Conciencia Tecnológica
ISSN: 1405-5597
contec@mail.ita.mx
Instituto Tecnológico de Aguascalientes
México

Programación Lineal Aplicada a los Deportes

Escamilla-López, Miguel; Tejeda-Castrejón, Jesús Francisco; Flores-Castañeda, Manuel Jossué; Mejías-Brito, Johann; Macedo-Velázquez, Axel R.; Ochoa-Suárez, Mónica M.
Programación Lineal Aplicada a los Deportes
Conciencia Tecnológica, núm. 63, 2022
Instituto Tecnológico de Aguascalientes, México
Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=94472192005

Artículos

Programación Lineal Aplicada a los Deportes

Linnear Programming Applied to Sports

Miguel Escamilla-López [1]
Instituto Tecnológico de Colima, México
miguel.escamilla@itcolima.edu.mx

Jesús Francisco Tejeda-Castrejón [2]
Instituto Tecnológico de Colima, México

Manuel Jossué Flores-Castañeda [3]
Instituto Tecnológico de Colima, México

Johann Mejías-Brito [4]
Instituto Tecnológico de Colima, México

Axel R. Macedo-Velázquez * [5]
Instituto Tecnológico de Colima, México

Mónica M. Ochoa-Suárez * [6]
Instituto Tecnológico de Colima, México

Redalyc: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=94472192005

Recepción: 01 Abril 2022
Aprobación: 24 Junio 2022

Resumen:

En el presente trabajo, se aplica la investigación de operaciones (IO) al área deportiva; específicamente se diseñó un modelo de programación lineal (PL), para asignar *n* ampáyeres a *m* juegos de béisbol con el objetivo de minimizar el costo total de transporte

Notas de autor

1 Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Colima, Departamento de Ingeniería Industrial Avenida Tecnológico No.1, C.P. 28976 Villa de Álvarez, Colima, México. Tel/Fax (312) 3129920 y 3126393 Ext. 244

2 Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Colima, Departamento de Ingeniería Industrial Avenida Tecnológico No.1, C.P. 28976 Villa de Álvarez, Colima, México. Tel/Fax (312) 3129920 y 3126393 Ext. 244

3 Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Colima, Departamento de Ingeniería Industrial Avenida Tecnológico No.1, C.P. 28976 Villa de Álvarez, Colima, México. Tel/Fax (312) 3129920 y 3126393 Ext. 244

4 Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Colima, Departamento de Ingeniería Industrial Avenida Tecnológico No.1, C.P. 28976 Villa de Álvarez, Colima, México. Tel/Fax (312) 3129920 y 3126393 Ext. 244

5 Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Colima, Departamento de Ingeniería Industrial Avenida Tecnológico No.1, C.P. 28976 Villa de Álvarez, Colima, México. Tel/Fax (312) 3129920 y 3126393 Ext. 244

6 Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Colima, Departamento de Ingeniería Industrial Avenida Tecnológico No.1, C.P. 28976 Villa de Álvarez, Colima, México. Tel/Fax (312) 3129920 y 3126393 Ext. 244

Declaración de intereses

* Estudiantes del noveno semestre de la carrera de Ingeniería Industrial.

* Estudiantes del noveno semestre de la carrera de Ingeniería Industrial.

desde los lugares de residencia de los ampáyeres, hasta las ciudades sede de los juegos donde fueron asignados. Los resultados muestran que el modelo de PL diseñado funciona eficientemente al probarlo de manera hipotética, obteniendo una asignación viable y minimizando los costos de transporte. También se observó que el modelo es de carácter genérico; es decir, puede funcionar para asignar grupos de personas que residen en diferentes lugares a diferentes eventos que se desarrollarán también en diferentes lugares; casos como la asignación de ternas arbitrales o visores en todas las diferentes ramas del deporte.

Palabras clave: Investigación de operaciones (IO), programación lineal (PL), modelo matemático, variables de decisión, restricciones.

Abstract:

In the present work, operations research (OR) is applied to the sports area; Specifically, a linear programming (LP) model was designed to assign n umpires to m baseball games with the aim of minimizing the total cost of transportation from the places of residence of the umpires to the host cities of the games where they were assigned.

The results show that the designed LP model works efficiently when tested hypothetically, arriving at a viable allocation and minimizing transportation costs. It was also noted that the model is generic in nature; that is, it can work to assign groups of people residing in different places to different events that will also take place in different places; cases such as the assignment of referees or visors in all the different branches of sport.

Keywords: Operations Research (OR), Linear Programming (LP), Mathematical Model, Decision Variables, Constraints.

Introducción

La IO es la aplicación del método científico por grupos interdisciplinarios a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombre-máquina), con el fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a sus objetivos, los cuales tienen que ver con la eficiencia y la efectividad con que los diferentes componentes de la organización o sistema pueden controlarse y/o modificarse. En otras palabras, la IO es un método que permite encontrar las relaciones óptimas que mejor operen un sistema, dado un objetivo específico.

Más específicamente, la IO es la aplicación del método científico a través de modelos matemáticos; primero para representar al problema real que se desea resolver en un sistema mediante un modelo matemático y segundo para utilizar herramientas y técnicas para resolverlo. En el primer paso la PL tiene una fuerte aplicación, mientras que en el segundo paso el método Simplex es una de las herramientas más utilizadas para encontrar la solución.

Una peculiaridad de la IO, es que en general las soluciones a los problemas no se obtienen en formas cerradas; es decir, parecidas a fórmulas. En lugar de ello se determinan mediante algoritmos; un algoritmo proporciona reglas fijas de cómputo que se aplican en forma repetitiva al problema y cada repetición (llamada iteración), obtiene una solución cada vez más cercana a la óptima. Como los cálculos asociados con cada iteración suelen ser tediosos y voluminosos, es necesario ejecutar esos algoritmos en una computadora. Sin embargo, algunos modelos matemáticos de IO pueden ser tan complicados que es imposible resolverlos con cualesquiera de los algoritmos disponibles de optimización; en esos casos se podrá necesitar abandonar la búsqueda de la solución óptima, para solo buscar una solución buena usando heurísticas o reglas simples [1].

Actualmente la IO a través de la PL, tiene una amplia gama de aplicaciones en los sectores público y privado, en áreas como administración, manufactura, logística, finanzas, agricultura y ganadería, entre otras. El área de los deportes no escapa a los beneficios de la IO; aquí también es posible plantear y solucionar problemas mediante esta. En el presente trabajo se aborda la aplicación de la IO y específicamente de la PL, a un evento de administración deportiva, donde se busca la mejor asignación de n ampáyeres a m juegos de béisbol, con el objetivo de reducir al mínimo el costo total de transporte de los ampáyeres asignados a los m juegos.

Fundamentos Teóricos

Los inicios de lo que hoy se conoce como IO, se remontan al año 1759 cuando el economista Quesnay empieza a utilizar modelos primitivos de programación matemática, más tarde en 1874 otro economista de apellido Walras hace uso de técnicas similares. Los modelos lineales de la IO tienen como precursores a Jordan en 1873, Minkowsky en 1896 y a Farkas en 1903. Los modelos dinámicos probabilísticos tienen su origen con Markov a fines del siglo XIX. El desarrollo de los modelos de inventarios, así como el de tiempos y movimientos se lleva a cabo en la década de 1920. Los modelos de líneas de espera se originan con los estudios de Erlang a principios del siglo XX. Los problemas de asignación se estudian con métodos matemáticos por los húngaros Konig y Egervary durante la segunda y tercera décadas de este mismo siglo. Los problemas de distribución se estudian por el ruso Kantorovich en 1939. Von Neumann cimienta en 1937 lo que años más tarde culminara como la Teoría de Juegos y la Teoría de Preferencias (esta última desarrollada en conjunto con Morgenstern) [2].

Los modelos matemáticos de IO que utilizaron estos precursores estaban basados en el cálculo diferencial e integral (Newton, Lagrange, Laplace, Lebesgue, Leibnitz, Reimman, Stieltjes, por mencionar algunos), así como en la probabilidad y la estadística (Bernoulli, Poisson, Gauss, Bayes, Gosset, Snedecor, entre otros). Fue hasta la segunda guerra mundial, cuando la IO empezó a tomar auge; primero se le utilizó en la logística estratégica para vencer al enemigo (Teoría de Juegos) y más tarde al finalizar la guerra, en la logística de distribución de todos los recursos militares de los aliados dispersos por todo el mundo. Debido precisamente a este problema, que la fuerza aérea norteamericana a través de su centro de investigación Rand Corporation, comisionó a un grupo de matemáticos para que resolviera este problema que estaba consumiendo muchos recursos humanos, financieros y materiales [2].

La IO ofrece a los gerentes herramientas cuantitativas para la toma de decisiones que resuelven los problemas diarios de un negocio o sirven para tomar decisiones en la planeación a corto o largo plazo, sea el negocio de carácter gubernamental, de producción, de servicios, gremial o cooperativo. En la IO se aplican los siguientes seis pasos metodológicos científicos a saber [3]:

1. Análisis y definición del problema.
2. Desarrollo del modelo.
3. Selección de datos de entrada.
4. Obtención de una solución.
5. Limitaciones del modelo y la solución.
6. Utilización del modelo.

Entre las técnicas de IO más utilizadas se encuentra la PL; su popularidad se debe a que la formulación de los modelos matemáticos de PL es en cierta forma sencilla. La PL utiliza un modelo matemático para describir el problema; el adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales y la palabra programación no se refiere aquí a términos computacionales; en esencia, es sinónimo de planeación y por lo tanto, la PL involucra la planeación de actividades para obtener un resultado óptimo; esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (de acuerdo con el modelo matemático), entre todas las alternativas factibles [4].

La PL es la forma mediante la cual se representan matemáticamente problemas de planeación y control que surgen de sistemas organizados a través de funciones lineales, con el fin de encontrar una solución óptima de asignación de recursos; problemas en los cuales:

Es posible definir un objetivo como una función lineal.
Existan restricciones para las variables de decisión.
La relación entre las variables de cada restricción es una función lineal.

Si se cumplen estas tres condiciones, la PL es una herramienta muy útil y valiosa para resolver todo tipo de problemas [5].

La PL se aplica a modelos de optimización en los que la función objetivo y las restricciones son estrictamente lineales; la linealidad implica que la PL deba satisfacer dos propiedades: proporcionalidad y aditividad. La proporcionalidad requiere que la contribución de cada variable de decisión en la función objetivo y sus requerimientos en las restricciones, sea directamente proporcional al valor de la variable. La aditividad estipula que la contribución total de todas las variables en la función objetivo y sus requerimientos en las restricciones, sean la suma directa de las contribuciones o requerimientos individuales de cada variable [6].

Un modelo matemático de PL en su forma más simple está constituido por un conjunto de constantes y variables asociadas o agrupadas por operadores algebraicos, de tal forma que a través de una expresión algebraica se representa un fenómeno empírico; los tres elementos básicos de un modelo son [7]:

Variables de decisión y parámetros. Las primeras se consideran las incógnitas que deben ser determinadas en la solución del modelo; los segundos son los datos conocidos.

Función objetivo. Establece el criterio básico en función del cual debe obtenerse la solución del modelo, que es simplemente de Maximización o Minimización.

Restricciones

Limitaciones bajo las que se deducirá la solución del modelo, que están asociadas a los recursos disponibles.

La forma estándar para representar matemáticamente un problema de PL, es con las ecuaciones 1-5 que se muestran [8]:

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + C_nX_n \tag{1}$$

Sujeta a las restricciones:

$$A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + \ldots\ldots\ldots + A_{1,n}X_n \leq 0 \tag{2}$$

$$\begin{array}{c} A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + \ldots\ldots\ldots + A_{2,n}X_n \leq 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array} \tag{3}$$

$$A_{m,1}X_1 + A_{m,2}X_2 + \ldots\ldots\ldots + A_{m,n}X_n \leq 0 \tag{4}$$

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0, \ldots\ldots X_3 \geq 0 \tag{5}$$

El método más popular para encontrar la solución a problemas planteados mediante la PL, es el método Simplex, que fue desarrollado en 1947 por el Dr. George Bernard Dantzig para la fácil y rápida solución a problemas de PL; el Dr. Dantzig desarrolló el método Simplex resumiendo trabajos de muchos de sus precursores. Con el avance de las computadoras digitales, la PL se extendió en varias ramas como la programación dinámica, programación entera y programación por metas, ente otras.

Aunque no existe mucha información al respecto, el área deportiva no escapa a la PL, ya que aquí también existen problemas lineales de logística, asignación y costos en su administración, que pueden plantarse y resolverse a través de la PL; se sabe que en los Estados Unidos por ejemplo, algunas ligas deportivas utilizan la PL sobre todo para reducir costos. En Lima Perú, Marmolejo desarrolló un modelo de PL para realizar mejoras en la asignación de ternas de árbitros para la disminución de costos, una mejor distribución de los ingresos, cantidad de partidos, coincidencias por equipo y además presenta una matriz de asignaciones propuestas en donde se demuestra el cumplimiento de diferentes restricciones [9].

En Bogotá Colombia, Cárdenas, Castiblanco, Carrillo e Higuera, aplicaron la PL en su modalidad entera en la programación de juegos de un torneo de futbol, para determinar el lugar y la fecha en la que se llevará a cabo cada partido que compone el torneo, buscando minimizar los costos en que incurre la Unión de Universidades Bogotanas al organizar un campeonato de futbol previo al mundial, teniendo en cuenta una serie de requerimientos específicos [10].

En Chile, Oliveros aplicando PL desarrolló una propuesta a un problema real que presenta un servicio público del área deportiva y que consiste en determinar el número de supervisores deportivos que debe contratar, como también, asignar las respectivas zonas de trabajo de cada supervisor definiendo, rutas de manera equitativa y balanceada controlando así el correcto uso de los recursos públicos, como también de la ejecución técnico – metodológica de las actividades deportivas que ofrecen y que se ejecutan [11].

En Argentina, Bonomo, Durán y Marenco, presentaron un modelo de PL para tener un equipo de futbol más robusto para un juego, teniendo en cuenta las actuaciones de los jugadores en torneos anteriores y en el mismo torneo, más ciertas características de las fechas a disputarse, así como dos modelos descriptivos para conocer cuál hubiera sido el equipo óptimo a lo largo del torneo una vez conocidos los resultados; estos modelos descriptivos consiguen mostrar el equipo ideal que se debió haber armado fecha a fecha, a lo largo de todo el torneo, con el fin de obtener el mayor puntaje posible, cumpliendo con las restricciones del juego [12].

En Cataluña España, Bautista, Mateo y De la Torre, presentaron un modelo de PL Entera Mixta para optimizar la asignación de voluntarios a los puestos de trabajo que requiere una organización destinada a dirigir, coordinar y controlar las actividades de un evento deportivo de gran dimensión. El modelo tiene en cuenta el conjunto de voluntarios y sus características, así como el conjunto de tareas y sedes propias de un Evento y tiene el objetivo de maximizar la aptitud global del voluntariado a las tareas y a los encuentros o sedes. La explotación del modelo se realizó con el solucionador CPLEX y emplearon un caso de estudio vinculado a la XVII copa mundial de baloncesto FIBA que tuvo lugar en España en el año 2014. El método de resolución que proponen es capaz de resolver instancias con 15,000 voluntarios, 27 tipos de tareas y 6 sedes deportivas, en un tiempo de CPU inferior a 3 segundos [13].

En Tegucigalpa, Honduras, Rivera, Sansur, Pavón, García y Girón, analizaron el calendario actual y observaron una serie de desventajas que buscaron mejorar mediante el diseño un modelo de PL Entera Binaria, donde incluyeron los criterios y las restricciones de la liga nacional de futbol profesional de Honduras, procurando una equidad deportiva entre los equipos participantes. Entre estos criterios están: minimizar los descansos, el recorrido entre jornadas y la diferencia de recorrido entre equipos, tomando siempre en cuenta las restricciones establecidas originalmente por la liga nacional y las formuladas por el grupo de trabajo. Realizado este análisis se obtuvo como resultado la disminución a 6 descansos en una vuelta [14].

Materiales y Métodos

Para el diseño del modelo de PL, suponga que una liga profesional de béisbol, cuenta con n ampáyeres disponibles para dirigir m juegos de béisbol el mismo día en m ciudades diferentes; cada juego debe contar con 4 ampáyeres (el ampáyer principal, el ampáyer central y los 2 ampáyeres de línea). Considerando como i al número de ampáyeres, así como j a las ciudades donde se realizará cada juego, en este caso la variable de decisión genérica, sería:

$X_{i,j}$ = ampáyer i, asignado a la ciudad j

Donde: i = 1, 2, 3, ... n y j = 1, 2, 3, ... m

Obviamente, cada uno de los n ampáyeres reside en ciudades diferentes; suponga también que la liga desea reducir al mínimo los costos originados por el transporte de cada uno de ellos hacia las m ciudades donde se realizarán los juegos; ¿Cómo lograr este objetivo? Sin duda este es un problema de asignación; sin embargo, no es posible plantearlo como tal, ya que en este caso no se trata de una asignación “uno a uno” porque a cada juego se le deben asignar 4 ampáyeres y por lo tanto se le debe plantear en forma diferente; en este caso la PL es la alternativa más viable. Entonces para el diseño el modelo serán necesarias nxm variables de decisión $X_{i,j}$.

Si lo que se busca es reducir al mínimo el costo total de transporte de los ampáyeres a las ciudades donde se realizarán los juegos, entonces en la función objetivo del modelo que será de minimizar, cada una de estas variables genéricas de decisión $X_{i,j}$ se debe multiplicar por su costo respectivo de transporte t, desde donde reside cada ampáyer i, hasta cada ciudad j. Aquí es donde se tiene el trabajo de campo para implantar este modelo de PL, ya que será necesario investigar los costos de boletos de avión o de autobús en caso de distancias cortas, de cada ciudad donde reside cada ampáyer hasta todas y cada una de las ciudades sede de cada juego en viaje redondo.

Es muy común que algunos ampáyeres residan en ciudades sede de algunos juegos; aquí se tienen dos opciones: si se quiere que a un ampáyer se le asigne precisamente el juego de su ciudad de residencia, al costo de transporte asociado a la variable de decisión correspondiente, se le asignará un costo positivo menor que los otros costos en el modelo (por ejemplo 1), para que el algoritmo lo tome en la solución final y lo asigne a su ciudad de residencia; de lo contrario, a la variable de decisión asociada se le asignará un costo de transporte mucho mayor que todos los demás, tratando de que el algoritmo lo asigne a otra ciudad que no sea la de su residencia. Considerando los costos de transporte, así como el objetivo de minimizar el costo total, la función objetivo queda:

$$\textbf{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{i,j} \sum_{k=1}^{t} C_k \tag{6}$$

Donde:

$X_{i,j}$ = ampáyer i, asignado a la ciudad j.
C_k = costo de transporte a cada ciudad sede.
i = 1, 2, 3,..... n ampáyeres.
j = 1, 2, 3,...... m sedes de los juegos.
k = 1, 2, 3,..... t costo de transporte.

Definida ya la función objetivo del modelo, ahora es necesario determinar las restricciones a las cuales estará sujeta dicha función. Aquí es necesaria una restricción por cada juego programado para controlar al número ampáyeres que se le asignarán que son 4; si se tienen programados m juegos, entonces serán necesarias m restricciones. Ya que X_j indica el número de juego o sede al cual puede ser asignado cada ampáyer, entonces todas las $\mathbf{X_j}$ $_{=1}$ representan al juego 1, todas las X_j $_{=2}$ representan al juego 2, todas las X_j $_{=3}$ representan al juego 3; así hasta completar las m restricciones para los m juegos, entonces la restricción para el juego 1 queda:

$$\sum_{i=1}^{n} X_j = 4\,; \qquad para\ toda\ j = 1 \tag{7}$$

Para el juego 2:

$$\sum_{i=1}^{n} X_j = 4\,; \qquad para\ toda\ j = 2 \tag{8}$$

Para el juego 3:

$$\sum_{i=1}^{n} X_j = 4\,; \qquad para\ toda\ j = 3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \tag{9}$$

Para el juego m :

$$\sum_{i=1}^{n} X_m = 4\,; \qquad para\ toda\ j = m \tag{10}$$

Así mismo, es necesario establecer una restricción por cada ampáyer para indicar que este solo puede ser asignado a un juego o a ninguno, pero no a más de uno; estas restricciones deben ser del tipo “menor o igual que” (≤). Ya que X_i indica el número de ampáyer, entonces todas las $X_{i=1}$ representan al ampáyer 1, todas las $X_{i=2}$ representan al ampáyer 2, todas las $X_{i=3}$ representan al ampáyer 3; así hasta completar las n restricciones para los n ampáyeres. Si se tienen n ampáyeres disponibles, se necesitarán n restricciones; la restricción para el ampáyer 1 queda:

$$\sum_{j=1}^{m} X_i \le 1; \qquad para\ toda\ i = 1$$

(11)

Para el ampáyer 2:

$$\sum_{j=1}^{m} X_i \leq 1; \qquad para\ toda\ i = 2$$

(12)

Para el ampáyer 3:

$$\sum_{j=1}^{m} X_i \leq 1; \qquad para\ toda\ i = 3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

(13)

Para el ampáyer n :

$$\sum_{j=1}^{m} X_i \leq 1; \qquad para\ toda\ i = \boldsymbol{n}$$

(14)

Finalmente, solo quedan las restricciones de no negatividad para indicar que ninguna de las variables básicas (que se encuentran en la solución final), puede tomar valores negativos; aquí también son necesarias nxm restricciones, quedando:

$$X_{ij} \geq 0$$

(15)

Resultados y discusión

Para aplicar hipotéticamente el modelo de PL propuesto, suponga que una liga profesional de béisbol de México tiene disponibles 16 ampáyeres (n =16) para dirigir 3 juegos de béisbol (m =3) el mismo día en las ciudades de Mexicali, Navojoa y Guasave; la Tabla 1 muestra las ciudades de residencia de cada uno de estos 16 ampáyeres y el costo hipotético del boleto de avión o de autobús en viaje redondo, de esas ciudades a las ciudades de Mexicali, Navojoa y Guasave.

Nótese que el ampáyer 1 reside en Mexicali, el ampáyer 2 en Navojoa y el ampáyer 3 en Guasave; en el caso de los ampáyeres 1 y 2 lo que se busca es que sean asignados precisamente a los juegos de Mexicali y Navojoa respectivamente, por lo cual se les asignó un costo de transporte igual a 1, mucho menor que todos los demás. En el caso del ampáyer 3 que reside en Guasave, lo que se busca es que no sea asignado al juego a realizarse en esa ciudad o que no sea asignado a ningún juego, por lo cual se le asignó un costo de 500; mayor que todos los otros costos considerados.

Ya que no es posible plantear este problema como un modelo de asignación, se hará como un modelo de PL con 16 ampáyeres x 3 juegos=48 variables de decisión donde:

i = 16 ampáyeres

j = 3 juegos (1=Mexicali, 2=Navojoa, 3=Guasave)

k = (16 x 3) = 48 boletos de avión o de autobús desde cada lugar de residencia de cada ampáyer hasta Mexicali, Navojoa y Guasave.

TABLA 1

Costos de boletos de transporte boleto de avión o de autobús en viaje redondo expresados en pesos desde las ciudades de residencia de cada ampáyer hasta las ciudades de Mexicali Navojoa y Guasave

Ampáyer	Ciudad de residencia	Sedes de los juegos		
		(1) Mexicali ($)	(2) Navojoa ($)	(3) Guasave ($)
1	Mexicali	1	150	170
2	Navojoa	150	1	150
3	Guasave	170	150	500
4	Tepic	210	140	150
5	Mochis	180	100	80
6	Hermosillo	100	120	140
7	Mazatlán	180	170	80
8	Mazatlán	180	170	80
9	Saltillo	190	110	90
10	Saltillo	190	110	90
11	Monclova	170	90	70
12	P. Vallarta	250	210	190
13	La Paz	170	150	140
14	Tijuana	50	140	160
15	Culiacán	200	120	100
16	Monterrey	220	200	180

Entonces, las 48 variables de decisión en este caso quedarían identificadas de la siguiente manera:

$X_{1,1}$ = ampáyer 1 asignado a Mexicali.
$X_{1,2}$ = ampáyer 1 asignado a Navojoa.
$X_{1,3}$ = ampáyer 1 asignado a Guasave.
$X_{2,1}$ = ampáyer 2 asignado a Mexicali.
$X_{2,2}$ = ampáyer 2 asignado a Navojoa.
$X_{2,3}$ = ampáyer 2 asignado a Guasave.
⋮ ⋮
⋮ ⋮
$X_{16,1}$ = ampáyer 16 asignado a Mexicali.
$X_{16,2}$ = ampáyer 16 asignado a Navojoa.
$X_{16,3}$ = ampáyer 16 asignado a Guasave.

En la función objetivo que será del tipo minimizar, cada una de estas 48 variables $X_{i,j}$ se debe multiplicar por el costo del boleto de avión o de autobús correspondiente dado en la Tabla 1, como sigue:

Minimizar Z =
Costo boleto Mexicali-Mexicali ($X_{1,1}$) +
Costo boleto Mexicali-Navojoa ($X_{1,2}$) +
Costo boleto Mexicali-Guasave ($X_{1,3}$) +
Costo boleto Navojoa-Mexicali ($X_{2,1}$) +
Costo boleto Navojoa-Navojoa ($X_{2,2}$) +
Costo boleto Navojoa-Guasave ($X_{2,3}$) +
Costo boleto Guasave-Mexicali ($X_{3,1}$) +
Costo boleto Guasave-Navojoa ($X_{3,2}$) +
Costo boleto Guasave-Guasave ($X_{3,3}$) +
⋮ ⋮
⋮ ⋮
Costo boleto Monterrey-Mexicali ($X_{16,1}$) +
Costo boleto Monterrey-Navojoa ($X_{16,2}$) +
Costo boleto Monterrey-Guasave ($X_{16,3}$) (16)

Considerando los costos de transporte dados en la Tabla 1, entonces la función objetivo queda:

$$\text{Minimizar } Z = X_{1,1}+150X_{1,2}+170X_{1,3}+150X_{2,1}+ X_{2,2}+150X_{2,3}+170X_{3,1}+150X_{3,2}+500X_{3,3}+210X_{4,1}+ 140X_{4,2}+150X_{4,3}+180X_{5,1}+100X_{5,2}+80X_{5,3}+ 100X_{6,1}+120X_{6,2}+140X_{6,3}+180X_{7,1}+170X_{7,2}+ 80X_{7,3}+80X_{8,1}+170X_{8,2}+80X_{8,3}+190X_{9,1}+110X_{9,2}+ 90X_{9,3}+190X_{10,1}+110X_{10,2}+90X_{10,3}+170X_{11,1}+ 90X_{11,2}+70X_{11,3}+250X_{12,1}+210X_{12,2}+190X_{12,3}+ 170X_{13,1}+150X_{13,2}+140X_{13,3}+50X_{14,1}+140X_{14,2}+ 160X_{14,3}+200X_{15,1}+120X_{15,2}+100X_{15,3}+220X_{16,1}+ 200X_{16,2}+180X_{16,3} \quad (17)$$

De esta forma, podemos deducir fácilmente que las variables $X_{j=1}$ representan al juego de Mexicali, las variables $X_{j=2}$ representan al juego de Navojoa y las variables $X_{j=3}$ representan al juego de Guasave. Ahora ya es posible plantear las restricciones de los 4 ampáyeres requeridos para cada uno de los 3 juegos, sumando las variables correspondientes a cada uno e igualando esa suma a 4. Para el juego en Mexicali la restricción queda:

$$X_{1,1}+X_{2,1}+X_{3,1}+X_{4,1}+X_{5,1}+X_{6,1}+X_{7,1}+ X_{8,1}+X_{9,1}+X_{10,1}+X_{11,1}+X_{12,1}+ X_{13,1}+X_{14,1}+X_{15,1}+X_{16,1} = 4 \quad (18)$$

Para el juego en Navojoa:

$$X_{1,2}+X_{2,2}+X_{3,2}+X_{4,2}+X_{5,2}+X_{6,2}+X_{7,2} \; X_{8,2}+X_{9,2}+X_{10,2}+X_{11,2}+X_{12,2} \; X_{13,2}+X_{14,2}+X_{15,2}+X_{16,2} = 4 \quad (19)$$

Para el juego en Guasave:

$$X_{1,3}+X_{2,3}+X_{3,3}+X_{4,3}+X_{5,3}+X_{6,3}+X_{7,3} \; X_{8,3}+X_{9,3}+X_{10,3}+X_{11,3}+X_{12,3} \; X_{13,3}+X_{14,3}+X_{15,3}+X_{16,3} = 4 \quad (20)$$

Así, las 16 restricciones para indicar que cada uno de los 16 ampáyeres disponibles solo puede ser asignado a uno de los 3 juegos o a ninguno, deben ser del tipo “menor o igual que” y quedan:

$$\text{Para el ampáyer 1:} \quad X_{1,1} + X_{1,2} + X_{1,3} \leq 1 \tag{21}$$

$$\text{Para el ampáyer 2:} \quad X_{2,1} + X_{2,2} + X_{2,3} \leq 1 \tag{22}$$

$$\text{Para el ampáyer 3:} \quad X_{3,1} + X_{3,2} + X_{3,3} \leq 1 \tag{23}$$

$$\text{Para el ampáyer 4:} \quad X_{4,1} + X_{4,2} + X_{4,3} \leq 1 \tag{24}$$

$$\text{Para el ampáyer 5:} \quad X_{5,1} + X_{5,2} + X_{5,3} \leq 1 \tag{25}$$

$$\text{Para el ampáyer 6:} \quad X_{6,1} + X_{6,2} + X_{6,3} \leq 1 \tag{26}$$

$$\text{Para el ampáyer 7:} \quad X_{7,1} + X_{7,2} + X_{7,3} \leq 1 \tag{27}$$

$$\text{Para el ampáyer 8:} \quad X_{8,1} + X_{8,2} + X_{8,3} \leq 1 \tag{28}$$

$$\text{Para el ampáyer 9:} \quad X_{9,1} + X_{9,2} + X_{9,3} \leq 1 \tag{29}$$

$$\text{Para el ampáyer 10:} \quad X_{10,1} + X_{10,2} + X_{10,3} \leq 1 \tag{30}$$

$$\text{Para el ampáyer 11:} \quad X_{11,1} + X_{11,2} + X_{11,3} \leq 1 \tag{31}$$

$$\text{Para el ampáyer 12:} \quad X_{12,1} + X_{12,2} + X_{12,3} \leq 1$$

(32)

$$\text{Para el ampáyer 13:} \quad X_{13,1} + X_{13,2} + X_{13,3} \leq 1 \tag{33}$$

$$\text{Para el ampáyer 14:} \quad X_{14,1} + X_{14,2} + X_{14,3} \leq 1 \tag{34}$$

$$\text{Para el ampáyer 15:} \quad X_{15,1} + X_{15,2} + X_{15,3} \leq 1 \tag{35}$$

$$\text{Para el ampáyer 16:} \quad X_{16,1} + X_{16,2} + X_{16,3} \leq 1 \tag{36}$$

Finalmente, solo quedan las 48 restricciones de no negatividad para indicar que ninguna de las variables de decisión $X_{i,j}$ que quede en la solución final puede tomar valores negativos, quedando:

$$X_{1,1} \geq 0 \tag{37}$$

$$X_{1,2} \geq 0 \tag{38}$$

$$X_{1,3} \geq 0 \tag{39}$$

$$X_{2,1} \geq 0$$
$$\vdots$$
$$\vdots \tag{40}$$

$$X_{16,3} \geq 0 \tag{41}$$

Utilizando el software AB:POM (Production and Operation Management) versión 3.1 para la solución de este ejercicio, los resultados encontrados señalan que se tienen múltiples soluciones; una de estas soluciones se muestra en la Tabla 2, donde se observa que los ampáyeres 4, 12, 13 y 16 no fueron asignados en esta ocasión para dirigir un juego; esta solución óptima, representa un costo total mínimo de transporte de los 12 ampáyeres asignados a los 3 juegos de $972.

El costo reducido indica en cuanto se debe reducir el costo del viaje redondo para que el ampáyer sea asignado a un juego; obviamente, el costo reducido para los ampáyeres asignados es cero, mientras que el costo reducido de los ampáyeres no asignados (4, 12, 13 y 16), se debe reducir en 20, 80, 30 y 50 pesos respectivamente para que sean asignados. El intervalo para los coeficientes de las variables básicas (ampáyeres asignados) dentro del cual la solución sigue siendo óptima, se encuentra indicado por su intervalo de optimidad respectivo expresado en pesos.

TABLA 2
Solución óptima, costos reducidos e intervalo de optimidad para las variables básicas (ampáyeres asignados) expresados en pesos.

Ampáyer	Juego Asignado	Costo ($)	Costo Reducido ($)	Intervalo de optimidad ($)	
				Desde	Hasta
1	Mexicali	1	0	-inf.	170
2	Navojoa	1	0	-inf.	100
3	Mexicali	170	0	100	170
4	NA	---	20	---	---
5	Navojoa	100	0	100	100
6	Mexicali	100	0	-inf.	170
7	Guasave	80	0	-inf.	100
8	Guasave	80	0	-inf.	100
9	Guasave	90	0	-inf.	90
10	Guasave	90	0	-inf.	90
11	Navojoa	90	0	-inf.	90
12	NA	---	80	---	---
13	NA	---	30	---	---
14	Mexicali	50	0	-inf.	170
15	Navojoa	120	0	110	120
16	NA	---	50	---	---
Valor de Z		**972**	---	---	---

TABLA 3
Valores duales expresados en pesos e intervalos de optimidad expresados en número de ampáyeres para cada restricción

Restricción	Precio dual ($)	Holgura / Exceso (ampáyeres)	Intervalo de optimidad (ampáyeres)	
			Desde	Hasta
Juego Mexicali	-170	0	3	4
Juego Navojoa	-120	0	3	4
Juego Guasave	-100	0	4	4
Ampáyer 1	169	0	1	2
Ampáyer 2	119	0	1	2
Ampáyer 3	0	0	1	Inf.
Ampáyer 4	0	1	0	Inf.
Ampáyer 5	20	0	1	2
Ampáyer 6	70	0	1	2
Ampáyer 7	20	0	1	1
Ampáyer 8	20	0	1	1
Ampáyer 9	10	0	1	1
Ampáyer 10	10	0	1	1
Ampáyer 11	30	0	1	2
Ampáyer 12	0	1	0	Inf.
Ampáyer 13	0	1	0	Inf.
Ampáyer 14	120	0	1	2
Ampáyer 15	0	0	1	Inf.
Ampáyer 16	0	1	0	Inf.

La Tabla 3 muestra los precios duales, que indican el costo por unidad adicional de recurso expresado en pesos para las variables de holgura o exceso de cada restricción del modelo; como se observa, resulta más barato asignar un ampáyer más al juego de Guasave y más caro asignarlo al juego de Mexicali. Los precios duales para las restricciones de los 16 ampáyeres, significan el costo por asignar un juego más al mismo ampáyer, donde obviamente esto resulta más costoso para los ampáyeres 1 y 2; el intervalo de optimidad expresado en número de ampáyeres para las restricciones del modelo, indican dentro de que rango esos precios duales son válidos. Por otra parte, tener variables básicas (ampáyeres asignados), con un precio dual igual a cero como el caso de los ampáyeres 3 y 15, significa que se tienen más soluciones óptimas también con un costo total mínimo de $972.

Conclusiones

El modelo de PL planteado en el presente trabajo funciona eficientemente para el objetivo propuesto como se observó en la aplicación hipotética realizada, al establecer una asignación óptima de 12 ampáyeres de un total de 16 disponibles a 3 juegos simultáneos de béisbol en ciudades diferentes, para incurrir en un costo total mínimo de transporte de $972. Con este resultado es posible afirmar que se obtiene un ahorro, ya que el costo total en que se incurre, es el costo óptimo (mínimo) y cualquier otro costo total asociado a otra alternativa de asignación de ampáyeres, siempre será mayor; sin embargo, en este caso no es posible establecer un porcentaje o cantidad de ahorro, ya que se parte de una situación hipotética óptima, la cual no es posible compararla con una situación real de asignación sin utilizar PL, porque no se cuenta con una referencia de la misma.

Por otra parte, este modelo debe ser aplicado continuamente; es decir, será necesario realimentarlo con la nueva información (costos de viajes redondos en avión o autobús, de los lugares de residencia de los n ampáyeres que se desean asignar a los m juegos de béisbol cada semana o cada vez que se tengan juegos programados simultáneamente en lugares diferentes). En caso de que el número de ampáyeres requeridos por juego sea diferente a 4, entonces será necesario modificar todas y cada una de las restricciones correspondientes a cada juego, igualando cada restricción al número necesario de estos.

Ya que las ciudades donde residen los ampáyeres siempre son las mismas y las ciudades sedes de los juegos también serán las mismas, con el fin de que el modelo no sea repetitivo y no asigne siempre a los mismos ampáyeres a las mismas sedes, es necesario no considerar siempre los mismos ampáyeres cada vez que se aplique el modelo de PL. En los casos en que un ampáyer resida en la ciudad donde se realizará un juego, se puede adoptar la estrategia utilizada en ejemplo si se desea que el ampáyer en cuestión sea asignado o no al juego de su ciudad de residencia; sin embargo, aquí la recomendación y política más sana que se debe adoptar, es la de no asignar un ampáyer a un juego en su ciudad de residencia.

En caso de que los juegos sean muy continuos y algunos ampáyeres no puedan regresar a su ciudad de residencia entre juego y juego, entonces el lugar del juego dirigido se tomará como su lugar de residencia en la nueva corrida del modelo o bien, los ampáyeres asignados a un juego en la corrida anterior, no serán considerados en la nueva corrida del modelo. Es importante señalar que es posible adelantar el trabajo de investigación de costos de transporte, ya que se contará previamente con el calendario de juegos del campeonato y la lista de ampáyeres disponibles y también que mientras más juegos se programen el beneficio será mayor.

El modelo de PL propuesto en el presente trabajo también puede funcionar y podrá ser aplicado a problemas de este tipo de cualquier área profesional o laboral y no solamente la deportiva, para la asignación simultánea de n árbitros, supervisores, visores o personas que deban ser enviados en grupos no necesariamente de igual tamaño a m *d*estinos, siempre que se trate de minimizar el costo total asociado; estos modelos tendrán un total de nxm variables de decisión. Finalmente, es importante señalar que este modelo de PL también puede ser planteado mediante la programación entera, ya que la solución final solo requiere número enteros; en el caso del ejemplo, 4 ampáyeres por juego y 1 juego por ampáyer.

Referencias

[1]. Taha, Hamdy A., (2004), *"Investigación de Operaciones"*, Editorial Pearson-Prentice Hall, 7ma. Edición, México, Página 4.

[2]. Prawda, J., (2004), *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones: Modelos Determinísticos*, Editorial Limusa, México, página 23.

[3]. Chediak, F., (2013), *Investigación de Operaciones Volumen I*, Facultad de Ingeniería, Universidad de Ibagué, Tercera Edición, Ibagué-Colombia, página 11.

[4]. Hillier S. y Lieberman J., (2010), *Fundamentos de Investigación de Operaciones*, Editorial McGraw Hill, México, página 14.

[5]. Arreola, J., (1997), *Curso de Investigación de Operaciones*, C.M.B.J. "Peña Colorada", S.A. de C.V., México, página 16.

[6]. Taha, Hamdy A., (2004), *"Investigación de Operaciones"*, Editorial Pearson-Prentice Hall, 7ma. Edición, México, Páginas 13 y 14.

[7]. Sánchez, W., (1978), *Investigación de Operaciones Aplicada a la Industria Minero-Metalúrgica (Curso Intensivo de Programación Lineal),* Universidad de Guanajuato, México.

[8]. Hillier S. y Lieberman J., (2010), *Fundamentos de Investigación de Operaciones*, Editorial McGraw Hill, México, página 19.

[9]. Marmolejo J., (2016), *Mejora de la Asignación de Ternas Arbitrales para el Torneo Descentralizado del Fútbol Peruano Usando Programación Lineal Entera Mixta*, Tesis de Licenciatura, Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Ciencias e Ingeniería.

[10]. Cárdenas A., Castiblanco C., Carrillo D. e Higuera V., (2013), *Investigación de Operaciones Aplicada a la Programación de un Campeonato de Futbol en Bogotá Colombia,* Unión de Universidades Bogotanas, Bogotá-Colombia.

[11]. Oliveros J., (2016), *Optimización para la Programación de Supervisores de Programas Deportivos Regionales*, Tesis de Posgrado, Universidad de Concepción-Chile, Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Industrial.

[12]. Bonomo, F., Durán, G. y Marenco, J., (2013), *Programación Matemática para Asesorar a un Entrenador de Fútbol: un Juego de Fantasía como caso de Estudio*, Revista Ingeniería de Sistemas Volumen XXVII, Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento-Argentina, Departamento de Computación, FCEN, UBA, Argentina.

[13]. Bautista J., Mateo M. y De la Torre R., (2018), *"Programación Lineal Entera Mixta para asignar Voluntarios a la Organización de Eventos deportivos. Caso Aptitud no Restringida"*, Universidad Politécnica de Cataluña - Organización de la Producción y de Empresa (Aspectos Técnicos, Jurídicos y Económicos en Producción), Barcelona, España.

[14]. Rivera F., Sansur J., Pavón K., García S. y Girón M., (2019), *"Optimización de Recorrido en el Calendario de la Liga Nacional de Fútbol de Honduras"*, Universidad Tecnológica Centroamericana (UNITEC), Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas, Tegucigalpa, Honduras.