

MODELADO Y SIMULACION DE SISTEMAS CAOTICOS A TRAVES DE PENDULOS ACOPLADOS USANDO SIMMECHANICS DE SIMULINK

MODELING AND SIMULATION OF CHAOTIC SYSTEM THROUGH COUPLED PENDULUMS USING SIMMECHANICS SIMULINK

Sergio Velásquez, Ronny Velásquez

Centro de Investigación de las Redes Neuronales y la Robótica
CIRNAR-UNEXPO, Ciudad Guayana, Bolívar 8050 Venezuela.
svelasquez@unexpo.edu.ve

Recibido: Mayo 16 de 2014. Aceptado: Octubre 10 de 2014

RESUMEN

En este artículo se estudia el caso de un péndulo doble y uno triple, como ejemplos simples de un sistema físico que puede exhibir un comportamiento caótico. Se utiliza el formalismo de Lagrange para obtener las ecuaciones diferenciales de movimientos asociadas a los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 respectivamente, se determinan estas ecuaciones diferenciales que resultan ser ordinarias de segundo orden no lineales y acopladas, las que se resuelven numéricamente utilizando Matlab. Se desarrolla un Modelo en Simulink que permite representar el movimiento del sistema mediante una animación en el espacio real, con lo cual se logra analizar y describir directamente el comportamiento del sistema en términos de los parámetros relevantes que son las masas y las longitudes de los péndulos. Para cada caso investigado se presentan los gráficos que dan cuenta de cómo se comportan los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 en función del tiempo. Las Figuras que se presentan y que corresponden a las animaciones durante un tiempo de 40-80 segundos, muestran las trayectorias reales seguidas por cada uno de los péndulos, observándose que éstos últimos pueden realizar tanto movimientos rotatorios como oscilatorios, dando cuenta de esta forma de la complejidad del movimiento. También en estas Figuras se observa el evidente cambio que se produce en el comportamiento del sistema al cambiar los de las longitudes.

Palabras clave: Péndulo, LaGrange, Simulink, Caótico, SimMechanics

ABSTRACT

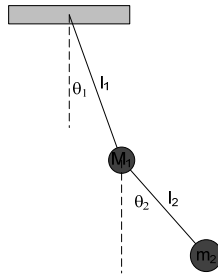
This article examines the case of a double and a triple pendulum, as simple examples of a physical system can exhibit chaotic behavior. Using the Lagrange formalism for differential equations of motion associated with the angles θ_1, θ_2 and θ_3 respectively, are determined that these differential equations are found to be second order ordinary nonlinear and coupled, which are solved numerically using Matlab. We develop a model in Simulink to represent the motion of the system using animation in real space, which is achieved by directly analyzing and describing the system behavior in terms of the relevant parameters are the masses and the lengths of the pendulums. For each case investigated are graphs that account for how they behave the angles θ_1, θ_2 and θ_3 function of time. The figures are presented, corresponding to the animations for a time of 40-80 seconds, showing the actual paths followed by each of the pendulums, noting that the latter can perform both rotary and oscillatory motions, accounting for this form of the complexity of the movement. Also in these figures show the obvious change that occurs in the system's behavior by changing the lengths.

Key words: Pendulum, LaGrange, Simulink, Chaotic, SimMechanics.

I. INTRODUCCION

Si se quiere estudiar un sistema físico es importante en principio conocer los elementos, variables, parámetros y posibles comportamientos que pueden derivarse de un determinado escenario o evento natural o inducido. En el caso del péndulo doble, este consta de dos masas m_1 y m_2 , la primera suspendida por un alambre rígido de longitud l_1 y masa despreciable y la segunda unida a la primera masa por un alambre rígido de longitud l_2 de masa despreciable como se muestra en la Figura 1. Todo el sistema se encuentra sometido al campo gravitatorio terrestre y normalmente este exhibe un comportamiento caótico que se traduce matemáticamente en dos EDOs de segundo orden, acopladas y altamente no lineales. Si bien son ciertas estas ecuaciones, poseen serias dificultades para la solución analítica (Lifshitz, 2009).

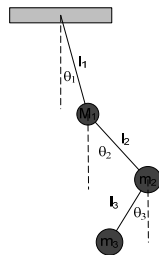
Es posible obtener una liberalización que permite aplicar la Transformada de Laplace para la solución analítica en escritorio o a través de un CAS simbólico como Maple o MATLAB



Péndulo Doble

La formulación parte de que el sistema oscila en un plano vertical y no existen fuerzas de amortiguamiento en el mismo. La Figura 1 muestra los ángulos θ_1 y θ_2 medidos en radianes desde sus respectivas verticales. Por su parte, la convención de signos establece que la dirección positiva de los ángulos ocurre cuando las masas se ubican a lado derecho de su vertical. El caso contrario supone una dirección negativa (Jaramillo Rojas, 2010).

De manera análoga se hace para el péndulo triple, como se muestra en la Figura 2.



Péndulo Triple

II. DESARROLLO

En este caso se estudia un sistema de dos osciladores acoplados, el péndulo doble. Como en “Dos osciladores acoplados” se resuelven las ecuaciones del movimiento, a calcular las frecuencias de los modos normales de oscilación, y las condiciones iniciales que hacen que el sistema describa un

modo normal de oscilación. El péndulo doble como se muestra en la Figura, está formado por dos péndulos simples de longitudes l_1 y l_2 , de los que cuelgan partículas de masas m_1 y m_2 . En un instante determinado t , los hilos inextensibles forman ángulos θ_1 y θ_2 con la vertical.

1 Doble péndulo

En general, un doble péndulo es un sistema compuesto por dos péndulos, con el segundo colgando del extremo del primero. En el caso más simple, se trata de dos péndulos simples, con el inferior colgando de la masa pendular del superior.

Normalmente se sobreentiende que nos referimos a un doble péndulo plano, con dos péndulos planos coplanarios. Este sistema físico posee dos grados de libertad y exhibe un rico comportamiento dinámico. Su movimiento está gobernado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas. Por encima de cierta energía, su movimiento es caótico (Canale, 2008).

2 Ecuaciones del movimiento

La energía del sistema es la suma de la energía potencial y de la energía cinética de las dos partículas. Se sitúa el nivel cero de energía potencial en el punto de suspensión del primer péndulo. La energía potencial es (Craig, 2006).

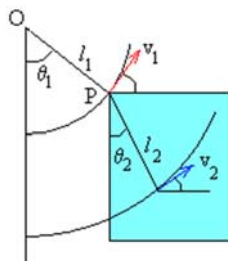
$$E_p = -m_1 \cdot g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

El módulo de la velocidad del primer péndulo es

$$v_1 = l_1 \cdot d\theta_1/dt$$

Velocidad angular por el radio de la circunferencia que describe, sus componentes son

$$V_1 = \left(l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_1 i + l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \operatorname{sen} \theta_1 j \right)$$



Velocidades en el péndulo

El módulo de la velocidad de la segunda partícula en un sistema de referencia que se mueve con la velocidad \mathbf{v}_1 de la primera partícula es $v_2 = l_2 \cdot d\theta_2/dt$. Sus componentes son

$$V_2 = \left(l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \cos \theta_2 i + l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \sin \theta_2 j \right)$$

La velocidad de la segunda partícula respecto al sistema de referencia inercial situado en O es la suma vectorial de ambas velocidades

$$V_1 + V_2 = \left(l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \cos \theta_2 + l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_1 \right) i +$$

$$\left(l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \sin \theta_2 + l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \sin \theta_1 \right) j$$

Calculamos los módulos de las velocidades de las dos partículas. La energía cinética del sistema es

$$E_x \approx \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 +$$

$$m_2 l_1 l_2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right) \cos (\theta_1 - \theta_2)$$

Si nos restringimos a pequeños valores de los ángulos θ_1 y θ_2 , las ecuaciones del movimiento se hacen mucho más simples.

Desarrollamos en serie de Taylor $\cos \theta$ y tomamos los dos primeros términos no nulos del desarrollo en serie

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2$$

La energía potencial con esta aproximación, se expresa

$$E_p$$

$$\approx -(m_1$$

$$+ m_2) g l_1 \left(1 - \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) - m_2 g l_2 \left(1 - \frac{1}{2} \theta_2^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl_2\theta_2^2 + ctte$$

Las ecuaciones del movimiento de Lagrange nos llevan al sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden. La lagrangiana $L = E_k - E_p$ con el símbolo

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$L = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \\ m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\theta_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl_2\theta_2^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

Las ecuaciones del movimiento son

$$(m_1 + m_2)l_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + (m_1 + m_2)g\theta_1 + m_2l_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} \\ = 0$$

$$l_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + g\theta_2 + l_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = 0$$

Calculamos las derivadas segundas respecto del tiempo de estas dos ecuaciones diferenciales

$$(m_1 + m_2) \left(l_1 \frac{d^4\theta_1}{dt^4} + g \frac{d^2\theta_1}{dt^2} \right) + m_2l_2 \frac{d^4\theta_2}{dt^4} \\ = 0$$

$$l_2 \frac{d^4\theta_2}{dt^4} + g \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + l_1 \frac{d^4\theta_1}{dt^4} = 0$$

Entre estas cuatro ecuaciones, eliminamos θ_2 , obteniendo la ecuación diferencial de cuarto orden en θ_1 .

$$\left(m_1 l_1 \frac{d^4 \theta_1}{dt^4}\right) + (m_1 + m_2)g \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \left(\frac{d^2 \theta_1}{dt^2}\right) + \frac{(m_1 + m_2)}{l_2} g^2 \theta_1 = 0$$

Suponiendo una solución de la forma

$$\theta_1 = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \text{ o bien, } \theta_1 = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Calculamos la derivada segunda y la derivada cuarta de θ_1 y las introducimos en la ecuación diferencial de cuarto orden, obteniendo la siguiente ecuación bicuadrada en ω . (R. L. Burden, 2007) (Barrientos, Peñin, & Aracil, 2007)

$$m_1 l_1 \omega^4 - (m_1 + m_2)g \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \omega^2 + \frac{(m_1 + m_2)}{l_2} g^2 = 0$$

Las dos raíces reales de esta ecuación son las frecuencias ω_1 y ω_2 de los modos normales de vibración

$$\omega_1^2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{2m_1 l_1} \left\{ \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \frac{l_1}{l_2}} \right\}$$

$$\omega_2^2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{2m_1 l_1} \left\{ \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \frac{l_1}{l_2}} \right\}$$

La forma general del ángulo θ_1 en función del tiempo t es una combinación de los dos modos normales de vibración (Cullen, 2009) (Giancolli, 1997)

$$\theta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t) + C_1 \sin(\omega_2 t) + D_1 \cos(\omega_2 t)$$

Lo mismo para θ_2

$$\theta_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t) + B_2 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_2 t) + D_2 \cos(\omega_2 t)$$

Las velocidades angulares son

$$\frac{d\theta_1}{dt} = A_1\omega_1\cos(\omega_1t) - B_1\omega_1\sin(\omega_1t) \\ + C_1\omega_2\cos(\omega_2t) - D_1\omega_2\sin(\omega_2t)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = A_2\omega_1\cos(\omega_1t) - B_2\omega_1\sin(\omega_1t) \\ + C_2\omega_2\cos(\omega_2t) - D_2\omega_2\sin(\omega_2t)$$

Si Relacionamos los coeficientes A_1 y A_2 , B_1 y B_2 , C_1 y C_2 , D_1 y D_2 , calculando la derivada segunda de θ_2 , la derivada segunda de θ_1 e introduciéndolos en una de las dos ecuaciones diferenciales del movimiento (Deveney, 2007)

$$l_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + g\theta_2 + l_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = 0$$

Tenemos cuatro relaciones

$$\begin{aligned} (-\omega_1^2 l_2)A_2 - \omega_1^2 A_1 &= 0 \\ (-\omega_1^2 l_2)B_2 - \omega_1^2 B_1 &= 0 \\ (-\omega_1^2 l_2)C_2 - \omega_1^2 C_1 &= 0 \\ (-\omega_1^2 l_2)D_2 - \omega_1^2 D_1 &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales determinan los valores de los cuatro coeficientes A_1 , B_1 , C_1 y D_1 y por tanto, de los coeficientes A_2 , B_2 , C_2 y D_2 , a través de las relaciones establecidas anteriormente.

Desplazamos el primer péndulo un ángulo θ_{10} con respecto a la vertical, y el segundo péndulo un ángulo θ_{20} a continuación los soltamos, siendo 10 y 20 valores al azar no influyentes para la resolución del experimento. La velocidad inicial es para cada ángulo $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$, $\frac{d\theta_2}{dt} = 0$ en el instante $t=0$.

Tenemos que resolver el sistema de cuatro ecuaciones junto a las relaciones establecidas anteriormente.

$$\begin{aligned} \theta_{10} &= B_1 + D_1 \\ \omega_1 A_1 + \omega_2 C_1 &= 0 \\ \theta_{20} &= B_2 + D_2 \\ \omega_1 A_2 + \omega_2 C_2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $A_1 = C_1 = A_2 = C_2 = 0$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\omega_1^2(\omega_2^2 l_1 \theta_{10} + \omega_2^2 l_2 \theta_{20} - g\theta_{20})}{g(\omega_2^2 - \omega_1^2)} & B_1 &= \left(\frac{-\omega_1^2 l_2 + g}{\omega_1^2 l_1} \right) B_2 \\ D_2 &= \frac{\omega_2^2(-\omega_1^2 l_1 \theta_{10} - \omega_1^2 l_2 \theta_{20} - g\theta_{20})}{g(\omega_2^2 - \omega_1^2)} & D_1 &= \left(\frac{-\omega_2^2 l_2 + g}{\omega_2^2 l_1} \right) D_2 \end{aligned}$$

La posición angular en función del tiempo t de cada una de las partículas es

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= B_1 \cos(\omega_1 t) + D_1 \cos(\omega_2 t) \\ \theta_2(t) &= B_2 \cos(\omega_1 t) + D_2 \cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

3 Modos normales de vibración

El modo 1 de frecuencia angular ω_1 , se obtiene cuando $D_2=0$, la relación entre los ángulos iniciales de desviación de los dos péndulos es (Gregory L. Baker, 1999)

$$\begin{aligned}\theta_{10} &= \frac{g(-\omega_1^2)l_2}{\omega_1^2 l_1} \theta_{20} \\ B_1 &= \theta_{10}, \quad B_2 = \theta_{20}\end{aligned}$$

La posición angular en función del tiempo t de cada una de las partículas es

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \theta_{10} \cos(\omega_1 t) \\ \theta_2(t) &= \theta_{10} \cos(\omega_1 t)\end{aligned}$$

El modo 2 de frecuencia angular ω_2 , se obtiene cuando $B_2=0$, la relación entre los ángulos iniciales de desviación de los dos péndulos es

$$\begin{aligned}\theta_{10} &= \frac{g(-\omega_2^2)l_2}{\omega_2^2 l_1} \theta_{20} \\ D_2 &= \theta_{20}, \text{ y } D_1 = \theta_{10}\end{aligned}$$

La posición angular en función del tiempo t de cada una de las partículas es

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \theta_{10} \cos(\omega_2 t) \\ \theta_2(t) &= \theta_{10} \cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

4 Cuando los péndulos son iguales

Cuando $m_1=m_2$ y $l_1=l_2$ las frecuencias ω_1 y ω_2 de los modos normales de vibración tienen una expresión mucho más simple

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2}) \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{l} (2 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

Los coeficientes B_2 , B_1 , D_2 y D_1 valen

$$B_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}((2+\sqrt{2})(\theta_{10} + \theta_{20}) - \theta_{20}) \quad B_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)B_2$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(-(2-\sqrt{2})(\theta_{10} + \theta_{20}) - \theta_{20}) \quad D_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)D_2$$

Es importante analizar el caso de que $\theta_{20}=0$. Se desplaza el primer péndulo un ángulo θ_{10} respecto de la vertical y se suelta (Gregory L. Baker, 1999)

$$B_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\theta_{10} \quad B_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\theta_{10}$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\theta_{10} \quad D_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\theta_{10}$$

Las ecuaciones del movimiento de cada uno de las partículas se escriben

$$\theta_1(t) = \frac{1}{2}\theta_{10}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

$$= \theta_{10} \left(\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \right)$$

$$\theta_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\theta_{10}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t))$$

$$= \sqrt{2}\theta_{10} \left(\text{sen}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \text{sen}\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \right)$$

El modo 1 de frecuencia angular ω_1 , se obtiene cuando $D_2=0$, la relación entre los ángulos iniciales de desviación de los dos péndulos es

$$\theta_{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}\theta_{20}$$

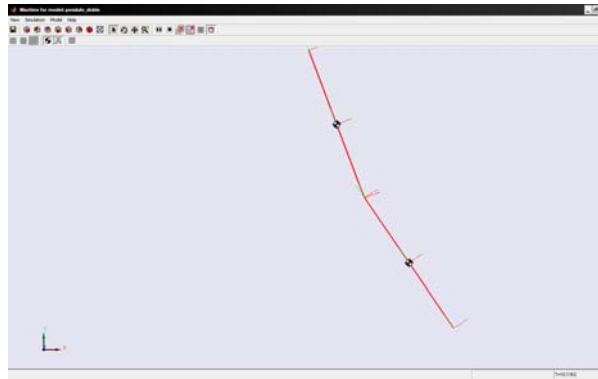
$$B_2 = \theta_{20}, \text{ y } B_1 = \theta_{10}$$

La posición angular en función del tiempo t de cada una de las partículas es

$$\theta_1(t) = \theta_{10}\cos(\omega_1 t)$$

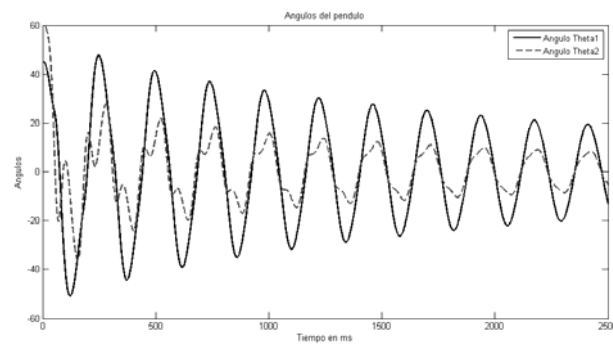
$$\theta_2(t) = \theta_{20}\cos(\omega_1 t)$$

El modo 2 de frecuencia angular ω_2 , se obtiene cuando $B_2=0$, la relación entre los ángulos iniciales de desviación de los dos péndulos es (Ogata, 2003)



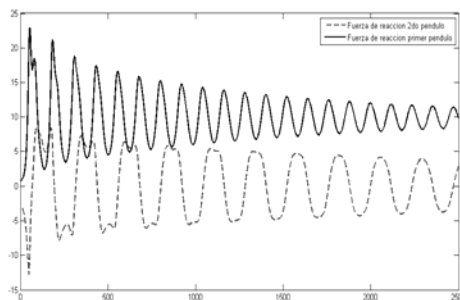
Péndulo doble usando SimMechanics de Simulink

Podemos observar la línea punteada la simulación del Angulo θ_2 , y en la línea sólida el Angulo θ_1 (Sergio Velasquez, 2014), se nota que en la simulación las curvas se asocian a las ecuaciones correspondientes al ángulo (la amortiguación es de 0.2), como se puede observar en la Figura 6.



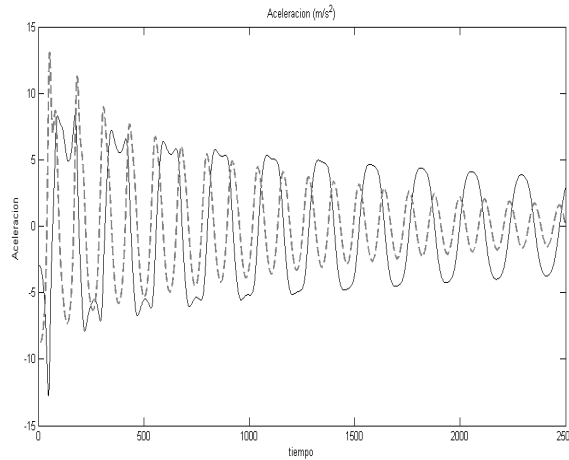
Ángulos péndulo doble Simulink

Además se simuló y monitoreo la fuerza de reacción para cada masa como se muestra en la Figura 7 (la amortiguación es de 0.2)



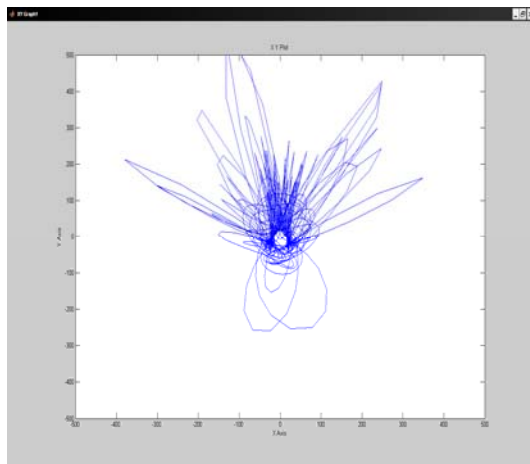
Fuerza de reacción péndulo doble Simulink

Y también las aceleraciones de cada masa estas describen correctamente las formas de sus ecuaciones como observamos en la Figura 8 (la amortiguación es de 0.2)



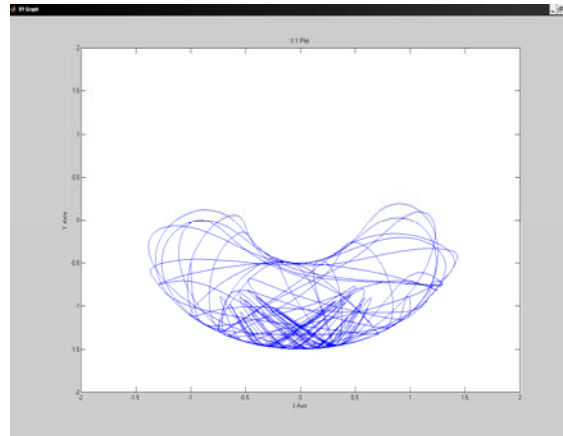
Aceleración de las masas péndulo doble Simulink

Ahora bien para una amortiguación de 0.015 en un péndulo de $l_1=l_2$ y de masas iguales. las componentes de Fr en x vs La componente Fr en y describe en la Figura 9



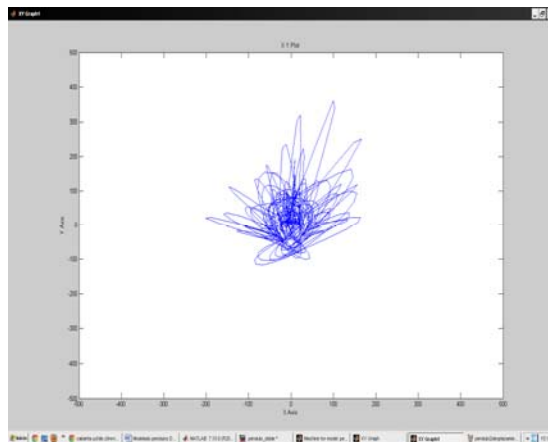
Fuerza de reacción componente X vs Componente Y

En tanto para las mismas condiciones antes descritas el desplazamiento en X e Y del mismo péndulo es el siguiente Figura 10.



Desplazamiento X vs Y en péndulo doble Simulink

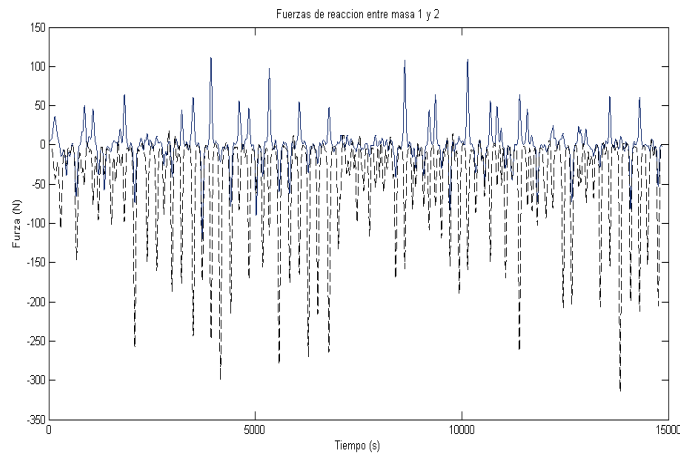
Ahora bien para una amortiguación de 0.015 en un péndulo de $l_1=2l_2$ las componentes de Fr en x vs La componente Fr en y describe en la Figura 11.



Fuerza de reacción componente X vs Componente Y

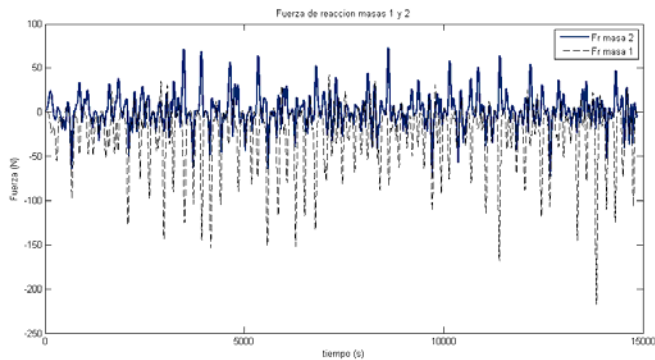
En tanto para las mismas condiciones antes descritas el desplazamiento en X e Y del mismo péndulo es el siguiente.

Para el péndulo anterior la proporción de las fuerzas de reacción entre masas 1 y 2 se muestra a continuación se puede observar lo contrario de las fuerzas de reacción (en modulo) en la Figura 16.



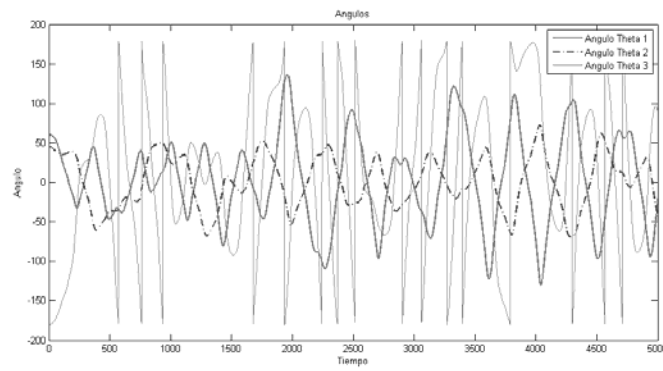
Fuerza de reacción del péndulo triple entre masa 1 y masa 2

De igual manera se muestra el resultado de la simulación de las fuerzas de reacción entre las masas 2 y 3 en la Figura 17.



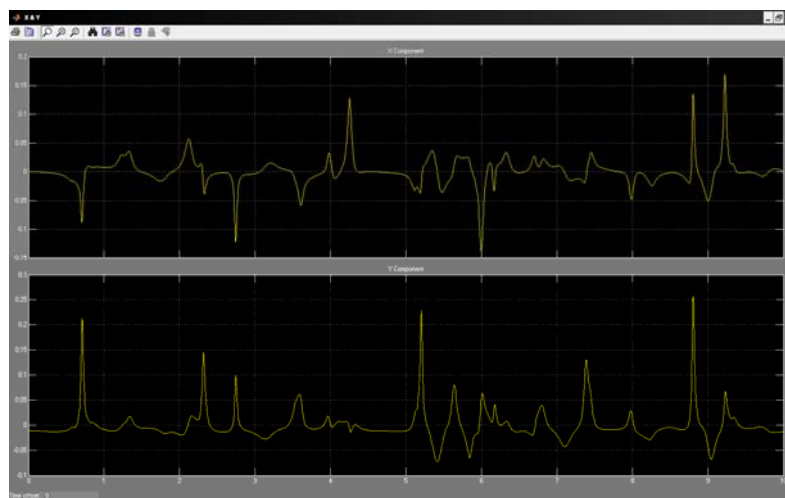
Fuerza de reacción del péndulo triple entre masa 2 y masa 3

De igual manera se muestra la variación de los ángulos del péndulo triple, en línea sólida el ángulo θ_1 , en línea punteada y un poco más oscuro el ángulo θ_2 , el con mayor variación el ángulo θ_3 , todos presentan un movimiento caótico, pero con tendencia armónica.



Ángulos del péndulo triple.

A continuación se muestra las componentes de aceleración para u péndulo triple de características de proporción $l_1=l_2=2l_3$ y de masas iguales.



Componente x e y de aceleración del péndulo triple

A continuación se muestra el grafico de desplazamiento para el péndulo triple de dimensiones $l_1=2l_2=4l_3$ y de masas iguales.

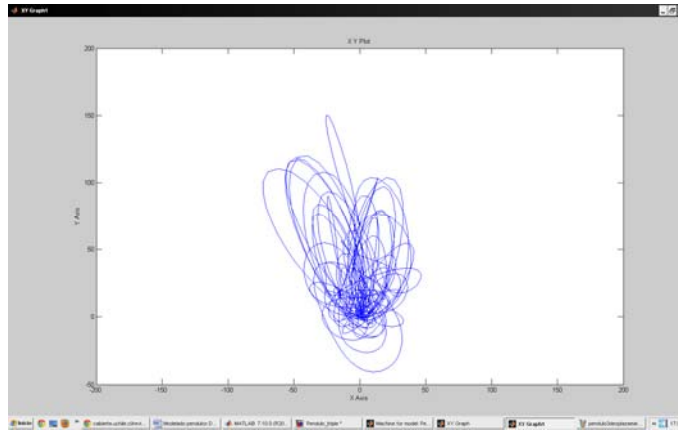


Gráfico de Posición componente de X vs Y en el péndulo triple

IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha descrito de una manera sencilla posible el modelado y simulación del comportamiento de un sistema caótico simple; como lo son los péndulos dobles y triples, detallando las gráficas que se han considerado más importantes y más relevantes para representar el péndulo caótico, a través de la herramienta Simulink de Matlab.

En cuanto a los resultados obtenidos tras analizar el sistema del péndulo caótico en modelo desarrollado podemos observar que: Mediante la implementación del modelo se ha realizado una interfaz gráfica para simular la dinámica de un sistema físico. Se seleccionó como modelo el péndulo caótico debido a que es un sistema que resulta muy familiar e intuitivo para cualquier tipo de usuario interesado.

Mediante dicho modelo hemos representado el espacio de las fases del péndulo caótico, ya que desde un punto de vista geométrico nos proporciona mucha información cualitativa sobre la dinámica del mismo (circunferencias si la energía se conserva, espirales si la disipación es alta, etc). De igual forma se representó gráficos que nos indica de forma cualitativa si el péndulo se mueve de forma periódica o caótica (dependiendo del gráfico obtenido en la misma).

Finalmente se han acoplado dos y tres péndulos (este acoplamiento puede imaginarse mediante un muelle que une a ambos) y hemos representado las dinámicas descritas en las conclusiones anteriores para ambos péndulos, corroborando de manera práctica las ecuaciones matemáticas desarrolladas.

V. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Barrientos, A., Peñin, L., & Aracil, R. (2007). *Fundamentos de Robotica*. Madrid: McGraw.
- Canale, S. C. (2008). *Métodos Numéricos para ingenieros*. México: McGraw-Hill.
- Craig, J. J. (2006). *Introducción a la Robótica*. México: Pearson.
- Cullen, D. G. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera*. México:

- Thomson,.
- Deveney, R. (2007). *Chaotic Dynamical Systems*.
- Giancolli, D. C. (1997). *"FISICA, Principios con Aplicaciones"*. Mexico: Prentice-Hall.
- Gregory L. Baker, J. P. (1999). *Chaotic Dynamics: an introduction*. Cambridge University.
- Hunt, B. R., Lipsman, R. L., & Rosenberg, J. M. (2001). *A Guide to MATLAB for Beginners and Experienced Users*. New York: Cambridge University Press.
- Jaramillo Rojas, D. A. (2010). *Modelo Simulación y Control de un Brazo Robotico Mediante Matlab y Simulink para Soldadura de Arco*. Quito.
- Lifshitz, L. y. (2009). *Mecanica*.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de Control Moderna*. Mexico: Prentice Hall.
- Penney, C. H. (2009). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera Cómputo y Modelado*. México: Pearson Education.
- R. L. Burden, J. D. (2007). *Análisis numérico*. Iberoamérica.
- Sergio Velasquez, R. V. (2014). *Fundamentos de Analisis Numérico*. Guayana: Autores y Editores.