aspeto fundamental para que o uso dos recursos computacionais na educação matemática ocorra de modo adequado, pois, muitos professores continuam se esquivando das TIC ou ainda fazendo usos inadequados desses recursos.

Portanto, diante do resultado positivo do instrumento avaliativo, pode-se dizer que a aprendizagem foi significativa para este grupo de alunos, não apenas porque conseguiram resolver as tarefas propostas, mas porque conseguiram construir um conhecimento a partir da estratégia pedagógica da qual participaram, o que, por sua vez, servirá de base para novas conquistas cognitivas.

Referências

ANJOS, V. M.; MERCADO, L. P. L. Ensino de Matemática com Internet: A metodologia WebQuest no ensino de sólidos geométricos no 9º ano. disponível em: <<https://recursos.educoas.org/sites/default/files/VE16.506.pdf>>. Acesso em 10 de 06 de 2022.

BOGDAN, R. ; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação - uma introdução á teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora LDA, 1994.

BORBA, M. DE C.; PENTEADO , M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5ª ed. 2007.

DANTAS, A. S. O uso do GeoGebra no ensino de trigonometria: uma experiência com Alunos do Ensino Médio. **Revista Ciência e Natura**, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, p. 123– 142, 2015.

HOHENWARTER, M. *GeoGebra – Informações*. 2007. disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/85144/mod_resource/content/1/Introducao_ao_Geogebra.pdf>. Acesso em 01 de 08 de 2022.

JUCOSKI, A. L. **Construindo e (re)construindo conhecimentos de trigonometria com utilização de recursos tecnológicos em um curso pré-vestibular**. Lajeado: Universidade do Vale do Taquari - Univates, 2011.

LOPES, M. M. Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria usando o Software GeoGebra. **Revista Bolema, Rio Claro (SP)**, v. 27, n. 46, p. 631-644, 2013.

MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. ed. Campinas: Papirus, 2000.

NASCIMENTO, E. G. A. A Avaliação do uso do Software Geogebra no Ensino de Geometria. **Actas de La Conferencia Latino Americana de Geogebra de Uruguai**. ISSN 2301-0185, p. 125-132, 2012.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **De los principios a la Acción – para garantizar el éxito matemático para todos**. México: Association Drive, Reston, VA 20191-1502, 2015.

PEDROSO, L. W. **Uma Proposta da Trigonometria com uso do Software GeoGebra**. 2012, Dissertação de Mestrado

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. Lisboa. 2003. disponível em: <<http://hdl.handle.net/10451/4071>>. Acesso em 01 de 08 de 2022.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4ª edição. 2019.

SALAZAR, D. M. (2015). **GeoGebra e o Estudo das Funções Trigonométricas no Ensino médio**. 2015. Dissertação de Mestrado .

SANTOS, J. S.; HOMA, A. I. R. Tecnologia Digital para o Ensino da Trigonometria: Uma Proposta Desenvolvida como Oficinas para professores licenciados em matemática . **VI EIEMAT XV EGEM, 4º Encontro Nacional PIBID Matemática**. ISSN 2316-7785, 2018.

DE SOUSA, J. M. **Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis**. Dissertação de Mestrado. 2017.

VAZ, D. A. F.; DE JESUS, P. C. C. Uma sequência didática para o ensino da matemática com o software GeoGebra. **Revista estudos Goiânia**, v. 41, n.1, p. 59-75, 2014.