Un algoritmo eficiente para modelar una sección transversal del cauce del arroyo Sauce Corto, Sistema de Ventania

Marcela P. Álvarez, Flavia E. Buffo, Jorge Gentili, Verónica Gil

Resumen

En este artículo se presenta un algoritmo para modelar una sección transversal de la cuenca alta del arroyo Sauce Corto, con el objetivo de calcular el área y el perímetro mojado de la sección de cauce para una altura dada. La finalidad del mismo es obtener valores más precisos de caudal para su aplicación al estudio de inundaciones. La sección transversal se modela utilizando una spline cúbica natural a partir de un perfil topobatimétrico de dicha sección definido mediante una cantidad discreta de mediciones de campo. Luego, se calcula el área y el perímetro mojado de la sección modelada aplicando conceptos de cálculo integral y cálculo numérico. El algoritmo se implementa en MATLAB y se obtienen resultados para diferentes casos de estudio. Se propone este problema como un interesante proyecto de computación para alumnos que cursan la asignatura Métodos Numéricos en el segundo año de carreras como matemática, oceanografía e ingenierías entre otras.

1. Introducción

En este trabajo se presenta el desarrollo de un algoritmo que aproxima el perfil topográfico transversal de la sección de cierre de la cuenca del arroyo Sauce Corto mediante una función spline cúbica natural. Esto permite calcular, con mayor precisión, el área y el perímetro mojado (longitud de la frontera en términos matemáticos) de la sección transversal del cauce del arroyo.

Estos cálculos requieren la evaluación de integrales definidas $\int_a^b f(x)dx$. Sin embargo, muchas de estas integrales no pueden calcularse analíticamente, porque es díficil o imposible hallar una primitiva de f, o porque la función f está dada en forma discreta a partir de la lectura de datos recogidos. En ambos casos se hallan valores aproximados de estas integrales recurriendo al uso de métodos numéricos; en este trabajo en particular se emplea la regla del trapecio compuesta.

Por otro lado, desde el enfoque docente, la resolución del modelo matemático que representa este problema concreto puede proponerse como una actividad interesante para alumnos que cursan la asignatura Métodos Numéricos que forma parte de la currícula de carreras como matemática, oceanografía e ingenierías entre otras. Un objetivo fundamental para los docentes de esta asignatura es lograr un aprendizaje significativo, basado en la realización de actividades relacionadas con problemas reales. No es fácil seleccionar problemas que sean atractivos para los alumnos, que permitan evaluar su desempeño y cuya complejidad no supere el nivel de un curso de pregrado.

El artículo está organizado como sigue. En la sección 2 se presenta el problema que motiva la realización del trabajo y se describe el modelo. En la sección 3 se hace una breve descripción de la base teórica de los métodos que se utilizan. En la sección 4 se detalla el algoritmo propuesto para implementar el modelo. Esta es la contribución del artículo: se aproxima el perfil del cauce del arroyo utilizando una función spline cúbica natural. En la sección 5 se muestran los resultados obtenidos para diferentes casos de estudio. Finalmente, en la sección 6 se presentan las conclusiones y el trabajo futuro.

2. El problema y el modelo

En general, el caudal de un río se relaciona con la carga sólida y es determinante en la geomorfología del cauce. Su variabilidad temporal y su comportamiento a través de la red de drenaje debe ser analizado en todo estudio de cuenca.

El caudal no es una medida directa. Para su cálculo es necesario conocer dos parámetros: la velocidad de la corriente v y el área de la sección mojada. El primero se obtiene aplicando la fórmula de Manning (1)

$$v(m/s) = \frac{R^{0,67} j^{0,5}}{n}, \tag{1}$$

donde R es el radio hidráulico en la sección de control, definido como el cociente entre el área (m^2) de la sección mojada y el perímetro mojado (m), j es la pendiente longitudinal del lecho (m/m) y n es el coeficiente de rugosidad de Manning.

Para definir el segundo parámetro es necesaria la construcción del perfil topobatimétrico transversal de la sección de interés y conocer el dato de altura del agua mediante registros contínuos de un limnígrafo. Una vez realizado el perfil, el área de la sección mojada se obtiene a través del método de los trapecios [5]. Asimismo, el software HEC-RAS [6], también utiliza el método de los trapecios para calcular el área mojada en una sección y divide la sección transversal en tantas porciones como lo permita la cantidad de puntos con los que se definió dicha sección.

De forma manual o mediante el uso de software, este perfil se define únicamente con los puntos más bajos de cada sección transversal, uniendo cada par de puntos consecutivos con un segmento de recta. Por ello, cuanto mayor sea la cantidad de puntos, más precisión tendrá posteriormente el valor de caudal obtenido. Sin embargo, los principales limitantes para la obtención de una buena densidad de puntos que permitan definir de forma precisa el perfil son los medios técnicos empleados para medir el caudal, la profundidad y/o velocidad del agua al momento de realizar la medición, entre otros. Si los datos experimentales se interpolan mediante una función lineal a trozos, la representación del perfil resulta muy abrupta como se muestra en la figura 1 a).

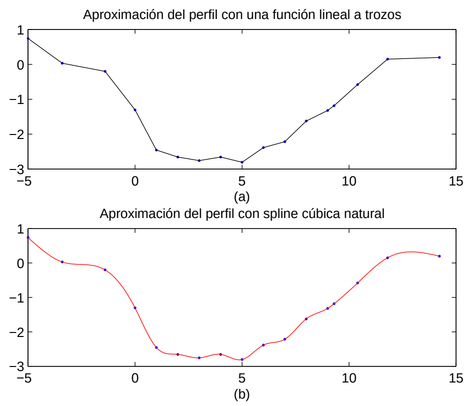

Figura 1: Aproximaciones del perfil de la sección de cierre de la cuenca alta del arroyo Sauce Corto.

En la sección de cierre de la cuenca alta del arroyo Sauce Corto (vertiente nororiental del Sistema de Ventania) se ubicó un limnígrafo que registra el nivel del agua y a partir de mediciones de campo se obtuvo la sección transversal al mismo. El problema que motiva el desarrollo del trabajo es la necesidad de agilizar el proceso de obtención del área y del perímetro mojado, correspondiente a cada nivel de agua y de obtener valores más ajustados de dichos parámetros. En este trabajo se diseña un algoritmo que permite modelar el perfil topobatimétrico transversal de la sección objeto de estudio con mayor precisión, agilizar el proceso de obtención del área y perímetro mojado para cada nivel de agua, obtener valores más precisos de dichos parámetros e implementarlo en MATLAB. Para ello, se propone realizar una interpolación mediante una spline cúbica natural que garantiza un perfil más suave como se observa en la figura 1 b), calcular el área y la longitud de la frontera mojada utilizando el método de los trapecios a partir de los valores de la aproximación, seleccionando una partición regular y adecuada a la precisión con la que se desea operar. Este modelo mejorará el ajuste de los valores de caudal necesarios para el estudio del peligro de inundación que afectan las localidades dentro del área de estudio.

3. Base teórica

3.1. Método de interpolación segmentaria

Los splines son curvas seccionalmente definidas mediante polinomios y se utilizan como herramienta para interpolar.

Definición 1 ***Función spline***
Dado un conjunto de datos $(x_i, y_i), i = 1 : n+1$, *una función* $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que satisface*

i) S *es un polinomio de grado menor o igual que* k *en cada intervalo* $[x_i, x_i + 1], i = 1 : n$

ii) S *tiene* $k-1$ *derivadas continuas en* $[x_1, x_{n+1}]$

se dice función spline de grado k.

La interpolación con splines cúbicos es la más popular, porque al utilizar polinomios de grado bajo se evitan oscilaciones indeseables encontradas cuando se utilizan polinomios de grado elevado (efecto de Runge). Las splines cúbicas se construyen como sigue,

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ S_2(x), & x \in [x_2, x_3], \\ \vdots & \vdots \\ S_n(x), & x \in [x_n, x_{n+1}]. \end{cases}$$

donde cada polinomio cúbico tiene cuatro coeficientes,

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 1 : n.$$

Las condiciones de interpolación se expresan como

$$S(x_i) = y_i, \qquad i = 1 : n + 1.$$

Para determinar los $4n$ coeficientes de S se consideran las $n + 1$ condiciones de interpolación, las $3(n - 1)$ condiciones de continuidad de la función S y sus derivadas S' y S'' y dos condiciones de frontera adicionales, dos grados de libertad, que permiten elegir diferentes curvas. Si se considera $S''(x_1) = S''(x_{n+1}) = 0$ entonces la función que resulta se conoce como *spline cúbica natural*. En [3] se detalla el procedimiento para obtener los $4n$ coeficientes que determinan la función $S(x)$.

3.2. Regla del trapecio

Se considera el problema de evaluar el área de la región R limitada por la gráfica de una función no negativa $y = f(x)$ continua en un intervalo $[a, b]$ y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$.

El área A de la región resulta ser

$$A(R) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{2}$$

En algunos casos, es posible calcular analíticamente esta integral y se obtiene el valor exacto del área, en otros casos no. Si se conoce sólo un número finito de puntos de la forma $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$, se dice que la función esta dada en forma discreta y se aproxima la integral (2) utilizando algún procedimiento numérico.

Definición 2 ***Integración numérica o cuadratura***
El proceso de aproximar la integral definida de una función usando la función evaluada en algunos puntos del dominio se dice integración numérica o cuadratura.

Muchas fórmulas de integración numérica se basan en aproximar la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ por una función polinómica o una función seccionalmente definida por funciones polinómicas.

Uno de los métodos más populares consiste en aproximar la función $f(x)$ en $[a, b]$ mediante la función lineal que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ e integrarla para obtener la aproximación a la integral, este método se conoce como *regla del trapecio simple*. Geométricamente la aproximación a la integral es el área del trapecio bajo la línea recta.

La expresión que vincula la integral calculada en forma exacta con la aproximación usando esta regla es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}\,(f(a)+f(b)) + E_s,$$

donde E_s es el error en la aproximación y se expresa como

$$E_s = -\frac{h^3}{12}f''(\xi), \qquad a < \xi < b, \qquad h = b-a.$$

El error que se comete puede ser grande dependiendo del tamaño del intervalo de integración y de la función $f(x)$. Una manera sencilla de mejorar la aproximación consiste en particionar el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos. Cuando se utiliza una partición regular de tamaño $h = \frac{b-a}{n}$ se obtiene la *regla de integración del trapecio compuesta* que se expresa como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+hi)\right) + E_c,$$

donde E_c es el error al utilizar la regla del trapecio compuesta. Este error se obtiene sumando los errores individuales en cada subintervalo, dando

$$E_c = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i),$$

$f''(\xi_i)$ evaluada en ξ_i perteneciente al i-ésimo subintervalo. Si $\bar{f}'' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$, el error se expresa como

$$E_c = -\frac{(b-a)}{12}h^2\bar{f}''.$$

3.3. Método de bisección

Se considera el problema de resolver la ecuación $f(x)=0$, siendo $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ una función no lineal continua en $[a,b]$ utilizando un procedimiento iterativo. La técnica más simple y antigua se basa en el teorema de Bolzano y se conoce como método de bisección o de búsqueda binaria.

Teorema 1 ***Teorema de Bolzano***
Sea f una función continua en $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

El procedimiento se inicia con un intervalo $[a, b]$ en el que se cumplen las condiciones del Teorema 1. Si se supone que $a_1 = a$ y $b_1 = b$, en cada iteración k se calcula el punto medio

$$x_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2},$$

que divide el intervalo $[a_k, b_k]$ a la mitad y se localiza el subintervalo que contiene a la solución c, es decir el que satiface las condiciones del teorema. El procedimiento iterativo genera una sucesión de intervalos, cada uno de los cuales mide la mitad del anterior. Para detener el proceso iterativo debe utilizarse algún criterio, los criterios más comunes establecen que se ha obtenido un intervalo suficientemente pequeño, o que el valor de la función en el punto medio del intervalo está suficientemente cerca de cero. Matemáticamente esto se expresa como

$$|b_k - a_k| < \epsilon_1 \qquad \text{ó} \qquad |f(x_k)| < \epsilon_2,$$

siendo ϵ_1, ϵ_2 cantidades positivas y pequeñas llamadas tolerancias. En cualquiera de estos casos el procedimiento se da por finalizado y se considera que x_k es una «buena» aproximación a la solución de f en $[a, b]$.

Si bien el método de bisección es más lento que otros métodos muy populares por su rapidez para resolver ecuaciones no lineales, tiene la cualidad de ser un método robusto, es decir garantiza que el intervalo que resulta en cada iteración contiene al menos una solución del problema $f(x) = 0$. El algoritmo del método se detalla en la sección (4).

Para obtener más detalles de los métodos vistos en esta sección se pueden consultar [2, 3, 4, 7, 8] entre otros.

4. Implementación del modelo

En esta sección se presentan los algoritmos para el modelado, el cálculo el área y del perímetro mojado de la sección de cierre de la cuenca del arroyo, a partir de los datos del perfil topobatimétrico.

Algoritmo 1 ***Algoritmo principal***

Dada la altura del nivel de agua h, medida por el limnígrafo, ubicado en una dada posición respecto del nivel de referencia 0.

Paso 1. *Se leen los datos experimentales* $(x_i, y_i), i = 1 : n+1$, *desde un archivo de Excel cuyo nombre es suministrado por el usuario.*

Paso 2. *Se obtiene la spline cúbica,* $S(x)$, *que interpola los datos implementando el algoritmo descripto en [3].*

Paso 3. *Se grafican en la misma ventana el conjunto discreto de datos y la spline cúbica.*

Paso 4. *Se obtienen las alturas máximas del perfil a ambos lados del cauce.*

Paso 5. *Se calcula el área y el perímetro mojado de la sección de cierre de la cuenca del arroyo con el Algoritmo 2.*

Paso 6. *Se informan los resultados en un archivo de Excel con el nombre suministrado por el usuario.*

Algoritmo 2

Dados $(x_i, y_i), i = 1 : n + 1$, *el nivel del agua* h, *alturas máximas del perfil a ambos lados del cauce,*

Paso 1. *Se analiza si el agua del arroyo ha superado el lecho primario y hacia qué lado desborda.*

Paso 2. *Se calculan las abscisas de las márgenes derecha e izquierda del arroyo para el nivel de agua alcanzado, resolviendo una ecuación no lineal con el método descripto en la sección 3.3.*

Paso 3. *Se grafican en una misma ventana los nodos bajo el agua y la spline cúbica* $S(x)$ *que interpola esos datos.*

Paso 4. *Se calcula el perímetro mojado de la sección de cierre.*

Paso 5. *Se calcula el área de la sección de cierre.*

5. Resultados

Para validar el algoritmo implementado en MATLAB se consideran tres casos de estudio que corresponden a alturas del agua representativas. El primero para $h = 0.7$ cuando el agua que circula por el canal no desborda, el segundo con $h = 1.8$ cuando se produce un desborde por la margen derecha y el tercero con $h = 2.31$, cuando se produce desborde hacia ambas márgenes.

Mediante la utilización de los algoritmos descriptos se obtienen los gráficos que se muestran en las figuras 2, 3 y 4 para los respectivos valores de h, considerando 54 puntos medidos a lo largo de la seccion de cierre del arroyo. En todos los casos, los puntos representan los datos y la líneas llenas las splines.

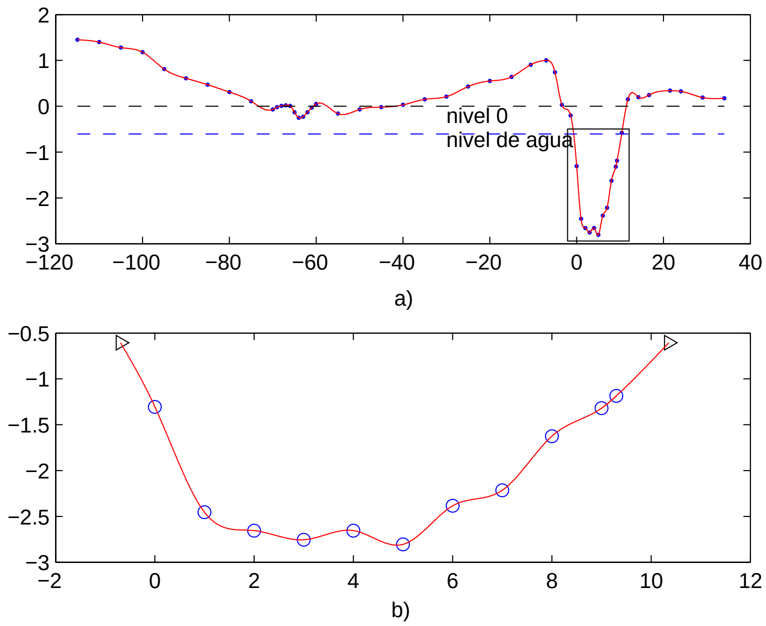

Figura 2: a) Perfil de la seccion de cierre de la cuenca alta del arroyo Sauce Corto, altura del agua h=0.7.
b) Zoom de la sección de cauce mojado.

Al ejecutar el programa, para cada altura h se obtienen los valores de ordenada del agua, coordenadas de las márgenes del arroyo, área de la sección

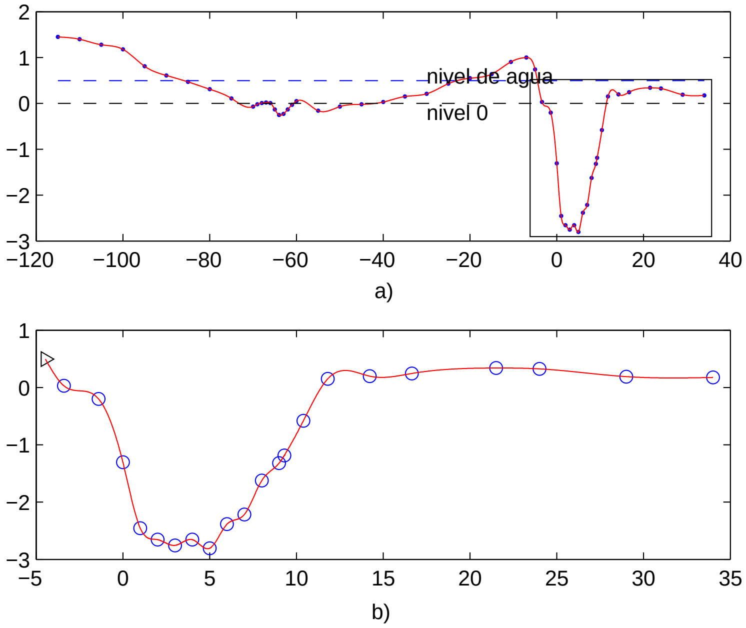

Figura 3: a) Perfil de la seccion de cierre de la cuenca alta del arroyo Sauce Corto, altura del agua h=1.8.
b) Zoom de la sección de cauce mojado.

mojada y el perímetro mojado (longitud del lecho del arroyo). Los valores correspondientes a cada caso se resumen en la Tabla 1.

Nivel	coord. agua	x marg. izq.	x marg. der.	área de la sección mojada	perímetro mojado
0.7	-0.605	-0.6939	10.3569	16.2888	12.4336
1.8	0.495	-4.4653	39	38.093	45.3303
2.31	1.005	-97.4987	39	126.7156	138.5366

Tabla 1: Resultados obtenidos para las distintas alturas del nivel de agua medido.

Los pares de coordenadas x, y de cada margen indican el punto de la superficie del terreno al cual llegó el agua y la ordenada indica la altura alcanzada por

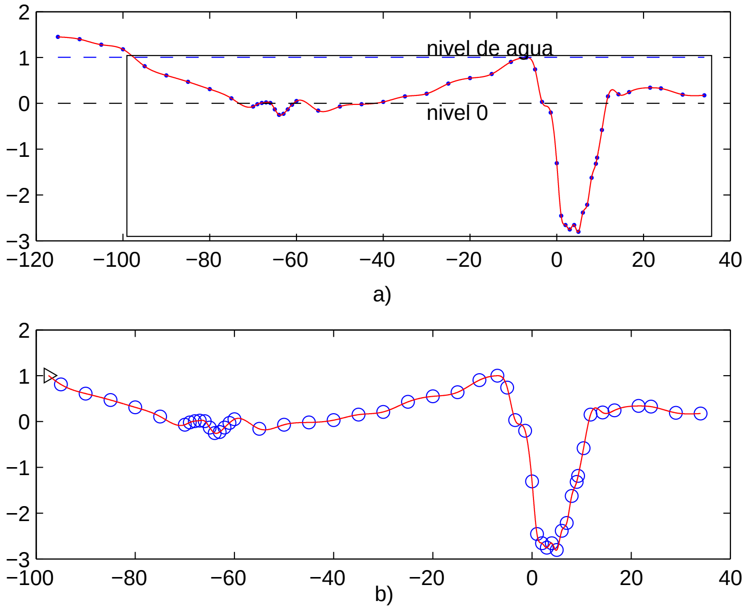

Figura 4: a) Perfil de la seccion de cierre de la cuenca alta del arroyo Sauce Corto, altura del agua h=2.31.
b) Zoom de la sección de cauce mojado.

la misma respecto a un punto de referencia al que se le asigna valor 0. Se sugiere que el 0 del sistema de referencia se encuentre ubicado en el punto más profundo (talweg) de la sección transversal. De esta manera sería posible referenciar dichos valores a una cota conocida y tendrían sentido topográfico los valores adicionales que provee el algoritmo, (coordenada agua; x marg. izq.; x marg. der.).

6. Conclusiones

En este trabajo se modela una sección transversal de la cuenca alta del arroyo Sauce Corto, aproximando los datos del perfil topobatimétrico con una función spline cúbica natural. Para diferentes niveles de altura del agua se calculan las abscisas de las márgenes derecha e izquierda del arroyo utilizando el método de bisección, seleccionado porque es simple de implementar y robusto, esto es, se garantiza la convergencia de la sucesión generada. Se calculan el área y el perímetro mojado de la sección modelada aproximando las integrales con el método de los trapecios compuestos. Esta inovación al modelo tradicional, que aproxima el perfil topobatimétrico con una función lineal a trozos, permite realizar los cálculos de área y perímetro mojado con mayor precisión. El algoritmo desarrollado está bien definido, esto es, finaliza en un número finito de pasos; es fácil de implementar en una computadora mediante cualquier lenguaje de programación que permita el manejo de arreglos; es amigable ya que los datos del perfil son leídos desde un archivo de Excel, resultados para diferentes alturas de agua pueden obtenerse en una sola corrida y resume en una tabla los resultados en otro archivo de Excel, es eficiente y preciso. Se preveen modificaciones a este algoritmo para generalizar el cálculo de áreas de diferentes secciones, por ejemplo mapas estructurales o conjunto de curvas de nivel de un objetivo petrolero.

El problema que se presenta en este artículo podría proponerse como proyecto de computación en cursos ordinarios de métodos numéricos. Uno de los objetivos de los docentes de esta asignatura debe ser ayudar a los alumnos a desarrollar habilidades para generar nuevas ideas y solucionar distintos tipos de problemas (creatividad). En este caso particular, el estudiante debe plantearse diferentes opciones para aproximar o interpolar los datos topobatimétricos (polinomios, splines, cuadrados mínimos), debe discernir qué metodo utilizar para resolver la ecuación no lineal, que le permite calcular las abscisas de las márgenes derecha e izquierda del arroyo para el nivel de agua alcanzado (bisección, secante, Newton, entre otros) y debe escoger de qué manera aproximar las integrales que se utilizan en el cálculo del área y el perímetro mojado de cierre de la cuenca del arroyo (punto medio, trapecios, Simpson, etc.). La resolución que se presenta aquí es la que los autores consideran más eficientes para la precisión y el esfuerzo computacional requeridos. Para lograr un aprendizaje significativo es importante seleccionar problemas que despierten el interés de los alumnos y cuya resolución permita integrar los contenidos de diferentes asignaturas.

Bibliografía

[1] J. I. Ardenghi y F. E. Buffo. Diseño geométrico del perfil de una prótesis de pie mediante splines. *Revista de Educación Matemática.* FaMAF-UNC, vol. 27, 2012.

[2] K.E. Atkinson. *An introduction to numerical analysis.* John Wiley and Sons, New York, 1978.

[3] R.L. Burden and J. D. Faires. *Análisis numérico.* Thomson Learning, México, 2002.

[4] S. Chapra and R. Canale. *Métodos numéricos para ingenieros.* Mc Graw Hill, México, 1999.

[5] V. T. Chow, D. R. Maidment y L. W. Mays. *Hidrología Aplicada.* Mc Graw Hill, Bogotá, 584 pp., 1994.

[6] *HEC-RAS 4.1* en: www.hec.usace.army.mil/software/hec-ras/documentation.aspx.

[7] D. Kincaid and W. Cheney. *Análisis numérico: las matemáticas del cálculo científico.* Addison-Wesley, Iberoamericana, 1994.

[8] . G. W. Stewart. *Afternotes on numerical analysis.* SIAM, Philadelphia, 1996.

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, ARGENTINA.
(palvarez@criba.edu.ar)(fbuffo@uns.edu.ar)

Departamento de Geografía y Turismo, Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, ARGENTINA.
(jogentili@uns.edu.ar)

Departamento de Geografía y Turismo, Universidad Nacional del Sur-CONICET,
12 de Octubre 1198, 8000 Bahía Blanca, ARGENTINA.
(verogil@uns.edu.ar)