Cultura matemática y formación matemática para el acceso a la universidad

Mathematical culture and mathematical training for access to university

Genoveva del Carmen Leví Orta
Profesor Contratado Doctor.
Departamento de Didáctica, Organización Escolar y Didácticas Especiales.
Universidad Nacional de Educación a Distancia.
genovevalevi@edu.uned.es

Eduardo Ramos Méndez
Catedrático de Universidad.
Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Cálculo Numérico.
Universidad Nacional de Educación a Distancia.
eramos@ccia.uned.es

RESUMEN
Las Matemáticas son una de las creaciones más extraordinarias de la mente humana. Forman parte esencial de la cultura que debe acreditar cualquier ciudadano que desee vivir plenamente en la sociedad actual. Así lo ha entendido la UNED a la hora de diseñar el curso de acceso directo (CAD) a la universidad para mayores de 25 años, al incluir una materia de Matemáticas no solo para acceso a estudios científicos tecnológicos sino también para las áreas de humanidades, ciencias sociales y ciencias del comportamiento. Este trabajo describe el papel de las Matemáticas en la formación preuniversitaria de estudiantes que aspiran a cursar un grado en dichas áreas. Se presenta el proceso de matematización y se hace una descripción de las ideas clave que conforman el saber matemático. Como complemento, se incluyen algunas estadísticas sobre los resultados de la formación matemática de estudiantes que han seguido a lo largo de los últimos doce años la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales que se imparte en el CAD de la UNED.

ABSTRACT
Mathematics is one of the most extraordinary creations of the human mind. They are an essential part of the culture that any citizen who wants to live fully in today's society must accredit. This is how the UNED has understood it when designing the direct access course (CAD) to the university for those over 25 years of age, by including a Mathematics subject not only for access to technological scientific studies but also for the areas of humanities, social sciences and behavioral sciences. This work describes the role of Mathematics in the pre-university training of students who aspire to study a degree in these areas. The mathematization process is presented and a description of the key ideas that make up mathematical knowledge is made. As a comple-

ment, some statistics are included on the results of the mathematical training of students who have followed the course Mathematics Applied to Social Sciences taught at the UNED CAD over the last twelve years.

Palabras Clave: "Cultura Matemática", "Formación Matemática para Acceso a la Universidad", "Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales", "Matematización", "Saber Matemático".

Key Words: "Mathematical Culture", "Mathematical Training for University Access", "Mathematics Applied to Social Sciences", "Mathematization", "Mathematical Knowledge".

INTRODUCCIÓN

La Matemática es la "*ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones*"[1]. El término proviene del latín, *mathematĭcus,* y este del griego, μαθηματικός *mathēmatikós,* derivado del vocablo μάθημα *máthēma,* con el significado de '*conocimiento*'. Se utiliza también en plural, Matemáticas, con idéntico significado. La definición anterior, que recoge el diccionario de la Real academia española, contiene los elementos fundamentales de la disciplina, pues incluye los vocablos ·*deducción*, *abstracción*, *número, geometría*, *símbolo*, *relación,* todos ellos cargados de significado en la ciencia matemática.

La Matemática nació muchos siglos antes de su conceptualización. La actividad matemática del hombre comienza con los primeros hitos de la civilización y corre en paralelo con el desarrollo del lenguaje y la socialización de la especie humana. En todas las culturas se encuentran referencias a cuestiones de índole matemática que el hombre tuvo que resolver a lo largo de su proceso de culturización.

No es difícil imaginar que la necesidad de disponer de un sistema básico de contabilidad para llevar un control de los miembros del grupo, posesiones, ciclos solares u otros, condujo al hombre primitivo a concebir de forma natural la abstracción de número. Más allá de los recuentos, el hombre culto tuvo que enfrentarse a problemas prácticos de su vida cotidiana como los relacionados con la medida la tierra, el comercio de bienes, la construcción de moradas o monumentos, entre otros. Paulatinamente, comprendió la utilidad de sistematizar las soluciones de dichos problemas e incorporarlas a su bagaje de conocimientos. De ahí, se pasó a caer en la cuenta de que la abstracción de la parte esencial de dichos problemas conducía a la generalización de las aplicaciones y, por tanto, se convertía en "*conocimiento*" (*máthēma*), es decir, en ciencia que puede utilizarse para deducir conclusiones sólidas y libres de errores a partir de hipótesis claramente establecidas.

[1] Diccionario de la Real Academia Española, 23ª edición.

A lo largo del tiempo, y como probable herencia de la compartimentación medieval derivada del *trívium* y el *quadrivium*, la opinión común se ha asentado sobre la idea de que las Matemáticas son necesarias solamente en los ámbitos científico y tecnológico, siendo prescindibles en su mayor parte para las personas "de letras", cuya cultura matemática se limita a manejar las cuatro reglas aritméticas. Nada hay más lejos de la realidad en el actual contexto social, intensamente condicionado por la popularización del uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

En las últimas décadas se ha podido observar un enorme crecimiento del uso de las Matemáticas en campos tradicionalmente alejados de la disciplina. Así, las ciencias médicas y naturales, las ciencias sociales, las ciencias del comportamiento, la ciencia jurídica, e incluso las humanidades han incorporado a sus métodos y procedimientos nuevas aproximaciones inspiradas en las Matemáticas, extraídas tanto de áreas tradicionales como la aritmética, la geometría y el cálculo, hasta los más recientes desarrollos fruto de los métodos estadísticos, el cálculo de probabilidades, los modelos de optimización y la algoritmia computacional.

En síntesis, por su naturaleza abstracta las Matemáticas son imprescindibles para identificar patrones que son comunes en muchas áreas de conocimiento con diferentes objetivos de estudio. Su aplicación permite extraer conclusiones sólidas y válidas por sí mismas, sin necesidad de recurrir a mayores argumentos de autoridad, haciendo de la disciplina una herramienta de manejo inexcusable para cualquier ciudadano que desee acreditar un nivel cultural acorde con el mundo actual.

La Universidad Nacional de Educación a Distancia ha entendido siempre la necesidad de que el curso de preparación para el acceso a la universidad para mayores de 25 años debe incluir una formación matemática adecuada, con contenido y desarrollo particularizados a la orientación curricular de cada estudiante. En concreto, para quienes pretender cursar estudios universitarios del ámbito de las humanidades, ciencias sociales o ciencias del comportamiento se programa una materia, cuya denominación ha variado a lo largo del tiempo, pero esencialmente ha mantenido constante su contenido y metodología, que presenta los aspectos básicos de la disciplina que se han enumerado en la definición anterior. Los objetivos de formación de dicha materia pretenden que los estudiantes desarrollen su *alfabetización matemática,* es decir, su capacidad para abordar situaciones y problemas en diferentes contextos del mundo real desde la perspectiva que proporcionan las Matemáticas, entre cuyas fortalezas sobresalen el razonamiento lógico, el rigor intelectual y la conceptualización.

LA MATEMATIZACIÓN

El proceso fundamental que inspira el pensamiento matemático se denomina *matematización* o *proceso matemático*. Dicho proceso se puede esquematizar conforme se representa en la figura 1 y, de un modo general, se distinguen las siguientes fases:

1) Análisis. 2) Formulación. 3) Solución. 4) Validación. 5) Reformulación. 6) Puesta en práctica de la solución.

Análisis

El punto de partida es observar una situación enmarcada en un determinado contexto del mundo real que es susceptible de ser estudiada mediante el saber matemático. Ante todo, hay que tener presente que, en general, las situaciones reales son complejas y suelen incluir numerosos aspectos, posiblemente difusos o no controlables por el observador. Por ello, es obligado comenzar por definir de la manera más precisa posible el campo de actuación y considerar únicamente aquellos hechos que son relevantes para el estudio que se desea realizar. Como consecuencia, en la práctica la situación que realmente se va a estudiar se enmarca en un mundo real simplificado, que es el que realmente se somete a observación. Esta etapa del proceso matemático se denomina fase de análisis.

Formulación

El paso siguiente es representar mediante un modelo matemático la situación simplificada que se desea analizar, es decir, hay que traducir dicha situación al lenguaje matemático. En principio, una aproximación a la traducción puede consistir, simplemente, en recurrir al bagaje de conocimientos matemáticos de que se dispone previamente para identificar una situación similar, apoyarse en gráficos o esquemas, efectuar cálculos con el concurso de un ordenador, u otros recursos similares. Pero, de un modo general, la traducción tiene que identificar los aspectos matemáticos esenciales del problema como son las *variables* que intervienen en el mismo, es decir, aquellos elementos cuyos valores permiten dar una determinada respuesta al problema. Además, la traducción ha de contemplar las condiciones que interrelacionan las variables o que determinan los objetivos del problema. El lenguaje en que se escribe el modelo es el característico lenguaje matemático en el que intervienen códigos, símbolos, funciones, ecuaciones, etc.

Esta etapa del proceso matemático se denomina fase de formulación y debe abordarse con especial cuidado, pue en ella se toman la mayoría de las decisiones que determinan la viabilidad del proceso. La utilidad de un modelo matemático para analizar el comportamiento del mundo real reside, en buena parte, en la habilidad del diseñador del modelo para traducir de manera adecuada la realidad observada a un problema matemático que se consiga resolver. Cabe incluso hablar del *arte del modelado matemático*, es decir, saber diseñar modelos matemáticos supone que el individuo posee ciertas cualidades artísticas además de conocimientos técnicos.

Solución

Una vez formulado el modelo matemático hay que encontrar su solución. Para ello hay que utilizar las herramientas matemáticas disponibles: sistemas de ecuaciones, métodos geométricos, derivación, integración, búsqueda de máximos y mínimos, combinatoria, cálculo de probabilidades, estadística, etc. Esta es la fase de solución en la que se aplican las técnicas propiamente matemáticas al objeto de resolver el problema matemático planteado. De hecho, en esta fase puede prescindirse del significado real de los entes matemáticos que se están utilizando. Los resultados que se obtengan serán válidos porque son consecuencia lógica de la teoría matemática, llegando a conclusiones que son válidas desde el punto de vista matemático. Ello no quiere decir que necesariamente sean válidas para el mundo real, como comentaremos en la fase siguiente.

Validación y reformulación

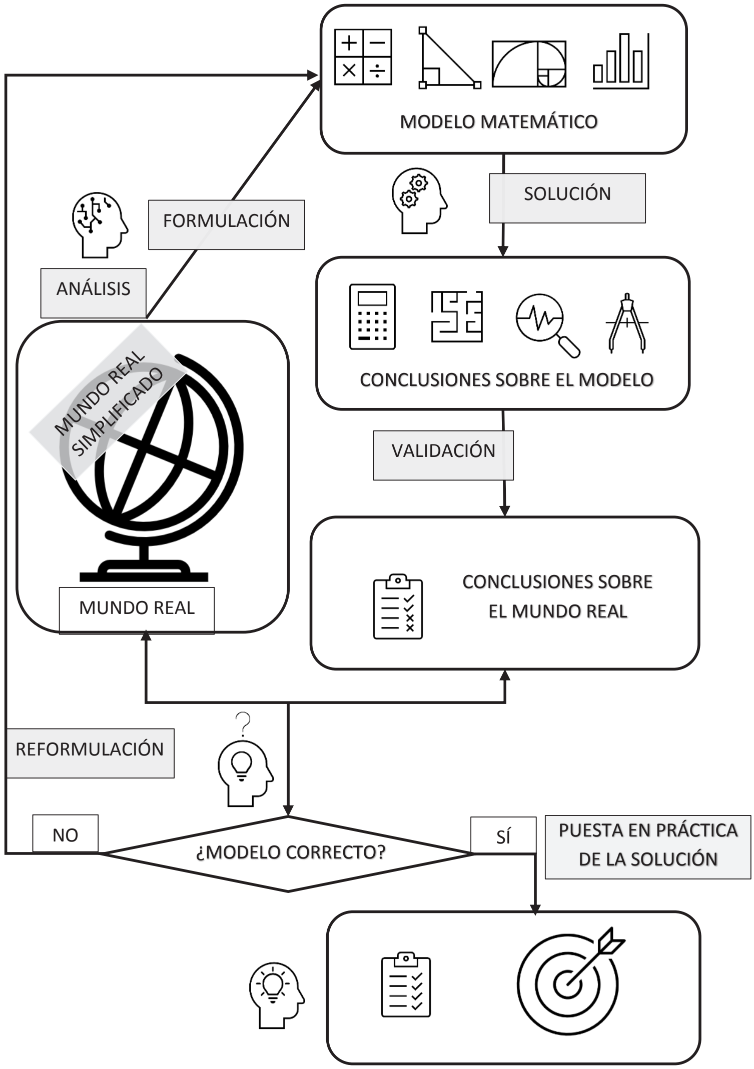
Con la solución del modelo matemático no se da por finalizado el proceso de matematización. Una vez encontrada dicha solución hay que contrastar la validez de los resultados obtenidos con lo que se observa en el mundo real que ha dado origen al problema. Si las conclusiones lógicas que se derivan de los análisis matemáticos son compatibles con los hechos que se observan en la realidad, podemos confiar en que el modelo diseñado es adecuado para describir la situación estudiada. Pero si se observan discrepancias importantes entre lo previsto por las conclusiones del modelo y el mundo real, hay que pensar que el modelo no es apropiado para el problema estudiado por lo que hay que revisarlo, es decir, hay que reformular el modelo matemático. Este ciclo *formulación-solución-validación-reformulación* ha de refinarse posiblemente varias veces hasta conseguir un modelo idóneo para el problema real considerado.

Puesta en práctica de la solución

Cuando el estudio ha superado todas las etapas anteriores, llega el momento de poner en práctica la solución encontrada, es decir, es el momento de utilizar el modelo matemático para dar respuesta al problema original. Aquí finalizaría, en principio, el proceso matemático. Ahora bien, la ejecución de fase de puesta en práctica de la solución puede ser delicada y arruinar un buen modelo matemático. La razón es que hay que hacer una traducción inversa de los resultados y pasar del ámbito de los objetos matemáticos al mundo real. En ocasiones, la falta de habilidades para traspasar los resultados teóricos al mundo real, o una simple aplicación rutinaria, puede conducir a resultados no deseados. En particular, en la fase de solución y aplicación de los resultados es útil tener presentes las siguientes consideraciones:

- Comprender el alcance y los límites de los conceptos matemáticos.
- Reflexionar sobre las argumentaciones matemáticas y las explicaciones y justificaciones de los resultados obtenidos.
- Saber comunicar el proceso seguido y la solución alcanzada.
- Realizar una acertada crítica del modelo matemático y de sus límites.

Figura 1. El proceso matemático



EL SABER MATEMÁTICO

Las ideas básicas, o ideas clave, que constituyen el núcleo del pensamiento matemático son las siguientes:

- *Fundamentos:* estudio del lenguaje matemático.
- *Aritmética y Álgebra*: estudio de los números.
- *Geometría*: estudio del espacio y las formas.
- *Funciones*: estudio del cambio.
- *Probabilidad y Estadística*: estudio del azar y la incertidumbre.

Cada una de las ideas clave anteriores hace referencia a un conjunto de fenómenos y conceptos dotados de sentido y susceptibles de hallarse presentes en una multiplicidad de situaciones diversas. Cada una de estas ideas clave puede entenderse como una especie de contenido matemático generalizado, por lo que cualquier intento de deslindar estrictamente unas ideas clave de otras suele conducir a una situación artificial. Antes bien, hay que considerar que cada una de ellas ofrece una determinada perspectiva o punto de vista, del que se puede decir que posee un núcleo, o centro de gravedad, y unos límites un tanto imprecisos que permiten que se produzcan intersecciones con otras ideas clave. En principio, cualquier idea clave puede solaparse con otra idea clave, resultando como consecuencia la idoneidad de las matemáticas para analizar y estudiar complejas situaciones reales.

En los apartados que siguen presentaremos una descripción de las cinco ideas clave.

Fundamentos: estudio del lenguaje matemático

Las matemáticas son una ciencia que tiene dos vocaciones bien distintas. Una es proporcionar métodos a otras ciencias; ésta es una aspiración que la lleva hacia fuera, hacia la realidad del hombre en cada tiempo y su manera de organizarse y vivir. Son, como veremos más adelante, las matemáticas de los números, el cálculo, las figuras geométricas, el azar y los datos. La otra vocación es resumir la mayor cantidad de conceptos que sea posible en unas pocas ideas muy generales; es el deseo de reducir los métodos particulares a la ordenada servidumbre de una teoría común. Esta es una exigencia interna, que busca los últimos porqués, la simplificación y la armonía, en suma: la belleza. Así, bien porque buena parte de los problemas que se plantean no pueden ser resueltos en términos estrictamente numéricos o geométricos, bien porque la exigencia de unidad teórica impulsa a buscar conceptos más generales, en el discurrir de la historia se han incorporado al pensamiento matemático muchas ideas que conforman los fundamentos propios de la disciplina y constituyen un verdadero lenguaje con el que se expresan los conceptos y resultados del saber matemático.

El punto de partida es un hecho incuestionable: el hombre es un ser racional. Ésta es, sin duda, la cualidad esencial que distingue a la especie humana de los demás seres que pueblan la tierra. Las pautas de comportamiento del ser humano están gobernadas por la razón. De un modo general, podemos admitir que el hombre está dotado de una serie de mecanismos lógicos, universalmente admitidos, que permiten identificar el comportamiento racional. Cuando alguien actúa en contra de los dictados de la lógica solemos decir que se conduce de manera irracional. Las matemáticas se ocupan de estudiar los aspectos más simples de los citados mecanismos lógicos que dirigen la razón humana. Porque en ellos están los fundamentos más profundos de la verdadera ciencia: la verdad o falsedad de los enunciados, los modos de razonamiento, las conclusiones lógicamente válidas, etc.

Este campo se denomina *lógica de proposiciones*. Su estudio se remonta a la filosofía griega y preocupó, sin duda, a la mayor parte de las escuelas de pensamiento filosófico. Fue el inglés George Boole (1815-1864) quien, en su trabajo *Una Investigación de las Leyes del Pensamiento, en las cuales están basadas las Teorías Matemáticas de la Lógica y de la Probabilidad*, publicado en 1854, expresó en su actual forma simbólica las leyes del razonamiento. La lógica de proposiciones exige precisar, en primer lugar, el significado del término proposición y su valor de verdad. Luego, las proposiciones se clasifican en simples y compuestas, lo cual permite considerar los conectores lógicos: negación, conjunción, disyunción y condicional. Mediante estos conectores se pueden construir proposiciones complejas, cuyos valores de verdad se encuentran fácilmente con ayuda de las tablas de verdad. Un paso más avanzado es la consideración de los razonamientos, distinguiendo entre razonamientos lógicamente válidos y falacias; para simplificar la forma de comprobar la validez de un razonamiento son útiles los esquemas de razonamiento, o reglas de inferencia. Todo ello conduce al objetivo final que consiste en entender qué es un proceso de demostración, crucial para obtener conclusiones lógicamente válidas en cualquier disciplina y, en particular, en Matemáticas.

Por otra parte, para construir el edificio teórico de las matemáticas es necesario partir de una serie de conceptos primitivos que, a modo de cimientos, sirven de sustento a todo el saber matemático. A partir de ellos se definen todos los demás, por lo que el edificio de los saberes matemáticos está bien fundamentado. Las ideas básicas se enmarcan en la *Teoría de Conjuntos*, fruto de la privilegiada mente del matemático George Cantor (1845-1918), natural de San Petersburgo (Rusia) y profesor de la universidad alemana de Halle. Los fundamentos básicos de su trabajo vieron la luz en una serie de seis artículos publicados en la revista *Mathematische Annalen* entre los años 1879 y 1884 y significaron una profunda revolución en el pensamiento matemático. La teoría comienza reflexionando sobre las nociones primitivas de conjunto y elemento, junto con la relación de pertenencia que las une. A partir de ahí se pueden definir nuevos conceptos como la inclusión e igualdad de conjuntos, el conjunto universal y vacío, el conjunto de las partes, hasta llegar a las operaciones con conjuntos: intersección, unión y complementación.

Es interesante señalar que las proposiciones de la lógica tienen una estructura matemática semejante a la de los conjuntos y resulta sencillo traducir el lenguaje de proposiciones al lenguaje de conjuntos y recíprocamente. Los conectores lógicos entre proposiciones y las operaciones de conjuntos representan dos caras de una misma moneda. Esta equivalencia permite establecer que los conectores lógicos presentan propiedades idénticas a las de las operaciones con conjuntos.

Un paso adicional es considerar las transformaciones entre conjuntos. Éste es uno de los problemas principales de cualquier disciplina científica. Por ejemplo, los físicos estudian las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos, entendido como una transformación de la posición. Los biólogos, el desarrollo de los embriones en seres completos y la evolución de los ecosistemas. Los historiadores y sociólogos, las transformaciones de las sociedades. Los psicólogos, la modificación de la conducta de las personas. Los economistas, la influencia de los tipos de interés en la actividad económica. Como se aprecia, los ejemplos son innumerables. En Matemáticas, hay un concepto que significa transformación o cambio. Es el concepto de *aplicación*. Las aplicaciones pretenden ser un modelo, un patrón, que sintetiza qué tienen en común muchas transformaciones de otras ciencias. El concepto es fundamental en Matemáticas y se encontrará de nuevo más adelante al introducir un tipo particular de aplicaciones como son las transformaciones entre conjuntos de números, denominadas tradicionalmente funciones. Asimismo, la noción de aplicación es clave para llegar al concepto de *cardinal* de un conjunto que enlaza con la idea de número natural el cual constituye el punto de partida de los apartados siguientes.

En síntesis, los fundamentos matemáticos comprenden los elementos siguientes:

- Comprender el sentido de enunciados que expresan ideas y que pueden valorarse como ciertos o falsos.
- Comprender las estructuras del comportamiento racional.
- Distinguir los razonamientos correctos de los falaces.
- Poseer un lenguaje formal para expresar los conceptos y resultados que conforman todo el saber matemático.

Aritmética y Álgebra: estudio de los números

Probablemente la noción matemática de origen más antiguo es la idea de número. En los primeros estadios de la civilización, no es difícil imaginar al hombre primitivo afanándose en efectuar recuentos de sus posesiones o los miembros de su clan, bien mediante el empleo de una bolsa de guijarros, bien mediante marcas cuidadosamente efectuadas en las paredes de su cueva. En algún momento de su desarrollo racional, el hombre descubrió la abstracción de número (natural) que le permitió solucionar sus problemas de contabilidad ayudado de una maravillosa y liviana herramienta con la cual, aliviado del peso de los incómodos guijarros, podía fácilmente representar cantidades y características cuantificables de los objetos del mundo real. Nació así en la razón la idea de cantidad.

Los números más sencillos que se pueden considerar son los *números naturales*: uno, dos, tres, etc. Junto con sus operaciones, suma, resta, multiplicación y división, han significado para el hombre poderosas herramientas que le han permitido avanzar en la senda de la civilización. No solo aprendió a llevar la contabilidad de miembros y pertenencias, tan necesaria para la supervivencia de los grupos sociales, sino que también comprendió que con los números era posible prever muchos acontecimientos relacionados con las creencias, como los ciclos del sol y la luna, o las cosechas. El hombre cayó también en la cuenta de que cualquiera que fuese el número natural considerado siempre era posible concebir otro mayor; para conciliar esta asombrosa idea con la razón hubo que llegar a la abstracción del infinito y admitir que existe un número infinito de números naturales. De ahí surge la necesidad de idear algún procedimiento que permita representar de manera sistemática todos los posibles números, es decir, es preciso disponer de un sistema de numeración. A lo largo de la historia se han utilizado diversos sistemas de numeración, como el conocido sistema de numeración romano, que utiliza letras para representar los números. Actualmente, se emplea de manera prácticamente universal el conocido sistema posicional indoarábigo, denominado sistema decimal por utilizar diez símbolos para representar los números, y en el cual el valor que se asigna a cada símbolo depende de su posición respecto de los demás. Esta manera de contar es bastante natural. Los hombres aprendieron pronto que, para enumerar un conjunto con muchos elementos, es preferible agrupar los objetos en conjuntos menores. Llama la atención el uso del cero, que puede parecer hoy banal y evidente, pero exige un grado de abstracción mayor que las demás cifras, ¿qué motivo puede haber para nombrar lo que no existe? Por ello, su aparición en la historia es mucho más tardía y evidencia un hecho frecuente en el devenir del pensamiento: las soluciones más simples y manejables de los problemas suelen estar asociadas a los conceptos más abstractos.

Entre las necesidades de cálculo del hombre primitivo que descubrió los números naturales y las del hombre culturizado hay diferencias radicales. El hombre rupestre vivía sometido a la naturaleza, sus necesidades eran elementales, mientras que el hombre de hoy vive en un mundo dominado por las creaciones del propio hombre; su mundo está gobernado por conceptos y abstracciones. No es difícil imaginar cómo, en algún momento del transcurrir de la historia, el hombre descubrió que para medir ciertas magnitudes es conveniente considerar su variación en un sentido y otro, por encima y por debajo de un origen prefijado. Por ejemplo, si los reintegros son superiores a los ingresos, una cuenta corriente tendrá saldo negativo y el banco seguirá calculando dichas cantidades en números rojos para controlar exactamente la deuda. Las matemáticas proporcionan una manera de tratar las cantidades en números rojos.

Consiste en anteponer al número el signo menos e interpretarlo como la cantidad que falta para alcanzar el origen de la escala de que se trate. Estos números se llaman negativos. De esta forma se construye el conjunto de *números enteros* que proviene de incorporar a los números ya conocidos, los naturales y el cero, otros números que permiten expresar unas cantidades un tanto extrañas, aquellas que se consideran negativas, pero imprescindibles a partir de cierta complicación del modo de vida. Las operaciones aritméticas conocidas para los números naturales se extienden sin dificultad a los números enteros. Ello abre paso al Álgebra, poderosa herramienta que enseña a calcular con expresiones literales. De esta forma es posible enunciar y demostrar de manera formal diversas propiedades de las operaciones con los números.

Las unidades de medida de algunas magnitudes como la longitud, superficie, masa, capacidad, etc., pueden subdividirse en tantas partes iguales como se desee. Entonces, el problema de repartir una cantidad de manera equitativa puede no tener solución en el conjunto de números enteros, ya que el cociente entre dos números enteros cualesquiera no es necesariamente un número entero. Esta dificultad se resuelve tomando como nueva unidad de medida una parte o *fracción* de la unidad inicial. Los números que representan esas cantidades fraccionarias se denominan *números racionales o fraccionarios* y dan lugar a un nuevo conjunto de números que históricamente se han denominado *quebrados* y se han representado de una forma característica como un par de números enteros separados por una barra o línea, en donde el primero se llama *numerador* y el segundo *denominador*. Con la utilización de los medios electrónicos de cálculo, actualmente es más frecuente utilizar la representación decimal de las fracciones, en la cual el número se escribe en el sistema decimal y se marca con una coma, o un punto según los distintos convenios que se utilizan internacionalmente, el lugar de las unidades enteras, entendiéndose que la parte que figura a la derecha de la coma es la parte decimal. Las operaciones aritméticas habituales también se extienden de forma sencilla al caso de los números fraccionarios.

Los números fraccionarios no solucionan definitivamente las necesidades de cálculo del hombre. Desde antiguo, es conocida la existencia de números que no se pueden expresar como fracciones. Aparecen al tratar de resolver muchos problemas de medida, como puede ser medir la diagonal de un cuadrado con unidad de medida igual a su lado, o bien medir la longitud de una circunferencia con unidad de medida igual a su diámetro. Problemas de este tipo fueron planteados en la antigüedad y no tienen solución con los números naturales, enteros y fraccionarios. Este hecho causó una gran consternación a los matemáticos griegos, pues les indicaba que para tomar la medida de ciertas longitudes era forzoso añadir nuevos números que consideraron *irracionales*. Hoy en día, superada hace tiempo dicha dificultad, es preciso familiarizarse con este sistema ampliado de números, llamados *números reales*. Sin ellos, no se pueden resolver un problema tan sencillo como hallar un número que multiplicado por sí mismo resulte igual a 2, cuya respuesta es raíz cuadrada de 2 y no se trata de un número fraccionario, ni evitar que el borde de las reglas esté plagado de huecos cuya posición es inexpresable numéricamente, bien entendido que serán huecos puntuales puesto que habrá números racionales tan próximos a cualquiera de ellos como se desee; uno de dichos huecos estará ocupado por el famoso número p, que da el cociente entra la longitud de una circunferencia y su diámetro. Una vez introducido el concepto de número real, las operaciones con los números reales son una extensión de las correspondientes operaciones con los números racionales. Además de las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división, hay otras operaciones, extensiones de las básicas, como la potenciación y la radicación, que son imprescindibles para muchos fines y adquieren su plena vigencia en el marco de los números reales.

Con los números y sus operaciones se pueden resolver muchos problemas que se plantean en la vida cotidiana. Sin embargo, existen muchas situaciones reales en las que los problemas de cálculo que se presentan tienen un mayor nivel de complejidad. Son aquéllas en las que no sólo hay que operar con números, sino que hay que encontrar el número, o los números, desconocido que verifica determinadas condiciones, o criterios, relativos a la situación real que se está analizando. Las matemáticas nos ofrecen una poderosa herramienta para ayudarnos a resolver estas situaciones: las *ecuaciones*. Saber plantear y resolver ecuaciones es una de las actividades matemáticas con mayor número de aplicaciones en la vida real.

En síntesis, los números sirven para hacer recuentos, facilitan la comprensión del tamaño relativo de las cosas, identifican las regularidades numéricas observables en el mundo real y permiten realizar cálculos y medidas. En la vida real, ideas como longitud, peso, área, volumen, velocidad, masa, presión del aire, valor monetario de un objeto, cobran forma material mediante medidas y, en definitiva, números. Por ello, un aspecto de vital importancia para manejar la idea de cantidad de manera competente es desarrollar el razonamiento cuantitativo, entre cuyos elementos fundamentales pueden señalarse los siguientes:

- Poseer sentido numérico.
- Comprender el significado de las operaciones aritméticas.
- Saber realizar cálculos de manera elegante y ser hábil en el cálculo mental.
- Tener facilidad para estimar cantidades.
- Entender en qué contextos es necesario utilizar los diferentes conjuntos de números.
- Traducir situaciones reales al lenguaje de las ecuaciones y saber encontrar las correspondientes soluciones.

Geometría: estudio del espacio y las formas

El espacio es el ámbito en que habita el ser humano. La evidencia empírica nos enseña que el espacio tiene carácter tridimensional. Situados en el espacio se encuentran los objetos del mundo real. El ser racional se interesa por conocer sus propiedades y posiciones relativas. Por otra parte, los objetos cambian de posición en el espacio por lo que es preciso disponer de herramientas para entender esta dinámica. De todas estas cuestiones se ocupan las matemáticas.

Una propiedad importante de los objetos es la de poseer una determinada forma. Y es también una evidencia que muchas formas presentan ciertas regularidades: las casas, las hojas de los árboles, las sombras. Las regularidades geométricas pueden servir como modelos matemáticos, relativamente sencillos, adecuados para estudiar muchos tipos de fenómenos.

La forma es un ámbito matemático que posee un vínculo muy estrecho con la Geometría, etimológicamente *medida de la tierra*, que es una de las actividades matemáticas más antiguas, pues fue iniciada por las civilizaciones egipcia y babilónica y alcanzó un notable desarrollo en la cultura griega, culminando con Euclides (siglo IV AC), cuyos *Elementos* aún se reeditan y se consideran un hito en la historia de las matemáticas. Basándose en el trabajo de sus predecesores, el propósito y el gran logro de Euclides consistió en deducir a partir de un pequeño número de postulados o axiomas, tomados como verdades evidentes, gran número de teoremas que expresan propiedades de diversas figuras geométricas simples: rectas, ángulos, triángulos, círculos, etc., describen las relaciones que existen entre ellas y analizan las transformaciones a que pueden ser sometidas: traslaciones, simetrías, giros, etc.

Durante siglos, y hasta época bien reciente, ha sido materia de estudio este tipo de geometría que puede calificarse de intrínseca, en el sentido de que no tiene apenas relaciones explícitas con otras ramas de las Matemáticas y no utiliza en su metodología nada ajeno a su propio campo de estudio. La conexión de la Geometría con otras disciplinas matemáticas, en particular el Álgebra o, dicho con otras palabras, la introducción sistemática de los números en el quehacer de la Geometría, fue algo que tuvo que esperar hasta el siglo XVII, cuando Descartes, en un apéndice a su *Discurso sobre el método* propuso utilizar un sistema de referencia, ahora llamado en su honor *cartesiano,* para referir a él los puntos, mediante coordenadas numéricas y, a través de los puntos, cualquier figura geométrica. Al utilizar este procedimiento, los problemas de geometría elemental permiten un tratamiento unificado, que consiste en gran parte en la realización de cálculos y resolución de ecuaciones, y no exige el ingenio que, con frecuencia, se necesita para utilizar los métodos intrínsecos.

Esta auténtica revolución con la que Descartes inició lo que se ha conocido desde entonces como Geometría analítica, forma actualmente parte inexcusable del saber matemático. El punto de partida es comprender la idea de sistema de referencia que permite expresar los puntos del plano, o el espacio, mediante unas determinadas coordenadas numéricas, es decir, se identifica un punto del plano, o el espacio, mediante un determinado par, o triplete, de números reales, que se llaman sus coordenadas. Esta feliz idea permite convertir las figuras geométricas en ecuaciones que pueden tratarse mediante los métodos del Álgebra y la Aritmética. En particular, una recta queda identificada mediante una ecuación de primer grado, de dos o tres variables según se trate del plano o del espacio. De esta forma, la posición relativa de dos rectas, en particular los conceptos de perpendicularidad y paralelismo, se aborda estudiando el sistema de ecuaciones que forman sus respectivas ecuaciones.

La misma metodología se utiliza para describir los polígonos y curvas como la circunferencia. Estas formas se identifican mediante las ecuaciones que las definen y el cálculo de sus propiedades geométricas, como el perímetro y superficie, se convierten en simples problemas algebraicos.

En síntesis, los principales aspectos de la idea clave espacio y forma y su traducción geométrica son los siguientes:

- Comprender el sistema de coordenadas cartesiano para representar un plano.
- Identificar los objetos geométricos, como las rectas, polígonos y circunferencias mediante las ecuaciones que las definen.
- Responder a cuestiones sobre las posiciones relativas de las rectas, perpendicularidad o paralelismo, mediante procedimientos algebraicos.
- Calcular perímetros, longitudes, o áreas mediante procedimientos algebraicos.

Funciones: estudio del cambio

Los fenómenos del mundo real transcurren en el tiempo. En un hecho que el tiempo cambia las cosas y transforma objetos de una clase en objetos de otra clase. Por ejemplo, los organismos vivos crecen, el agua cambia de estado, la meteorología cambia la temperatura, etc. Como se ha señalado anteriormente, las aplicaciones son el patrón que utilizan las matemáticas para sintetizar aquello que tienen en común muchas transformaciones que se pueden observar en diferentes disciplinas científicas. Un caso particular de aplicación es el concepto de función, que ocupa un lugar muy destacado en el saber matemático.

El análisis de funciones es uno de los capítulos más fructíferos de la matemática, tanto por los conceptos que desarrolla, como por la ingente cantidad de aplicaciones que dichos conceptos tienen en la práctica. Conocido también como Análisis matemático, Cálculo infinitesimal o Teoría de funciones, comenzó a desarrollarse de la mano de Newton y Leibniz en el apogeo de la revolución científica que conmovía, a mediados del siglo XVII, los fundamentos de la Astronomía, la Física y la Química y se extendería más tarde a las Ciencias naturales.

Aunque los ejemplos de funciones habían estado presentes a lo largo de toda la historia de las matemáticas, lo que supuso una verdadera revolución científica fue el descubrimiento de métodos adecuados para analizar cualquier tipo de función, lo cual permitió su uso permanente en todas las ramas de la ciencia.

Descartes había sentado poco antes las bases de la Geometría analítica que hacía posible la representación de una amplia variedad de curvas, y la situación era propicia para abordar dos problemas matemáticos básicos: la determinación de la tangente a una curva y el cálculo del área encerrada por una curva. Casi simultáneamente Newton y Leibniz sentaron las bases para resolver dichos problemas; a partir de ahí, los avances realizados por Jacob y Johann Bernouilli, Taylor, Euler y Lagrange, en el plazo de un siglo, dieron al Análisis matemático un auge que pocas ramas de la matemática habían conseguido nunca. Desde entonces no ha cesado su desarrollo y se ha convertido en la actividad matemática más primordial tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Paradójicamente, el concepto básico de la Teoría de funciones, el propio concepto de función matemática, no llegó a aclararse totalmente hasta principios del siglo XX y ello tras controversias, en algunos momentos muy vivas, sobre qué cosas debían recibir tal nombre y, sobre todo, cuáles debían quedar excluidas. Al final la solución fue adoptar una definición muy general que entiende como función entre dos magnitudes X e Y un método tal que para cualquier valor x de la primera magnitud permita determinar el correspondiente valor y de la segunda.

El estudio del campo es muy amplio y exige familiarizarse con cierto bagaje técnico, por lo que la alfabetización matemática debe limitarse a exponer algunas ideas básicas del Análisis de funciones. Como punto de partida, hay que precisar el concepto de función y algunas de sus características generales como son las ideas de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Un paso más avanzado son las ideas de límite y continuidad, junto el concepto de derivada por su relevante utilización en la resolución de modelos matemáticos con numerosas aplicaciones.

El cambio y las funciones se pueden representar visualmente de muy diversas maneras: numérica, simbólica o gráficamente. Pasar de un tipo de representación a otra tiene una importancia capital, como también la tiene reconocer y comprender las relaciones y los tipos de cambio fundamentales. Algunos procesos de cambio llevan implícito funciones matemáticas sencillas que pueden utilizarse para describirlos o modelarlos: funciones lineales, exponenciales, periódicas, cuyo conocimiento es muy ilustrativo.

En síntesis, los principales aspectos de la idea clave del cambio y las funciones requiere:

- Representar cambios de una forma comprensible.
- Comprender los tipos de cambio fundamentales.
- Reconocer tipos concretos de cambio cuando estos se produzcan.
- Dominar el concepto de función y sus características básicas.
- Familiarizarse con algunas funciones básicas que se observan en los fenómenos naturales.

Probabilidad y Estadística: estudio del azar y la incertidumbre

El Cálculo de probabilidades y la Estadística conforma el saber matemático que más se ha desarrollado en los últimos años. Ambas disciplinas nacen sin relación aparente entre sí. El Cálculo de probabilidades surge del interés por los juegos de azar, mientras que la Estadística nace como auxiliar de la Ciencia política para ayudar en la toma de decisiones sobre el gobierno de las naciones.

Desde la antigüedad, el hombre ha conocido los juegos de azar y se ha sentido fascinado por ellos. El resultado de lanzar dos dados, que es incierto aunque el lanzamiento se realice en idénticas condiciones, se atribuyó a un mito: el Azar. Se gestó así en la razón la idea de probabilidad, como antes se había desarrollado el concepto de número.

Las primeras noticias que se tiene sobre el intento de hacer racional la idea de probabilidad y de establecer reglas para calcular probabilidades se remontan al siglo XVI, en el que Cardano y Galileo consideraron la probabilidad como una característica numérica de los resultados posibles. El pensamiento matemático cayó en la cuenta de que existen muchos fenómenos, más allá de los juegos de dados, cuyo comportamiento viene gobernado por el Azar. Por ejemplo, no es posible predecir con total exactitud cuántas niñas nacerán en una ciudad en el año próximo, o el tiempo que tardará en fallar una determinada pieza de una máquina. Fenómenos de este tipo se denominan *aleatorios* y sólo pueden ser modelados suponiendo que es la voluntad del Azar la que determina cuando ocurrirán. El saber matemático que los estudia se denomina Cálculo de probabilidades. Lo fascinante es que, aunque el resultado concreto de una observación es impredecible, se pueden hacer afirmaciones significativas sobre el fenómeno.

Por su parte, la Estadística nace para ayudar a los gobernantes a tomar decisiones acertadas, proporcionando métodos para describir las riquezas y los medios de que disponen las naciones. Por este motivo, en el siglo XVII nació como *aritmética política*, aunque más adelante se impuso el nombre de Estadística, es decir, *Ciencia del Estado*.

Los estudios astronómicos impulsaron también las indagaciones estadísticas. Astrónomos, como Laplace (1749-1829) y Gauss (1777-1855) fueron los primeros en estudiar el problema de los errores de medida, es decir, por afinados que estuvieran los instrumentos, diferentes observaciones de la misma magnitud daban lugar a distintas medidas. En sus trabajos, Gauss obtuvo la distribución de los errores conocida actualmente como distribución normal. Otro matemático y astrónomo belga, Adolphe Quetelet (1796–1874), aplicó la ley de los errores a datos antropométricos y sociales, dando origen a la Biometría y la Sociometría. Durante la segunda mitad del siglo XIX, los métodos estadísticos se aplican a las investigaciones biológicas. Entre los que contribuyeron a este progreso se cuentan a Francis Galton (1822-1911), sobrino de Darwin, que inspirado por sus estudios sobre la herencia introdujo los conceptos de regresión y correlación, y a Karl Pearson (1857–1936) que continuó los trabajos de Galton sobre selección natural.

Al final del siglo XIX y principios del XX se plantea un nuevo problema que lleva al encuentro de ambas disciplinas; es el problema de la *inferencia estadística*. Si se quiere obtener información sobre cierta característica de una población y medimos su valor en todos los miembros de la población, la Estadística nos ayudará a sistematizar los datos y descubrir información útil. Pero examinar todos los miembros de la población puede ser una tarea muy ardua, incluso imposible o indeseable. Se plantea entonces la pregunta de si hay algún procedimiento para seleccionar un grupo de individuos de una población, de manera que se pueda confiar en que la información obtenida a partir de dicho grupo se pueda generalizar a todo el colectivo, o expresado de otra forma, si es posible seleccionar una parte que sea representativa de la totalidad. La respuesta a la pregunta anterior es afirmativa. La selección de un grupo representativo del total, hay que confiárselo al Azar. Ahora bien, hay que tener en cuenta que la elección mediante el Azar no asegura que una elección concreta del grupo represente adecuadamente al total, sino que, si aplicamos reiteradas veces ese procedimiento de elección, con gran frecuencia lograremos elegir partes prácticamente representativas del total. Entramos así en una nueva clase de afirmaciones donde, por ejemplo, si bien es incierto que la característica observada del grupo de individuos seleccionados tenga un valor próximo a la correspondiente a toda la población, podemos tener una elevada confianza en que no será muy diferente. Nace así una nueva forma de crear conocimiento matemático: la inferencia estadística.

Durante los primeros años del siglo XX, el objeto y los métodos de la Estadística se establecen con precisión y rigor matemático. Se inician las disciplinas que hoy denominamos diseño de experimentos, análisis de la varianza o contraste de hipótesis, que permiten plantear experimentos y analizar los resultados con el fin de extraer conclusiones significativas. Las fuentes de inspiración para estos trabajos siguen siendo la investigaciones biológicas y agrícolas. La personalidad culminante de esta época es sir Ronald Fisher (1890-1962), que trabajó en la estación agrícola experimental de Rothamsted. Las necesidades de los experimentos agrícolas y genéticos le impulsaron a crear nuevos conceptos y métodos estadísticos. En los últimos años del siglo XX, los razonamientos y métodos estadísticos se han aplicado a todas las ciencias, prácticamente sin excepción, desde la Medicina a la Ciencia de los computadores, sin olvidar la Filología, el Derecho o la Física teórica. El siglo XX ha sido el siglo de las masas, y su ciencia es la Estadística.

En el siglo XXI los avances tecnológicos han facilitado notablemente la obtención y almacenamiento de datos en formato digital, por lo que actualmente es posible disponer de bases de datos de gran tamaño que encierran información relevante para su propietario y que puede resultar valiosa para tomar mejores decisiones. Esto ha despertado un gran interés por desarrollar técnicas estadísticas para extraer la información desconocida que se oculta dentro de las grandes masas de datos, *Big Data*. La Estadística abre un nuevo frente que persigue este objetivo, desarrollando un nuevo enfoque denominado *Aprendizaje estadístico,* o bien de manera más sugestiva *Minería de datos*, es decir, búsqueda de la pieza interesante de información útil oculta en la montaña de datos.

La alfabetización matemática necesita conocer las ideas generales de ambas disciplinas y esbozar alguna de sus aplicaciones. En primer lugar, se necesita entender cómo son los fenómenos aleatorios, cuyo resultado es incierto, aunque las causas que los originan sean aparentemente idénticas. La observación de los fenómenos aleatorios sugiere la idea de probabilidad, como medio de apreciar y expresar el grado de confianza en que un acontecimiento sea el resultado de un fenómeno aleatorio. La parte de Estadística se centra en la Estadística descriptiva y las ideas para resumir la información contenida en grandes cantidades de datos de modo que, incluso a costa de perder cierto detalle o parte de esa información, lograr una descripción del colectivo, tanto gráfica como numérica, que sea útil y proporcione información relevante.

En síntesis, los aspectos clave sobre la incertidumbre y el manejo de datos son los siguientes:

- La omnipresencia de la variación en los procesos.
- La cuantificación de la variación.
- La explicación de la variación.
- La producción de datos.
- El análisis de datos y su presentación/visualización.
- La probabilidad.
- La inferencia estadística.
- La utilidad de las grandes masas de datos y su posible explotación.

FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL CURSO DE ACCESO DIRECTO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA.

El curso de acceso directo a la universidad para mayores de 25 años (CAD)

La legislación española[2] permite el acceso a los estudios universitarios a personas mayores de 25 años que no estando en posesión de ningún título o estudio que conceda el acceso tradicional a la Universidad (PAU, selectividad, formación profesional, diplomatura, licenciatura, etc.) superen una prueba regulada según la Orden Ministerial[3] que desarrolla dicha legislación universitaria.

La UNED ofrece un curso expresamente diseñado para la superación de la prueba de acceso. A lo largo de los años, este curso ha atraído la atención de numerosos

[2] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación; Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

[3] Orden ECD/1663/2016, de 11 de octubre, por la que se regulan las pruebas de acceso a la universidad de las personas mayores de 25 o de 45 años de edad, así como el acceso mediante acreditación de experiencia laboral o profesional, en el ámbito de la Universidad Nacional de Educación a Distancia.

estudiantes, contándose por centenares de miles los alumnos matriculados, y ha configurado una auténtica opción de calidad para facilitar el acceso a la educación superior a un elevado número de ciudadanos, quienes de otra forma se verían imposibilitados para asistir a las aulas universitarias y mejorar su formación y cultura.

Los contenidos formales del curso han variado a lo largo de los años adaptándose a las modificaciones legales y administrativas, pero, esencialmente, su estructura troncal se ha dispuesto alrededor de tres ejes principales asociados a los tres lenguajes imprescindibles para disponer de una adecuada formación preuniversitaria: el lenguaje básico o lengua castellana, el lenguaje internacional o idioma extranjero, y el lenguaje científico o matemáticas. Las materias anteriores se completan con otras opciones que permiten al estudiante orientar su formación hacia el ámbito o especialidad de la carrera universitaria que desea cursar.

La asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

El eje matemático se oferta en dos opciones: una dirigida a los alumnos que desean seguir una carrera del área científico-tecnológico, y otra cuya vocación es dotar de una cultura matemática más generalista a todos los demás estudiantes, es decir, a aquellos que se orientan a estudios del ámbito de las humanidades, ciencias económicas, jurídicas, políticas, educación, piscología, educación, etc.

Esta segunda opción ha tenido distintas denominaciones en años pasados. Su nombre actual es *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Sus objetivos pretenden que los estudiantes adquieran la disciplina y el rigor precisos para el trabajo intelectual, fomenten y desarrollen su capacidad para el razonamiento abstracto, adquieran los conocimientos matemáticos imprescindibles para un universitario, potencien sus habilidades de cálculo más allá de las reglas elementales. y, en definitiva, se inicien en el estudio de los temas matemáticos con mayor aplicación en el campo de las humanidades, las ciencias sociales y las ciencias del comportamiento.

Los contenidos de la asignatura se ajustan a los epígrafes descritos en el apartado anterior dedicado al saber matemático y se desarrollan en un texto base (Ramos, Hernández y Vélez, 2019) cuyos capítulos llevan por título Fundamentos, Aritmética y Álgebra. Geometría, Funciones, Probabilidad y Estadística. Además, dicho texto incluye un apartado final denominado *Desarrollo de la competencia matemática* en el que se presenta un conjunto de actividades de carácter práctico para cuya resolución es preciso poner en acción tanto los conocimientos como las capacidades propias de las Matemáticas. El texto base incluye también un buen número de cuestiones semejantes a las que se proponen en las evaluaciones. Algunas cuestiones tienen carácter teórico y sirven para repasar los conceptos y resultados estudiados y otras tienen carácter práctico y para su resolución puede ser preciso utilizar conceptos y resultados estudiados en varios capítulos.

La evaluación de la asignatura incluye pruebas de evaluación continua y pruebas presenciales. Todos los cuestionarios de examen tienen el mismo formato y se evalúan del mismo modo. El formato de los exámenes consiste en una prueba objetiva (test) con 10 cuestiones similares a las propuestas y resueltas en el texto base. Cada cuestión consta de un enunciado cuya respuesta es una de las tres posibles alternativas a), b) o c), que se ofrecen. El alumno debe elegir la alternativa que considere correcta. Solamente una de las alternativas es correcta. El único material auxiliar que se puede utilizar en las pruebas presenciales es una calculadora. Las respuestas se codifican en una hoja de marcas ópticas que se lee automáticamente con el concurso de un scanner y se valoran como *correctas* en el caso de que el estudiante marque solamente la opción correcta, *incorrectas*, si marca solamente una de las dos opciones no correctas y *nulas* en cualquier otro caso, es decir, si deja la respuesta sin marcar o bien responde con más de una opción. La valoración numérica asociada, a efectos de calcular la puntuación que integra la calificación global del alumno, es 1 punto para las respuestas correctas, –0.25 puntos para las respuestas incorrectas y 0 puntos para las respuestas nulas.

Los criterios para la superación de la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años han ido cambiando a lo largo de los años. En la actualidad los alumnos deben matricularse de un total de cinco asignaturas, cada una de las cuales otorga una calificación entre cero y diez puntos. Tres de ellas (lengua española, comentario de texto e idioma extranjero) configuran la fase común. Las otras dos han de ser elegidas de acuerdo con la carrera que se desee cursar y configuran la fase específica, siendo necesario que una de ellas sea las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en el caso de alumnos que desean cursar una carrera del área de ciencias sociales y de ciencias de la salud. Para cada fase se calcula la nota media de las asignaturas que la integran, admitiéndose que el no presentado es equivalente a un cero. Para superar la prueba de acceso la nota media de cada fase ha de ser como mínimo 4 puntos y la nota media final, que resulta de la media de ambas fases, ha de ser superior a 5.

Algunas estadísticas sobre la formación matemática de los estudiantes del curso de acceso para mayores de 25 años

Presentamos en este apartado algunas estadísticas sobre la formación matemática que alcanzan los estudiantes que han seguido la asignatura de Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales del curso de acceso para mayores de 25 años, referidas a los cursos 2009-2010 al 2021-2022, sin considerar el 2019-2020 en el cual tanto el desarrollo del curso como los exámenes presenciales se vieron afectados por la pandemia.

Como se ha indicado anteriormente, los estudiantes realizan a lo largo del curso diversas pruebas de evaluación, tanto de carácter no presencial como presencial. Como se sigue de los criterios de superación de la prueba de acceso ninguna de ellas es obligatoria. Por otra parte, la complejidad del sistema de pruebas presenciales característico de la UNED hace preciso utilizar en cada convocatoria numerosos formularios de examen, tanto particularizados para los diferentes husos horarios en que se encuentran los centros asociados, como adaptados a algunas situaciones individuales de los alumnos (centros penitenciarios, discapacidad, etc.). Por ello, a fin de uniformizar la metodología de análisis estadístico, los datos que se van a incluir en el análisis se refieren únicamente al examen presencial de junio que se ha utilizado cada curso de forma conjunta en la misma sesión en todos los centros de España y la Unión Europea. Este formulario de examen es el que ha sido respondido por un mayor número de alumnos en cada convocatoria y puede considerarse el mejor representante de las propiedades y grado de dificultad de los exámenes que se utilizan en la asignatura. Todos los formularios de examen constan de diez cuestiones. Aunque, como ya se ha señalado anteriormente, no resulta sencillo separar las ideas clave que configuran el pensamiento matemático, con carácter general cada formulario incluye dos preguntas particularmente relacionadas con cada uno de los saberes matemáticos.

Cuadro 1. Número de estudiantes que realizaron el examen en la sesión general de la prueba presencial de junio en los centros asociados de España y la UE en los años 2010-2022 (excepto 2020).

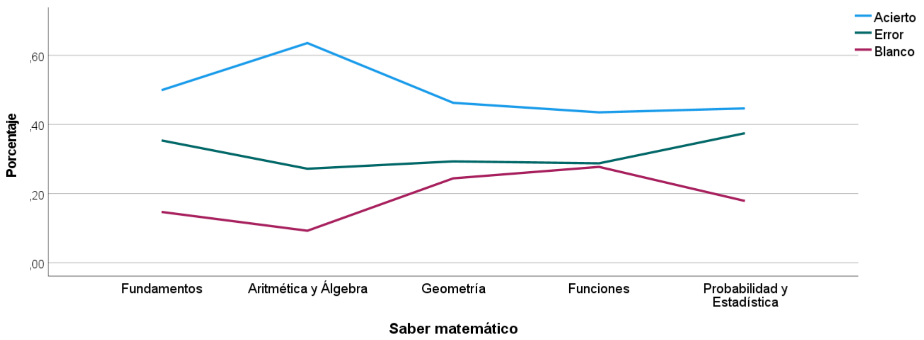
Año	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
2010	2821	16.32	16.32
2011	2382	13.78	30.09
2012	1763	10.20	40.29
2013	1221	7.06	47.35
2014	1460	8.44	55.80
2015	1111	6.43	62.22
2016	869	5.03	67.25
2017	825	4.77	72.02
2018	544	3.15	75.16
2019	1010	5.84	81.01
2021	1692	9.79	90.79
2022	1592	9.21	100.00
Total	17290	100.0	

El cuadro 1 muestra el número de estudiantes que se presentaron en la convocatoria de junio a la prueba presencial en los centros asociados de la UNED de España y UE entre los años 2010-2022, exceptuando el año de la pandemia 2020. Se observa un decrecimiento desde el año 2010 al 2018, en paralelo al número de alumnos matriculados en el Curso de Acceso para Mayores de 25 años, motivado por diversas causas de las cuales la principal ha sido la introducción de una alternativa al curso, denominada prueba de acceso para mayores de 25 años, con algunas diferencias respecto al curso, en especial en lo referente al seguimiento y apoyo tutorial.

Se contabilizan en el cuadro un total de 17290 alumnos examinados presencialmente, lo cual supone 172900 cuestiones de tipo test, es decir, un total de 34580 preguntas de cada uno de los cinco saberes matemáticos.

El cuadro 2 muestra la distribución de la valoración (acierto, error, nulo) de las respuestas dadas por los estudiantes que se presentaron a la sesión general de la prueba presencial de junio en los centros de España y la UE en los años 2010-2022 (excepto 2020), clasificadas según la idea básica principal del saber matemático que es necesario para entender y resolver la cuestión planteada, y en la figura 2 se representa la posición relativa en porcentaje de dicha valoración.

Figura 2. Posición relativa en porcentaje de los aciertos, errores y nulos de las respuestas de las cuestiones propuetas en la sesión general de la prueba presencial de junio en los centros de España y de la UE en los años 2010-2022 (excepto 2020), clasificadas según la idea básica principal del saber matemático.



Cuadro 2. Distribución de la valoración de las respuestas de los exámenes la sesión general de la prueba presencial de junio en los centros asociados de España y la UE en los años 2010-2022 (excepto 2020) por ideas básicas del saber matemático.

SABER		Año																									
		2010		2011		2012		2013		2014		2015		2016		2017		2018		2019		2021		2022		Total	
		n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%
FUND	A	3268	57.92%	2590	54.37%	859	24.36%	733	30.02%	1418	48.56%	1482	66.70%	778	44.76%	886	53.70%	834	76.65%	1464	72.48%	1942	57.39%	1012	31.78%	17266	49.93%
	E	1839	32.59%	1443	30.29%	2015	57.15%	1185	48.53%	1151	39.42%	510	22.95%	630	36.25%	290	17.58%	217	19.94%	417	20.64%	943	27.87%	1594	50.06%	12234	35.38%
	N	535	9.48%	731	15.34%	652	18.49%	524	21.46%	351	12.02%	230	10.35%	330	18.99%	474	28.73%	37	3.40%	139	6.88%	499	14.75%	578	18.15%	5080	14.69%
	T	5642	100.00%	4764	100.00%	3526	100.00%	2442	100.00%	2920	100.00%	2222	100.00%	1738	100.00%	1650	100.00%	1088	100.00%	2020	100.00%	3384	100.00%	3184	100.00%	34580	100.00%
ARIT	A	4344	76.99%	2155	45.24%	2050	58.14%	1445	59.17%	1902	65.14%	1684	75.79%	992	57.08%	1135	68.79%	804	73.90%	1184	58.61%	2094	61.88%	2189	68.75%	21978	63.56%
y	E	1098	19.46%	1990	41.77%	1087	30.83%	826	33.82%	693	23.73%	396	17.82%	526	30.26%	353	21.39%	196	18.01%	673	33.32%	997	29.46%	568	17.84%	9403	27.19%
ALG	N	200	3.54%	619	12.99%	389	11.03%	171	7.00%	325	11.13%	142	6.39%	220	12.66%	162	9.82%	88	8.09%	163	8.07%	293	8.66%	427	13.41%	3199	9.25%
	T	5642	100.00%	4764	100.00%	3526	100.00%	2442	100.00%	2920	100.00%	2222	100.00%	1738	100.00%	1650	100.00%	1088	100.00%	2020	100.00%	3384	100.00%	3184	100.00%	34580	100.00%
GEO	A	3118	55.26%	3139	65.89%	1465	41.55%	1103	45.17%	1275	43.66%	660	29.70%	920	52.93%	530	32.12%	501	46.05%	714	35.35%	1146	33.87%	1428	44.85%	15999	46.27%
	E	1819	32.24%	939	19.71%	1413	40.07%	987	40.42%	849	29.08%	1024	46.08%	411	23.65%	539	32.67%	209	19.21%	492	24.36%	713	21.07%	744	23.37%	10139	29.32%
	N	705	12.50%	686	14.40%	648	18.38%	352	14.41%	796	27.26%	538	24.21%	407	23.42%	581	35.21%	378	34.74%	814	40.30%	1525	45.07%	1012	31.78%	8442	24.41%
	T	5642	100.00%	4764	100.00%	3526	100.00%	2442	100.00%	2920	100.00%	2222	100.00%	1738	100.00%	1650	100.00%	1088	100.00%	2020	100.00%	3384	100.00%	3184	100.00%	34580	100.00%
FUN	A	3462	61.36%	2015	42.30%	973	27.60%	1046	42.83%	811	27.77%	809	36.41%	432	24.86%	642	38.91%	294	27.02%	580	28.71%	1659	49.02%	2323	72.96%	15046	43.51%
	E	1118	19.82%	1797	37.72%	1179	33.44%	777	31.82%	1229	42.09%	346	15.57%	540	31.07%	342	20.73%	486	44.67%	510	25.25%	956	28.25%	665	20.89%	9945	28.76%
	N	1062	18.82%	952	19.98%	1374	38.97%	619	25.35%	880	30.14%	1067	48.02%	766	44.07%	666	40.36%	308	28.31%	930	46.04%	769	22.72%	196	6.16%	9589	27.73%
	T	5642	100.00%	4764	100.00%	3526	100.00%	2442	100.00%	2920	100.00%	2222	100.00%	1738	100.00%	1650	100.00%	1088	100.00%	2020	100.00%	3384	100.00%	3184	100.00%	34580	100.00%
PRO	A	1535	27.21%	2076	43.58%	1390	39.42%	953	39.03%	1418	48.56%	1407	63.32%	773	44.48%	941	57.03%	515	47.33%	1031	51.04%	2465	72.84%	938	29.46%	15442	44.66%
Y	E	2604	46.15%	2195	46.07%	1735	49.21%	1166	47.75%	838	28.70%	431	19.40%	782	44.99%	393	23.82%	310	28.49%	665	32.92%	499	14.75%	1340	42.09%	12958	37.47%
EST	N	1503	26.64%	493	10.35%	401	11.37%	323	13.23%	664	22.74%	384	17.28%	183	10.53%	316	19.15%	263	24.17%	324	16.04%	420	12.41%	906	28.45%	6180	17.87%
	T	5642	100.00%	4764	100.00%	3526	100.00%	2442	100.00%	2920	100.00%	2222	100.00%	1738	100.00%	1650	100.00%	1088	100.00%	2020	100.00%	3384	100.00%	3184	100.00%	34580	100.00%
TOTAL	A	15727	55.75%	11975	50.27%	6737	38.21%	5280	43.24%	6824	46.74%	6042	54.38%	3895	44.82%	4134	50.11%	2948	54.19%	4973	49.24%	9306	55.00%	7890	49.56%	85731	49.58%
	E	8478	30.05%	8364	35.11%	7429	42.14%	4941	40.47%	4760	32.60%	2707	24.37%	2889	33.25%	1917	23.24%	1418	26.07%	2757	27.30%	4108	24.28%	4911	30.85%	54679	31.62%
	N	4005	14.20%	3481	14.61%	3464	19.65%	1989	16.29%	3016	20.66%	2361	21.25%	1906	21.93%	2199	26.65%	1074	19.74%	2370	23.47%	3506	20.72%	3119	19.59%	32490	18.79%
	T	28210	100.00%	23820	100.00%	17630	100.00%	12210	100.00%	14600	100.00%	11110	100.00%	8690	100.00%	8250	100.00%	5440	100.00%	10100	100.00%	16920	100.00%	15920	100.00%	172900	100.00%

FUN: Fundamentos, ARIT y ALG: Aritmética y Álgebra; GEO: Geometría; PRO y EST: Estadística y Probabilidad. A: Acierto; E: Error; N: Nulo. n: número respuestas.

La lectura del cuadro 2 y la figura 2 nos conduce a algunas observaciones, entre las que destacamos a continuación aquellas que consideramos más relevantes. En primer lugar, hay que señalar que, en conjunto, el porcentaje de aciertos en cada saber alcanza el 49.93% en Fundamentos, el 63,56% en Aritmética y Algebra, el 46,26% en Geometría, el 43,51% en Funciones y el 49,58% en Estadística y Probabilidad. Teniendo presente las características de la prueba presencial, en concreto que no es estrictamente obligatoria y que en la puntuación se penalizan los errores, podemos aceptar que los valores anteriores indican una formación suficiente en todos los saberes matemáticos de la población analizada.

El saber en el que los estudiantes presentan mayor fortaleza es, sin duda, Aritmética y Álgebra, es decir, el ámbito de los números y los cálculos, sin duda la actividad matemática con mayor antigüedad en la historia de la civilización. También es notable la formación en el campo de los Fundamentos que engloba la lógica proposicional y los razonamientos, junto con la teoría de conjuntos fundamento del edificio matemático. Estas dos ideas básicas del quehacer matemático configuran, sin duda, el bagaje más importante de la formación preuniversitaria que necesitan quienes orientan su vocación hacia las humanidades, las ciencias sociales y las ciencias del comportamiento. El área de Estadística y Probabilidad complementa notablemente dicha formación, pues alcanza también un nivel de aciertos satisfactorio. Por su parte, los saberes más complejos como la Geometría y las Funciones presentan un porcentaje de aciertos ligeramente inferior al resto, que probablemente obedece a diversas causas, entre las que podemos destacar, el mayor nivel de dificultad técnico y la vocación de los estudiantes.

En cuanto a las respuestas erróneas o nulas, se observa un patrón característico, resultando siempre que se producen más errores que nulos. Los porcentajes concretos están en consonancia con la proporción de aciertos de cada saber indicados anteriormente.

Si analizamos los datos desde el punto de vista del estudiante podemos estimar el nivel de formación matemática del colectivo en los distintos saberes matemáticos. En cada prueba presencial el estudiante se enfrenta a dos cuestiones de cada saber. Podemos considerar que el estudiante muestra una formación básica en un saber si responde con acierto al menos a una de las preguntas del examen relativas a dicho saber, mientras que muestra una formación avanzada si responde con acierto a las dos cuestiones. En el cuadro 3 se muestran las posibles combinaciones de los cinco saberes matemáticos junto con las frecuencias absolutas y los porcentajes de estudiantes que presentan, respectivamente, una formación básica y avanzada en dicha combinación.

De la lectura del cuadro 3 podemos deducir que la formación del colectivo en las distintas combinaciones de los saberes es, en general, aceptable. Se observan de nuevo los patrones encontrados en el cuadro 2, en relación con las fortalezas y debilidades de los estudiantes al enfrentarse con los distintos saberes. Cabe señalar que un 23,4% del colectivo tiene una formación básica en todos los ámbitos de las matemáticas, mientras que un 2% de la población muestra una excelente formación matemática.

Cuadro 3 Frecuencia y porcentaje del número de estudiantes del colectivo de 17290 presentados a la sesión general de la prueba presencial de junio en los centros asociados de España y la UE en los años 2010-2022 (excepto 2020) que respondieron con acierto al menos a una cuestión, o a las dos cuestiones, relativas a cada combinación de ideas base del pensamiento matemático.

SABER MATEMÁTICO	NIVEL DE FORMACIÓN MATEMÁTICA				
	Básica			Alta	
	Aciertos > = 1			Aciertos > = 2	
	N	%		N	%
Fundamentos	12541	72.5%		4725	27.3%
Aritmética y Álgebra	14676	84.9%		7302	42.2%
Geometría	11526	66.7%		4473	25.9%
Fundamentos	10865	62.8%		4181	24.2%
Probabilidad y Estadística	11623	67.2%		3819	22.1%
Fundamentos-Aritmética y Álgebra	10832	62.6%		2532	14.6%
Fundamentos-Geometría	8675	50.2%		1770	10.2%
Fundamentos-Funciones	8152	47.1%		1551	9.0%
Fundamentos-Probabilidad y Estadística	8845	51.2%		1585	9.2%
Aritmética y Álgebra-Geometría	10003	57.9%		2350	13.6%
Aritmética y Álgebra-Funciones	9443	54.6%		2508	14.5%
Aritmética y Álgebra-Probabilidad y Estadística	10092	58.4%		1969	11.4%
Geometría-Funciones	7911	45.8%		1823	10.5%
Geometría-Probabilidad y Estadística	7986	46.2%		1472	8.5%
Funciones-Probabilidad y Estadística	7566	43.8%		1216	7.0%
Fundamentos-Aritmética y Álgebra-Geometría	7614	44.0%		1125	6.5%
Fundamentos-Aritmética y Álgebra-Funciones	7153	41.4%		1099	6.4%
Fundamentos-Aritmética y Álgebra-Probabilidad y Estadística	7766	44.9%		988	5.7%
Fundamentos-Geometría-Funciones	6155	35.6%		922	5.3%
Fundamentos-Geometría-Probabilidad y Estadística	6238	36.1%		803	4.6%
Fundamentos-Funciones-Probabilidad y Estadística	5922	34.3%		676	3.9%
Aritmética y Álgebra-Geometría-Funciones	6964	40.3%		1262	7.3%
Aritmética y Álgebra-Geometría-Probabilidad y Estadística	7026	40.6%		873	5.0%
Aritmética y Álgebra-Funciones-Probabilidad y Estadística	6650	38.5%		808	4.7%
Geometría-Funciones-Probabilidad y Estadística	5608	32.4%		728	4.2%
Fundamentos-Aritmética y Álgebra-Geometría-Funciones	5459	31.6%		701	4.1%
Fundamentos-Aritmética y Álgebra-Geometría-Probabilidad y Estadística	5537	32.0%		535	3.1%
Fundamentos-Aritmética y Álgebra-Funciones-Probabilidad y Estadística	5250	30.4%		501	2.9%
Fundamentos-Geometría-Funciones-Probabilidad y Estadística	4524	26.2%		461	2.7%
Aritmética y Álgebra-Geometría-Funciones-Probabilidad y Estadística	4986	28.8%		520	3.0%
Fundamentos-Aritmética y Álgebra-Geometría-Funciones-Probabilidad y Estadística	4051	23.4%		352	2.0%

CONCLUSIÓN

Las Matemáticas son una de las creaciones más extraordinarias de la mente humana. Sin su concurso la civilización actual del hombre sería inconcebible. Cualquier persona que aspire a tener un desarrollo intelectual adecuado para vivir plenamente en la sociedad de hoy en día tiene necesariamente que incorporar a su bagaje de conocimientos una relevante componente del saber matemático.

Las reflexiones anteriores están especialmente indicadas para aquellos ciudadanos que aspiran a iniciar una carrera universitaria, cualquiera que sea el campo de conocimiento por el que se sienta atraído. La Universidad Nacional de Educación a Distancia ha sido consciente de esta necesidad a lo largo de sus ya cincuenta años de existencia. Por ello, siempre ha incluido en su oferta de estudios un curso para la preparación de la prueba de acceso a la universidad, dirigido de forma particular a personas mayores de 25 años que, en su momento, no pudieron completar los requisitos para acceder a la enseñanza superior. Un objetivo esencial de dicho curso es ayudar a los futuros universitarios a aprender a manejar la capacidad de abstracción y conceptualización, a argumentar con sentido lógico, a analizar y sintetizar teorías y, en síntesis, a desarrollar la cualidad que distingue al ser humano: la razón. Para ello, el mejor instrumento son las Matemáticas. Acercarse a ellas con curiosidad intelectual y con la mente abierta para adentrarse en los retos de la disciplina les dotará sin duda de una poderosa herramienta intelectual para abordar con confianza los problemas y situaciones que se presentan en la vida cotidiana. Por ello, la comprensión profunda del proceso de matematización y el estudio detenido de los saberes matemáticos es la mejor recomendación que pueden seguir quienes se inician en el estudio de un grado universitario.

REFERENCIAS

Leví, G. y E. Ramos (2012): La competencia matemática, En Medina (Ed,): Formación y desarrollo de las competencias básicas, Universitas, Madrid.

National Council of Theachers of Mathematics (2000). Principios y Estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ramos E.; V. Hernández y R. Vélez (2019): Introducción a las Matemáticas. Acceso a la Universidad. Madrid: Ed. Sanz y Torres.

Ramos, E; G. Leví, R. Vélez; V. Hernández; J. Navarro; E. Carmena y J.A. Carrillo (2010): Competencias en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales y su Evaluación Inteligente, En M. Santamaría y A. Sánchez-Elvira (coord.): Avances en la adaptación de la UNED al EESS. II Redes de investigación en innovación docente 2007/2008, Madrid: UNED, Colección Ciencias Sociales y Jurídicas.

Webgrafía

Legislación (2006a). LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf

Legislación (2016). Orden ECD/1663/2016, de 11 de octubre, por la que se regulan las pruebas de acceso a la universidad de las personas mayores de 25 o de 45 años de edad, así como el acceso mediante acreditación de experiencia laboral o profesional, en el ámbito de la Universidad Nacional de Educación a Distancia. BOE núm. 251, de 17/10/2016: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. BOE-A-2016-9514. https://www.boe.es/eli/es/o/2016/10/11/ecd1663/con

Legislación (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE núm. 340, de 30 de diciembre de 2020, páginas 122868 a 122953 (86 págs.) BOE-A-2020-17264. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3.

PISA (2003). Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. http://www.oecd.org/pisa/39732603.pdf.

PISA (2022). https://pisa2022-maths.oecd.org/index.html.