Reflexiones sobre el Punto de Frégier

José Araujo - Luis C. Maiarú - Norma Pietrocola

Resumen

En estas notas vamos a referirnos al punto de Frégier de una cónica y a la generalización de este resultado al caso de cuádricas en R^n. Naturalmente, en el desarrollo de las notas, se hará uso de algunas propiedades de las funciones cuadráticas en varias variables.

1. Introducción

El siguiente teorema fue presentado por Frégier en los Annales de Mathematiques de Gergonne en 1816, [1]:

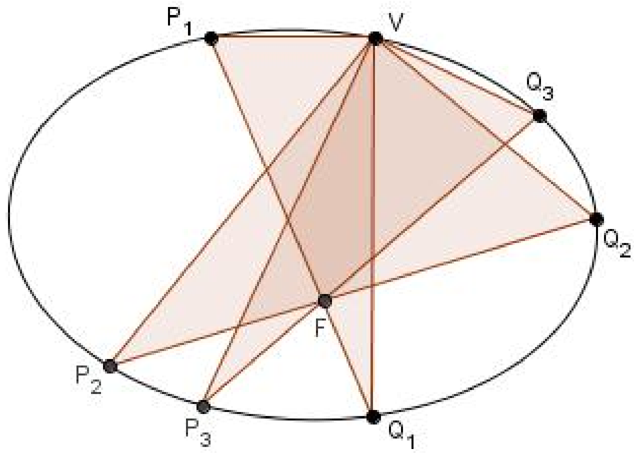
Teorema. Si un segmento variable PQ sobre una cónica subtiende un ángulo recto con un punto V de la cónica, éste pasa por un punto fijo F que se encuentra sobre la normal por V.

En la actualidad, el punto F al que hace referencia el teorema precedente, se conoce como punto de Frégier asociado con V. Aunque este teorema ha motivado interesantes problemas geómetricos en el pasado, [2],[3], son pocas las referencias que hemos podido obtener al respecto.

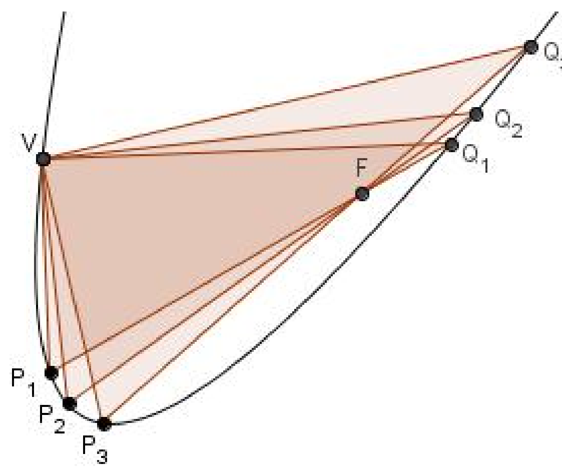
El título *Reflexiones sobre el Punto de Frégier* se debe al hecho que, en el caso del elipsoide, los puntos en la intersección de una recta con el elipsoide son permutados por una isometría del elipsoide conocida como reflexión, según la definición en (5), de modo que las variedades concurrentes están determinadas por las imágenes de las reflexiones cuyas raíces forman una base ortogonal de R^n.

1.1. Punto de Frégier en cónicas

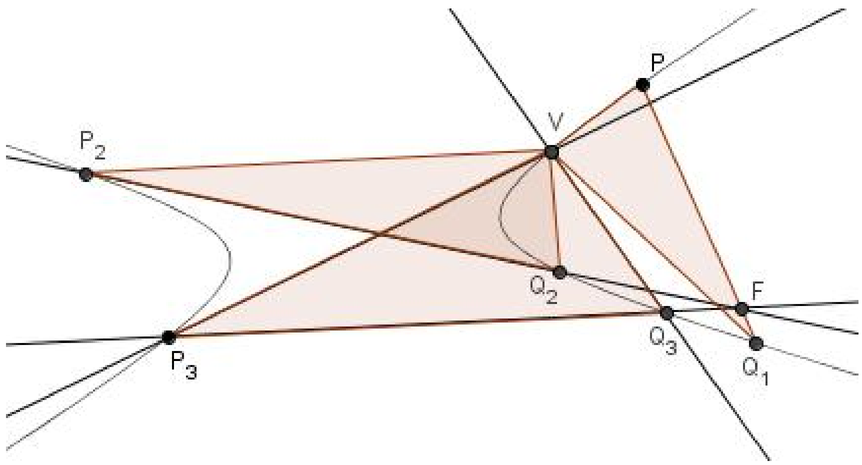
Las figuras a continuación, se incluyen a modo de ilustración del teorema de Frégier. Las mismas se pueden obtener, e incluso manipulear, haciendo uso de programas interactivos asociados a la geometría del plano. Creemos oportuno alentar el uso de estos programas para experimentar la geometría, sobre todo, teniendo en cuenta la posibilidad de obtener aquellos programas de libre acceso que se ofrecen en internet.



Elipse

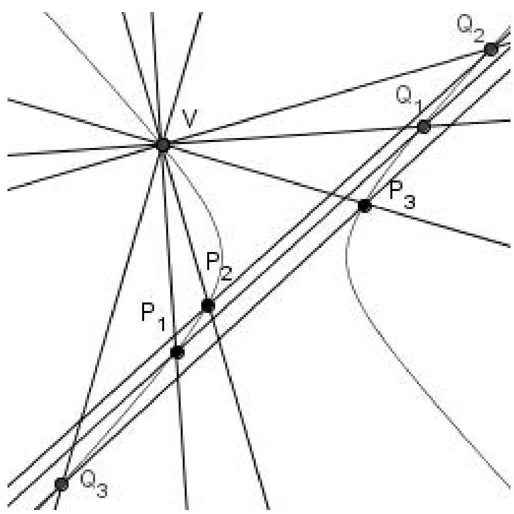


Parábola



Hipérbola

Algo especial ocurre con la hipérbola equilátera, como se muestra en la figura siguiente, todas las cuerdas son paralelas, en este caso, en lugar de un punto común, las cuerdas tienen una dirección común.



Hipérbola Equilátera

1.1.1. Resultados preliminares

A continuación exponemos sobre los resultados clásicos del álgebra lineal los que serán usados para establecer el teorema de Frégier de un modo más general.

En primer lugar, nos referimos a la correspondencia entre un espacio vectorial V y su espacio dual V^*, obtenida a partir de una forma bilineal no degenerada definida sobre V.

Es conveniente recordar que una forma bilineal $\mathfrak{B}$ es no degenerada si verifica:

$$\mathfrak{B}(v,u) = 0 \quad (\forall u \in V) \quad \Rightarrow v = 0$$

Observamos además que, fijado $v \in V$, la aplicación $u \to \mathfrak{B}(v,u)$ definida de V en K es un elemento de V^* que notaremos con $\mathfrak{B}(v,)$.

Teorema 1 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{B}$ una forma bilineal no degenerada definida sobre V. La aplicación entre V y el espacio dual V^* de V dada por:*

$$v \to \mathfrak{B}(v,) \qquad (v \in V)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Dado que $\mathfrak{B}$ es una forma bilineal, la aplicación definida es una transformación lineal cuyo núcleo está dado por los vectores $v \in V$ tales que $\mathfrak{B}(v,)$ es idénticamente nula, es decir $\mathfrak{B}(v,u) = 0$ para todo $u \in V$. Por ser $\mathfrak{B}$ no degenerada, debe ser $v = 0$ y así, la aplicación definida es inyectiva. La suryectividad de esta aplicación es consecuencia del teorema de la dimensión y del hecho que V y V^* tienen la misma dimensión. ■

Como consecuencia del teorema precedente, en un espacio V equipado con una forma bilineal no degenerada $\mathfrak{B}$, a cada elemento $\varphi \in V^*$ podemos asociarle un vector $v_\varphi \in V$ tal que:

$$\varphi(u) = \mathfrak{B}(v_\varphi, u) \qquad \forall u \in V \tag{1}$$

Conservando las notaciones previas, se tiene:

Proposición 2 *Supongamos V admite $u_1, \ldots, u_n$ una base ortonormal respecto de $\mathfrak{B}$, es decir $\mathfrak{B}(u_i, u_j) = \delta_{ij}$. Para cada $\varphi \in V^*$ se verifica:*

$$\sum_{I=1}^{n} \varphi(u_i)\, u_i = v_\varphi \tag{2}$$

Demostración. *Como $u_1, \ldots, u_n$ es una base ortonormal respecto de $\mathfrak{B}$, se tiene:*

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \sum_{I=1}^{n} \mathfrak{B}\left(v_\varphi, u_i\right) u_i \\ &= \sum_{I=1}^{n} \varphi\left(u_i\right) u_i \end{aligned}$$

■

Completamos la exposición de los resultados preliminares observando la invarianza de la *traza* de una forma bilineal real bajo cambios de coordenadas ortogonales. Llamaremos *traza de la forma bilineal* $\mathfrak{B}$ referida a la base $u_1, \ldots, u_n$ de V al valor:

$$tr\left(\mathfrak{B}\right) = \sum_{I=1}^{n} \mathfrak{B}\left(u_i, u_i\right) \tag{3}$$

Proposición 3 *Si las base $u_1, \ldots, u_n$ y $v_1, \ldots, v_n$ del espacio vectorial real V, están relacionadas mediante una matriz ortogonal, entonces, toda bilineal $\mathfrak{B}$ tiene la misma traza respecto de ambas bases.*

Demostración. *Por las hipótesis, hay una matriz ortogonal $P = [p_{ij}]$ tal que:*

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v_j$$

de esto surge la identidad matricial:

$$\left[\mathfrak{B}\left(u_i, u_j\right)\right] = P\left[\mathfrak{B}\left(v_i, v_j\right)\right] P^t$$

donde P^t indica la traspuesta de P. Como P es ortogonal, resulta $P^t = P^{-1}$ luego:

$$\begin{aligned} tr\left(\left[\mathfrak{B}\left(u_i, u_j\right)\right]\right) &= tr\left(P\left[\mathfrak{B}\left(v_i, v_j\right)\right] P^{-1}\right) \\ &= tr\left(P^{-1} P\left[\mathfrak{B}\left(v_i, v_j\right)\right]\right) \\ &= tr\left(\left[\mathfrak{B}\left(v_i, v_j\right)\right]\right) \end{aligned}$$

aquí usamos el hecho que $tr\left(AB\right) = tr\left(BA\right)$ para A, B matrices de orden n. ■

1.2. En el elipsoide

Vamos a considerar primero el caso de un elipsoide en R^n, para luego mostrar que las mismas ideas pueden ser usadas en el caso de una cuádrica bajo ligeras restricciones.

Fijamos la ecuación del elipsoide en su forma normal como:

$$\mathfrak{Q}\left(v\right)=k$$

donde $\mathfrak{Q}$ es una forma cuadrática en R^n positiva definida y k es una constante positiva.

Asociada con cada forma cuadrática $\mathfrak{Q}$, se tiene la forma bilineal $\mathfrak{B}$ definida por:

$$\mathfrak{B}\left(u,v\right)=\frac{\mathfrak{Q}\left(u+v\right)-\mathfrak{Q}\left(u\right)-\mathfrak{Q}\left(v\right)}{2}\qquad\left(u,v\in R^n\right)$$

o la expresión equivalente:

$$\mathfrak{Q}\left(u+v\right)=\mathfrak{Q}\left(u\right)+2\mathfrak{B}\left(u,v\right)+\mathfrak{Q}\left(v\right)\tag{4}$$

Dado $u\in R^n$, $u\neq 0$, la transformación lineal s_u de R^ndefinida por:

$$s_u\left(v\right)=v-2\frac{\mathfrak{B}\left(v,u\right)}{\mathfrak{Q}\left(u\right)}u\tag{5}$$

se llama *reflexión con raíz* u. Queda claro que esta reflexión está construída sobre la base de su raíz u y la forma bilineal $\mathfrak{B}$. Notemos además que $\mathfrak{Q}\left(u\right)>0$ si $u\neq 0$, dado que $\mathfrak{Q}$ es positiva definida.

Sin embargo, una reflexión con raíz u puede ser definida por la expresión en (5), con la única condición que $\mathfrak{Q}\left(u\right)\neq 0$ donde $\mathfrak{Q}$ es una forma cuadrática. Entre las propiedades de una reflexión, destacamos las enunciadas en la siguiente proposición:

Proposición 4 i) $s_{\lambda u}=s_u$, $\forall\lambda\in R$.
ii) $s_u^2=id_V$.
iii) $\mathfrak{Q}\left(s_u\left(v\right)\right)=\mathfrak{Q}\left(v\right)$.
iv) Si una recta paralela a u corta al elipsoide $\mathfrak{Q}\left(v\right)=k$ en los puntos p y q, entonces $q=s_u\left(p\right)$.

Demostración. *i)* Resulta claro de la definición en (5).

ii) y iii) Escribiendo $v = \lambda u + h$ con $\lambda \in R$ y $\mathfrak{B}(h, u) = 0$ se tiene:

$$s_u(v) = -\lambda u + h$$

luego

$$\begin{aligned} s_u(s_u(v)) &= s_u(-\lambda u + h) \\ &= \lambda u + h \\ &= v \end{aligned}$$

y por otra parte:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}(s_u(v)) &= \mathfrak{Q}(-\lambda u + h) \\ &= \mathfrak{Q}(-\lambda u) + 2\mathfrak{B}(-\lambda u, h) + \mathfrak{Q}(h) \\ &= \mathfrak{Q}(\lambda u) + \mathfrak{Q}(h) \\ &= \mathfrak{Q}(v) \end{aligned}$$

iv) Sea l la recta paralela a u. Dado que la restricción de $\mathfrak{Q}$ a l es un polinomio de grado a lo sumo 2, l corta al elipsoide en a lo sumo dos puntos. Por otra parte, por *iii)* s_u transforma el elipsoide en sí mismo, esto mismo ocurre con l, en efecto, poniendo $l = \{p + \lambda u : \lambda \in R\}$, se tiene:

$$\begin{aligned} s_u(p + \lambda u) &= s_u(p) + \lambda s_u(u) \\ &= p - 2\frac{\mathfrak{B}(p, u)}{\mathfrak{Q}(u)}u - \lambda u \\ &= p - \left(\lambda + 2\frac{\mathfrak{B}(p, u)}{\mathfrak{Q}(u)}\right)u \\ &= p + \lambda' u \end{aligned}$$

En consecuencia, s_u transforma la intersección entre l y el elipsoide en si misma. Si p está en esta intersección y $s_u(p) \neq p$, éstos son los dos puntos en la intersección. En otro caso, si $s_u(p) = p$ de (5) se desprende que $\mathfrak{B}(p, u) = 0$ y los puntos en la intersección están dados por la ecuación:

$$\mathfrak{Q}(p + \lambda u) = Q(p)$$

o bien, usando (4):

$$\mathfrak{Q}(p) + 2\lambda\mathfrak{B}(p, u) + \lambda^2\mathfrak{Q}(u) = \mathfrak{Q}(p)$$

de donde el único valor posible es $\lambda = 0$.

Comentario 5 *Las reflexiones definidas con la expresión en* (5), *son isometrías del elipsoide, es decir transformaciones lineales que dejan invariante al elipsoide. Las isometrías del elipsoide forman un grupo llamado el* grupo ortogonal *de la forma cuadrática* $\mathfrak{Q}$. *Es posible demostrar que las reflexiones generan este grupo. En estas notas, sólo hacemos notar que los puntos de intersección de una recta* l *con el elipsoide son permutados por la reflexión cuya raíz es paralela a* l.

■

Vamos a establecer el teorema de Frégier para un elipsoide como sigue:

Teorema 6 *Sea* p *un punto sobre un elipsoide en* R^n *que está dado en término de las coordenadas cartesianas canónicas por la ecuación:*

$$\mathfrak{Q}(v) = k \qquad (k > 0)$$

entonces,las variedades lineales generadas por $s_{u_1}(p), \ldots, s_{u_n}(p)$, *donde* $u_1, \ldots, u_n$ *es una base ortonormal de* R^n *y* s_{u_i} *como en* (5), *concurren en un punto.*

Demostración. Mostraremos que para cualquier base ortonormal $u_1, ..., u_n$, el punto, $p - 2\frac{\widetilde{p}}{tr\mathfrak{B}}$ pertenece al subespacio generado por $S_{u_1}(p), ..., S_{u_n}(p)$ donde $\widetilde{p}$ es como en (*).

Si $\mathfrak{B}$ es la forma bilineal asociada con $\mathfrak{Q}$, usaremos $tr(\mathfrak{B})$ para notar la traza de $\mathfrak{B}$ respecto de la base canónica.

De las identidades

$$s_{u_i}(p) = p - 2\frac{\mathfrak{B}(p, u_i)}{\mathfrak{Q}(u_i)} u_i$$

se tiene

$$\mathfrak{Q}(u_i)\, s_{u_i}(p) = \mathfrak{Q}(u_i)\, p - 2\mathfrak{B}(p, u_i)\, u_i$$

sumando sobre el índice i, resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}(u_i)\, s_{u_i}(p) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}(u_i) \right) p - 2 \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{B}(p, u_i)\, u_i \\ &= tr(\mathfrak{B})\, p - 2 \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{B}(p, u_i)\, u_i \end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{1}{tr\left(\mathfrak{B}\right)}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{Q}\left(u_i\right)s_{u_i}\left(p\right)=p-\frac{2}{tr\left(\mathfrak{B}\right)}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{B}\left(p,u_i\right)u_i=dp. \tag{6}$$

el punto dado en por la expresión del primer miembro en la igualdad precedente, es claramente un punto en la variedad lineal generada por $s_{u_1}\left(p\right),\ldots,s_{u_n}\left(p\right)$. Mientras que, en virtud de la Proposición 2, la expresión del segundo miembro puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}&p-\frac{1}{tr\left(\mathfrak{B}\right)}\sum_{i=1}^{n}2\mathfrak{B}\left(p,u_i\right)u_i\\&=p-\frac{\widetilde{p}}{tr\left(\mathfrak{B}\right)}\end{aligned}$$

donde es el único punto en R^n que satisface:

$$2\mathfrak{B}\left(p,v\right)=\langle\widetilde{p},v\rangle\qquad\left(\forall v\in R^n\right) \tag{$*$}$$

aquí $\langle,\rangle$ denota el producto interno canónico en R^n. Si notamos con $F\left(p\right)$ el punto en la variedad dado por la identidad en (6), se tiene:

$$F\left(p\right)=p-\frac{2}{tr\left(\mathfrak{B}\right)}\widetilde{p} \tag{7}$$

donde resulta claro que $F\left(p\right)$ no depende de la base $u_1,\ldots,u_n$. ∎

Comentario 7 *Corresponde destacar que el punto $F\left(p\right)$ se encuentra en la recta normal al elipsoide que pasa por p, ya que el hiperplano tangente está dado por :*

$$\left\{v:\mathfrak{B}\left(p,v-p\right)=0\right\}$$

Por otra parte, notemos que $F\left(p\right)$ dada en (7) es una transformación lineal, debido a que la aplicación $p\to\widetilde{p}$ es lineal. En el caso de una esfera la expresión de F está dada por la homotecia:

$$F\left(p\right)=\left(1-\frac{2}{n}\right)p$$

y, como es sabido, si $n=2$ $F\left(p\right)$ es el centro de la circunferencia, cualquiera sea p.

Si una cuádrica está dada por la ecuación $\mathfrak{Q}(v) = k$ donde $\mathfrak{Q}$ es una forma cuadrática, el razonamiento relizado para el elipsoide puede ser reproducido en su totalidad con la condición $\mathfrak{Q}(u_i) \neq 0$ y $tr(\mathfrak{B}) \neq 0$. Por ejemplo, en la hipérbola equilátera de ecuación $x^2 - y^2 = k$, no sería posible darle sentido a $F(p)$, sin embargo en el cono de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, la expresión para $F(p)$ está dada por:

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2, p_3) &= (p_1, p_2, p_3) - 2(p_1, p_2, -p_3) \\ &= (-p_1, -p_2, 3p_3) \end{aligned}$$

En la esfera de ecuación $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$ con $r > 0$, la expresión es:

$$F(p) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) p$$

El hecho que las cónicas se obtengan como secciones de un cono, en general, para un punto p en la cónica, eligiendo triedros donde un vector u es perpendicular al plano de la sección, la recta que pasa por $F(p)$ y $s_u(p)$ cortará al plano de la sección en el punto de Frégier de la cónica asociado con p.

2. El caso general

A continuación se extenderá la función $F(p)$ al caso de una cuádrica $\mathfrak{C}$ en R^n de ecuación

$$\mathfrak{F}(x) = k$$

donde

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{Q}(x) + \mathfrak{L}(x)$$

siendo $\mathfrak{Q}$ un forma cuadrática y $\mathfrak{L}$ una forma lineal. Dado $u \in R^n$ y $p \in \mathfrak{C}$, la recta que pasa por p con dirección u corta a $\mathfrak{C}$ en a lo sumo 2 puntos dados por los valores de λ en la ecuación

$$\mathfrak{F}(p + \lambda u) = \mathfrak{F}(p)$$

o bien

$$\mathfrak{Q}(p + \lambda u) + \mathfrak{L}(p + \lambda u) = \mathfrak{Q}(p) + \mathfrak{L}(p)$$

de donde

$$2\lambda \mathfrak{B}(p, u) + \lambda^2 \mathfrak{Q}(u) + \lambda \mathfrak{L}(u) = 0 \tag{8}$$

donde $\mathfrak{B}$ denota la forma bilineal asociada con $\mathfrak{Q}$. El valor $\lambda = 0$ corresponde al punto p, y si $\mathfrak{Q}(u) \neq 0$ se tiene

$$\lambda = -\frac{2\mathfrak{B}(p,u) + \mathfrak{L}(u)}{\mathfrak{Q}(u)}$$

En este caso, el segundo punto p_u en la intersección entre $\mathfrak{C}$ y la recta $p + \lambda u$ está dado por

$$p_u = p - \frac{2\mathfrak{B}(p,u) + \mathfrak{L}(u)}{\mathfrak{Q}(u)} u \tag{9}$$

En lo que sigue usaremos $tr(\mathfrak{B})$ para indicar la traza de la forma bilineal $\mathfrak{B}$ respecto de la base canónica.

Conservando las notaciones precedentes, se tiene:

Teorema 8 *Sea p un punto en la cuádrica de ecuación:*

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{Q}(x) + \mathfrak{L}(x)$$

Las variedades lineales generadas por los puntos $p_{u_1}, \ldots, p_{u_n}$ según (9), donde $u_1, \ldots, u_n$ es una base ortogonal de R^n tal que $\mathfrak{Q}(u_i) \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ y $tr(\mathfrak{B}) \neq 0$, son concurrentes.

Demostración. Se tiene:

$$p_{u_i} = p - \frac{2\mathfrak{B}(p,u_i) + \mathfrak{L}(u_i)}{\mathfrak{Q}(u_i)} u_i$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{i}=\mathfrak{1}}^{\mathfrak{n}} \mathfrak{Q}(u_i)\, p_{u_i} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{Q}(u_i)\right) p - \sum_{i=1}^{n} \left(2\mathfrak{B}(p,u_i) + \mathfrak{L}(u_i)\right) u_i \\ &= tr(\mathfrak{B})\, p - \sum_{i=1}^{n} \left(2\mathfrak{B}(p,u_i) + \mathfrak{L}(u_i)\right) u_i\end{aligned}$$

Acorde con lo estrablecido en (1), la forma lineal $2\mathfrak{B}(p,v) + \mathfrak{L}(v)$ puede ser realizada como $\langle \widetilde{p}, v \rangle$, y en virtud de (2) resulta:

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{i}=\mathfrak{1}}^{\mathfrak{n}} \mathfrak{Q}(u_i)\, q_i &= tr(\mathfrak{B})\, p - \sum_{i=1}^{n} \langle \widetilde{p}, u_i \rangle\, u_i \\ &= tr(\mathfrak{B})\, p - \widetilde{p}\end{aligned}$$

Finalmente tomamos el punto $F(p)$ dado por:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{tr(\mathfrak{B})} \sum_{\mathfrak{i}=\mathfrak{1}}^{\mathfrak{n}} \mathfrak{Q}(u_i)\, p_{u_i} \\ &= p - \frac{\widetilde{p}}{tr(\mathfrak{B})} \end{aligned}$$

Por (3) $\sum_{\mathfrak{i}=\mathfrak{1}}^{\mathfrak{n}} \mathfrak{Q}(u_i) = tr(\mathfrak{B})$ ■

Comentario 9 *La expresión para $\widetilde{p}$ en este caso involucra a la forma lineal $\mathfrak{L}$, tomando el mismo aspecto que en el caso del elipsoide tratado anteriormente. En coordenadas cartesianas, podemos expresar $\mathfrak{F}$ en forma matricial como:*

$$\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_n) = [x_1 \cdots x_n]\, B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [l_1 \cdots l_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

donde $B = [\mathfrak{B}(e_i, e_j)]$, $e_1, \ldots, e_n$ es la base canónica de R^n y $\mathfrak{L}(x_1, \ldots, x_n) = l_1 x_1 + \cdots + l_n x_n$. Ahora, $\widetilde{p}$ está dado por:

$$\widetilde{p} = 2\,[p_1 \cdots p_n]\, B + [l_1 \cdots l_n]$$

y consecuentemente:

$$\mathfrak{F}(p) = p - \frac{2\,[p_1 \cdots p_n]\, B + [l_1 \cdots l_n]}{tr(B)}$$

Referencias

[1] Frégier´s work appeared in Gergonne´s *Annales de Mathematique*, t. VI, 1816, pp. 229-241, pp. 321-326; and t. VII, 1816, pp. 95-99.

[2] Katherine Lipps, *Envelopes of Certain Family of Conics*. PI MU Epsilon Journal, Vol. 2, Num. 8, 1958.

[3] Sister Clotilde Spezia, *Harmonic Points and Loci Connected with the Frégier´s Theorem*. Master´s Thesis, St. Louis University, 1951.