

¿Qué evaluamos cuando evaluamos?

Gabriel Soto

Resumen

En el presente artículo se analizan diferentes alternativas metodológicas para motivar el aprendizaje de la trigonometría en el aula a partir del análisis de soluciones elaboradas para un *problema típico de aplicación de trigonometría* por alumnos que terminaron la escuela media y deseaban ingresar a la universidad.

Palabras claves: enseñanza de la trigonometría, evaluación, didáctica de la matemática

1. Introducción

La evaluación forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje y es una de las cláusulas fundamentales en el contrato didáctico [6] que se establece de manera explícita o implícita entre el docente y los alumnos. Los instrumentos de evaluación diseñados por el docente para tal fin son las instancias concretas en donde esta cláusula se ejecuta.

Muy a menudo, los alumnos se refieren a los resultados obtenidos en dichas evaluaciones como *foráneos*, expresando no haber cumplido rol alguno en la obtención de dichos resultados. Más aún, los argumentos que se esgrimen para explicar por qué los docentes *desaprueban a los alumnos* son también exógenos a las prácticas docentes del aula. Entonces cabría preguntarse ¿quiénes son los responsables de tan bajos rendimientos en las evaluaciones de matemática?.

Esta situación pone de manifiesto la disociación que a menudo existe entre lo que enseñamos y lo que evaluamos pues el diseño de los instrumentos de evaluación está ligado exclusivamente al proceso de aprendizaje de los alumnos y no a los procesos de transposición didáctica en el aula. Es por eso que a menudo los docentes terminan *innovando* en la evaluación, esto es, se presentan en las pruebas situaciones *novedosas* cuando las condiciones para desarrollarlas no son las óptimas. La novedad no se refiere a situaciones similares a las trabajadas en clase con resultados numéricos distintos, sino a problemas donde los alumnos tiene que poner a prueba habilidades y capacidades que no fueron estimuladas explícita ni implícitamente en el aula. Esta innovación tiene por lo general consecuencias nefastas para los alumnos y los docentes.

A modo de ejemplo de esta situación, presentamos y analizamos las soluciones obtenidas por los alumnos a un problema cuyo objetivo es evaluar si los alumnos saben utilizar correctamente las razones trigonométricas en la resolución de triángulos. A través del análisis de las respuestas de los alumnos, proponemos alternativas para poder subsanar las dificultades de aprendizaje evidenciadas en las soluciones de los alumnos, que pueden ser usadas como modelos para hacer ingeniería didáctica sobre la enseñanza de la trigonometría [3].

2. Problema

Se desea calcular el área de una parcela triangular cuyos dos de sus lados miden 80m y 130m y forman un ángulo de 70° .

2.1. Soluciones propuestas por los alumnos

A continuación se presentan posibles soluciones que los alumnos propusieron para este problema.

SOLUCIÓN A

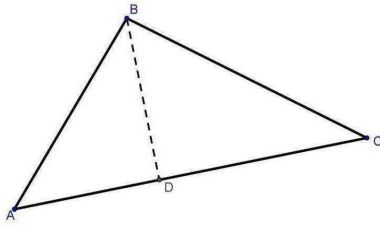


Figura 1: \hat{A} mide 70° . $\overline{AB} = 80\text{m}$ y $\overline{AC} = 130\text{m}$

$$\begin{aligned}
 \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \text{sen } 70 \\
 &\approx 80\text{m} \cdot 0,94 \\
 &\approx 75,17\text{m} \\
 \text{área del } \triangle ABC &= \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2} \\
 &\approx \frac{130\text{m} \cdot 75,17\text{m}}{2} \\
 &\approx 4884,75\text{m}^2
 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN B

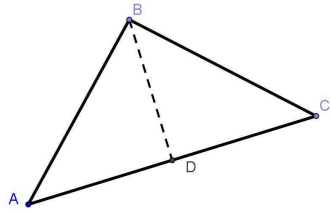


Figura 2: La parcela es un triángulo isósceles. El ángulo \widehat{A} mide 70. $\overline{AB} = \overline{BC} = 80\text{m}$

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \text{sen } 70 \\ &\approx 80\text{m} \cdot 0,94 \\ &\approx 75,17\text{m} \\ \text{área del } \triangle ABC &= \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2} \\ &\approx \frac{130\text{m} \cdot 75,17\text{m}}{2} \\ &\approx 4884,75\text{m}^2\end{aligned}$$

SOLUCIÓN C

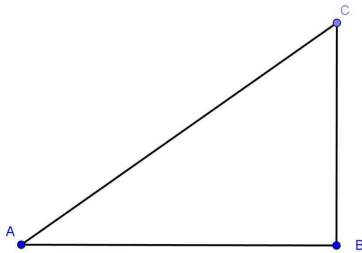


Figura 3: La parcela es un triángulo rectángulo. $\overline{CB} = 80\text{m}$ y $\overline{AC} = 130\text{m}$. El ángulo \widehat{C} mide 70.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} \\ &= \sqrt{(130\text{m})^2 - (80\text{m})^2} \\ &\approx 122,47\text{m} \\ \text{área del } \triangle ABC &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} \\ &\approx \frac{122,47\text{m} \cdot 80\text{m}}{2} \\ &\approx 4098,78\text{m}^2\end{aligned}$$

SOLUCIÓN D

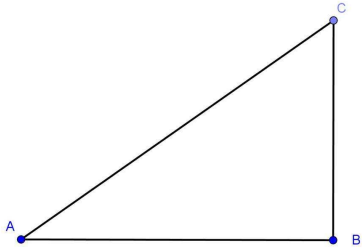


Figura 4: La parcela es un triángulo rectángulo. $\overline{AB} = 80\text{m}$ y $\overline{AC} = 130\text{m}$. El ángulo \hat{A} mide 70° .

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{AC} \cdot \text{sen } 70 \\ &\approx 130\text{m} \cdot 0,94 \\ &\approx 122,16\text{m} \\ \text{área del } \triangle ABC &= \frac{b \cdot h}{2} \\ &\approx \frac{80\text{m} \cdot 122,16\text{m}}{2} \\ &\approx 4886,4\text{m}^2\end{aligned}$$

2.2. Solución correcta

A partir de los datos del problema, la solución A (Figura 1) es la correcta. Utilizando el Teorema del Coseno y del Seno podemos obtener las dimensiones de todos los lados y ángulos del triángulo $\triangle ABC$: $\overline{BC} \approx 127,22\text{m}$ y $\hat{C} \approx 35^\circ$ y $\hat{B} \approx 74^\circ 40' 15''$.

2.3. Soluciones *cuasicorrectas*

Observemos que no existe diferencia numérica entre la solución correcta y Solución B (figura 2). Sin embargo, los alumnos que escribieron esta solución asumieron que el triángulo era isósceles como muestra la figura 2. Más aún, la mayoría de los alumnos que escribieron la solución B no utilizaron esta hipótesis. Si los alumnos la hubieran usado por ejemplo conjuntamente con el coseno del ángulo, entonces hubieran obtenido una respuesta diferente.

Con respecto a la solución C (figura 3) los alumnos asumieron que el triángulo era rectángulo. Y obtuvieron el área del triángulo omitiendo nuevamente la hipótesis de la medida del ángulo para hallar el área.

En la solución D (figura 4) los alumnos asumieron que el triángulo era rectángulo pero a diferencia de la solución anterior, hicieron uso del resto de los

datos del problema. Obviamente, dependiendo si utilizan el seno y el coseno del ángulo, los resultados del área del triángulo resultaron diferentes.

Desde el punto de vista matemático, este conjunto de soluciones es incorrecta pues se consideran triángulos que no son los que unívocamente determinan los datos del problema¹. En todos los casos los alumnos aplican correctamente los algoritmos y técnicas que *usualmente* se enseñan en el aula para encontrar medidas de lados y áreas de triángulos con la ayuda de la trigonometría, sin embargo omiten hipótesis o infieren propiedades del objeto geométrico de manera errónea. Siendo fundamental analizar la génesis de estos errores cometidos por los alumnos y elaborar propuestas que tiendan a corregir estos errores disciplinares, es que denominaremos a las soluciones B, C y D *cuasicorrectas*.

2.4. Frecuencia de las soluciones cuasicorrectas

El problema planteado fue propuesto en un examen de ingreso a la univer-



Figura 5: Resultados generales del problema en cuestión

¹El criterio Lado-Ángulo-Lado (LAL) establece que si dos triángulos tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo que éstos forman, son congruentes [34, 17]

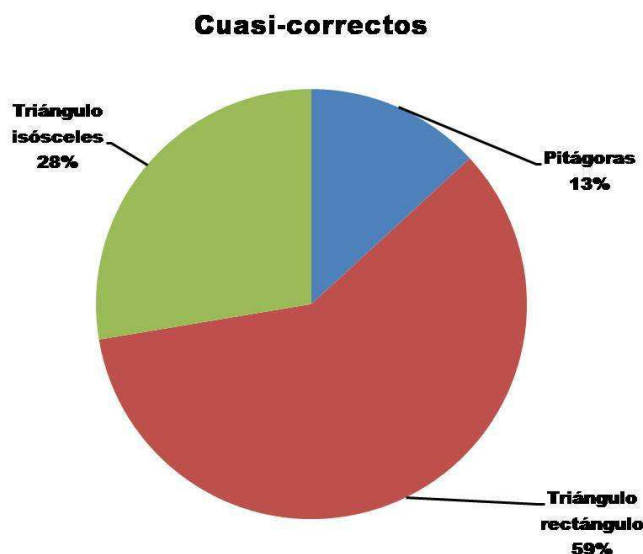


Figura 6: Proporción de *soluciones cuasicorrectas*

sidad y los porcentajes mencionados a continuación están basados en los resultados de ese examen. La solución A (Figura 1) fue obtenida por sólo el 5% de los alumnos (Figura 5).

El 48% de los alumnos escribieron soluciones cuasicorrectas como las del tipo B, C y D (Figura 6). De los alumnos que presentaron este tipo de respuestas el 72% asumió que el triángulo era rectángulo (Figura 4), un 28% asumió que el triángulo era isósceles (Figura 2). También es interesante notar que el 13% usó el Teorema de Pitágoras como única herramienta para resolver el problema (Figura 3).

A partir de esta distribución de soluciones, surgen inmediatamente algunos interrogantes acerca de la génesis de los obstáculos epistemológicos, cognitivos y didácticos que intervinieron para que los alumnos infirieran erróneamente al resolver este problema:

- No habiendo los alumnos que escribieron la solución A, inferido explícitamente propiedad alguna del triángulo en cuestión, ¿habrían descartado las soluciones cuasi-correctas?;
- ¿por qué el 48% de los alumnos mostraron que sabían utilizar las ra-

zones trigonométricas en el contexto de resolución de triángulos infringieron erróneamente propiedades sobre el triángulo en cuestión?

3. ¿Qué estamos evaluando?

Las Figuras 5 y 6 muestran claramente la dificultad que enfrentan los alumnos cuando tienen que poner a prueba las *capacidades específicas* del quehacer matemático: resolver problemas [21 y 23]. En general durante su paso por los diferentes niveles educativos los alumnos sólo logran armar bagaje de fórmulas y conocimientos (Bascara, Pitágoras, SECOHCOAH, etc.) que suelen serles útiles siempre y cuando *elijan la fórmula correcta* para resolver un problema determinado. La prueba está en los resultados presentados en la Figura 5: sólo el 5 % de los alumnos pudieron resolver el problema *correctamente*, aunque en vista de los resultados de la Figura 6, es necesario reflexionar sobre qué tipo de habilidades y saberes matemáticos fueron empleados por los alumnos para resolver el problema planteado.

Del análisis de las respuestas de los alumnos, la primera reflexión que debemos hacer es si los alumnos que escribieron la solución A realmente obtuvieron la respuesta correcta, pues sólo un alumno demostró haber utilizado el triángulo correcto² (calculó las dimensiones del triángulo utilizando los teoremas del coseno y del seno): cómo saber si los alumnos estaban pensando en el triángulo correcto?.

A partir de las soluciones cuasi-correctas uno puede inferir que la percepción o *imagen conceptual* de los alumnos hacia la trigonometría es que sirve sólo para triángulos rectángulos. Estos *obstáculos didácticos*[6] son impuestos por las actividades áulicas pues en general los ejemplos y el tipo de actividades presentadas a los alumnos involucran sólo triángulos rectángulos. Basta ver el historial del tipo de ejercitación y evaluaciones que se realizan durante la enseñanza de la trigonometría las cuales por diversas razones (tiempo institucional, heterogeneidad de los grupos, recursos materiales, etc.) se enfoca en determinar si los alumnos reconocen las razones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos. Esto es más evidente aún, si se tiene en cuenta que el 13 % de las respuestas cuasicorrectas involucran solamente el Teorema de Pitágoras. Por lo tanto, por qué los alumnos deberían pensar que existen otros triángulos, especialmente en una evaluación donde el alumno tiene que demostrar lo que aprendió en clase.

²Data no incluida en las figuras 5 y 6

Estas soluciones cuasi-correctas muestran la diferencia sustancial entre la definición del objeto matemático y la imagen mental que los alumnos se forman de él, a partir del trabajo que deben llevar adelante en el aula. Si el docente no tiene en cuenta esta diferencia de percepciones sobre los objetos matemáticos en estudio, que existen naturalmente durante el proceso de enseñanza (lo que llamamos el *currículum disciplinar oculto*), la valoración sobre las habilidades y saberes que nuestros alumnos utilizan frente a un problema no siempre se ajusta a las habilidades y saberes motivados en el aula. Más aún, es probable que al diseñar los instrumentos de evaluación los docentes tengan en cuenta el objeto definido matemáticamente y no el objeto definido en el aula. De ahí la sensación de frustración que tienen los alumnos al sentir que ellos no aprueban o desaprueban: el docente lo hace por ellos.³ Esta misma frustración afecta a los docentes pues a partir de resultados de evaluación no satisfactorios, se infiere que el trabajo del docente tampoco lo es (este punto es discutible y requiere un análisis más profundo al respecto que escapa el objetivo de este artículo).

4. ¿Cómo revertir este problema?

A partir de una situación en apariencia conflictiva donde *los alumnos repiten conductas del trabajo áulico* que luego son evaluadas negativamente, es importante reflexionar sobre las prácticas docentes [10, 22, 13, 14] para utilizar estos errores para reconstruir el saber matemático desde una perspectiva diferente[32]. He aquí algunas sugerencias para implementar en el aula para ayudar a los alumnos a *entender triángulos*.

4.1. Acotar las respuestas

Es importante tener presente al momento de preparar un problema para evaluar no sólo qué habilidades fueron motivadas y utilizadas durante el desarrollo

³Un ejemplo típico en donde ocurre este divorcio entre lo enseñado y lo aprendido en el siguiente problema tipo en evaluaciones sobre el manejo de las propiedades en el anillo de polinomios:

Factorizar de la manera más conveniente el polinomio $x^2 - 3x + 2$

Se han dado casos en el que alumnos utilizan la fórmula de Bascara para factorizar dicho polinomio no obtienen reconocimiento alguno pues no era la manera más conveniente (y esto no es ficción!). Si el profesor realmente quería que los alumnos completaran cuadrados, pues entonces debe dejarlo explícito pues lo que para el docente es conveniente no necesariamente lo es para sus alumnos.

del tema en clase. Es nuestro caso, resulta evidente o al menos los números nos llevan a concluir que las razones trigonométricas fueron utilizadas la mayoría de las veces en triángulos rectángulos. Por lo tanto por qué pretender que los alumnos en una evaluación, donde las condiciones no son las óptimas para generar nuevas habilidades matemáticas sean capaces de manejar otro tipo de triángulos. Para *no innovar* en la evaluación al problema presentado se puede adjuntar un esquema del mismo de manera tal, para prevenir que los alumnos infieran propiedades erróneas del objeto del problema para poder utilizar *lo aprendido en clase*.

El error común a las soluciones B, C y D es la imposibilidad que la parcela triangular sea isósceles o rectángular. Este error puede provenir del hecho que los alumnos siempre se enfrentaron a situaciones donde los *triángulos eran construibles*. Una posibilidad para asegurarnos que todos los alumnos consideren el único triángulo posible con los datos del problema es reformularlo de la siguiente manera:

Se desea calcular el perímetro y área de una parcela triangular cuyos dos de sus lados miden 80m y 130m y forman un ángulo de 70° .

4.2. Aprovechando las oportunidades

Aún en el caso de que los alumnos tengan que calcular perímetro y área de la parcela triangular, no es claro que los alumnos entiendan que existe un único triángulo con estas propiedades. Por ello, es muy interesante retomar este problema y hacer una puesta en común con los alumnos [21]. Dado que el perímetro y área de una figura no están relacionados, la discusión de los alumnos sobre la diferencia en los resultados numéricos del problema brinda la oportunidad de introducir la idea de solución única en matemática⁴. Es importante aclarar este detalle ya que los alumnos muy a menudo tienen la idea que los problemas que se resuelven en matemática siempre tienen solución y es única. Sin embargo, en geometría una figura es única salvo isometrías. Por lo tanto se hace necesario precisar que significa que exista una única solución en geometría. Una respuesta muy común de los alumnos al enfrentarse a un problema que no tiene solución o tienen más de una es *no entiendo*[29]

⁴En clases de 20 a 30 alumnos la probabilidad que los alumnos trabajen con figuras distintas es alta. Si no surgieran diferencias numéricas en el resultado, el docente tiene que estar preparado para hacer *aparecer* casos diferentes que respondan a la misma consigna

Otra propuesta para implementar en el aula es permitir a los alumnos, modificar los datos del problema para que el triángulo resulte isósceles o rectángulo. De esta manera, nuestros alumnos se involucran directamente en el proceso de modelización en matemática: cuáles son las hipótesis mínimas necesarias para utilizar y generar un único modelo para analizar. Estas actividades de modelización no son frecuentes en el aula, conclusión a la que podemos arribar a partir de los datos de los resultados analizados: pues en el caso de las soluciones B y C no se utilizaron todas las hipótesis que se habían establecido. En el primer caso no se utilizó el hecho de que el triángulo era isósceles y en el último no se utilizó la medida del ángulo.

4.3. Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de la trigonometría

Uno de los errores principales en las propuestas metodológicas relacionadas con la enseñanza de la matemática es de índole epistemológico [25, 32], y en particular en la enseñanza de la trigonometría pues en general las razones trigonométricas se presentan lejos del contexto en el que surgieron hace más de 2000 años [4, 9]: triángulos semejantes, aquellos que permitieron calcular la pendiente de las pirámides de Egipto, aproximar el tamaño de la tierra y la luna, mediciones topográficas, etc.. Esto hace que la trigonometría surja en el aula como un saber descontextualizado, lo que hace que esta rama del conocimiento pierda identidad propia y se reduzca a una herramienta que sirve para resolver problemas de otras áreas del conocimiento. Por lo tanto es importante problematizar la trigonometría para dotarla de un significado propio [15]. Y esto se debe hacer pues la matemática es una ciencia social que resuelve problemas concretos que afectan la cotidianeidad de la gente. A partir de preguntas como

- Cómo medir la altura de una montaña o la distancia a través de un lago?
- por qué las Pirámides de Egipto tienen la misma inclinación?
- Dónde sentarse en el cine para tener el mayor ángulo de visión?
- Por qué los relojes a péndulo que se encuentran cerca se sincronizan?

se pueden introducir los problemas que indujeron al avance de las ideas que llevaron al de la trigonometría⁵. Al dotar el saber matemático de significado propio se recupera la atención de los alumnos y su propia motivación por aprender[29]

⁵Es importante notar que estas preguntas conducen al estudio de la trigonometría desde dos enfoques diferentes: las dos primeras preguntas tienen un enfoque geométrico pues la semejanza

5. Conclusiones

Si bien la evaluación y sus instrumentos forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje, la realidad indica que la enseñanza y la evaluación transitan caminos divergentes. El espíritu de este artículo fue presentar una situación real de evaluación y a partir del análisis de las soluciones presentadas por los alumnos proponer algunas alternativas para subsanar los errores cometidos por los alumnos. Para ello, se definieron *soluciones cuasicorrectas* que permitieron identificar las dificultades que los alumnos tienen al resolver problemas que involucran la trigonometría y se propusieron alternativas metodológicas para subsanar las percepciones erróneas de los alumnos.

6. Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a María de Gracia Mendonca, María Nélide Etcheverrito y María Claudia Etcheverrito por sus valiosos y constantes aportes hacia la mejora de este artículo.

Referencias

- [1] Alsina C., Burgues C., Fortuny J. *Materiales para construir la geometría*, Síntesis 1991.
- [2] Alsina C. *Sorpresa geométricas: los polígonos, los poliedros y Ud.* Red Olímpica 2000.
- [3] Artigue M., Douady R., Moreno L. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* Grupo Editorial Iberoamérica 1995.
- [4] Boyer C., Merzbach U, *A history of Mathematics* Princeton University Press 1985.
- [5] Bressan A.M., Bogisic B., Crego K. *Razones para enseñar geometría en la Educación Básica* - Ediciones Novedades Educativas, 2000.

de figuras ha dado respuestas satisfactorias, mientras que la última tiene un enfoque funcional pues involucran la modelización de fenómenos periódicos.

- [6] Brousseau G. *Theory of didactical situations in mathematics*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Southland, & V. Warfield, Eds. and Trans.) Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [7] Brousseau G. *Educación y Didáctica de las matemáticas* - Educación Matemática, México, 1999.
- [8] Bunge M. *Vistas y entrevistas* Ed. Sudamericana 1997.
- [9] Courant R., Robbins H. *What is mathematics* Oxford University Press 1996.
- [10] Consejo Universitario de Ciencias Exactas y Naturales *Autoevaluación y Acreditación de carreras de Profesorado* reunión Plenaria Mayo 2009.
- [11] Gentile E. *Álgebra* Eudeba, 1988.
- [12] Gentile E *Aritmética elemental en la formación matemática* OMA, 1991.
- [13] de Guzmán M. *Tendencias innovadoras en Educación Matemática* - Olimpiada Matemática Argentina, 1992.
- [14] Instituto Nacional de Formación Docente *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario*, Octubre 2009.
- [15] Montiel G. *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica* Tesis Doctoral, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México 2005.
- [16] Noriega, R. *Cálculo diferencial e integral* Editorial Docencia
- [17] Pacheco M. *Grupo de isometrías del plano euclídeo* Trabajos de Matemática, FaMAF, 1997.
- [18] Entrevista A. Paenza. 2007.
- [19] Parra C., Saiz I. *Didáctica de las matemáticas* Paidós, 2008.
- [20] Becker M.E., Pietrocola N., Sanches C. *Aritmética*, Red Olímpica, 2001.
- [21] Polya G. *How to Solve It* Penguin Books 1990.
- [22] Santaló L. *La geometría en la formación de profesores*, Red Olímpica 1993.

- [23] Santaló L., Llinares S., Sánchez V., Caballero A., Hoz Rosales A., *La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia* - Ediciones Rialp, 1994.
- [24] Secco N., Arce A. *Evaluación Integradora de los Espacios Curriculares de Matemática en el Primer Año de Polimodal.*, 2008.
- [25] Sierpinska A. *On understanding the notion of function*. En G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes Vol. 25, pp. 25-58). Washington, DC: Mathematical Association of America. 1992.
- [26] Smart J. *Modern geometries* 3rd Edition Brooke Cole 1988.
- [27] Spivak M. *Calculus* Revert 1978.
- [28] Proyecto de Investigación *El laboratorio de Geometría: un lugar para la recuperación de la motivación por aprender*, Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, Convocatoria PICTO Educación 2005, aprobado por Resolución ANPCYT 107 del 15 de Mayo del 2007. Alta: abril 2008. Director del Proyecto: Dr. Gabriel Soto
- [29] Soto G.; Etcheverrito M.N.; Etcheverrito M.C.; Nuez R. ; Mellado M. *El laboratorio de geometría: un espacio para recuperar la motivación por aprender*, II Encuentro regional de Formacin Docente- I Encuentro de alumnos de profesorado: Problemáticas y perspectivas de la formación docente, Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Mayo 2007.
- [30] Soto G., Mendonca M. *Curso Preuniversitario en Matemática* Facultad de Ingeniería, U.N.P.S.J.B., 2007, 2008 y 2009.
<http://www.ing.unp.edu.ar/matematica/CursoPreuniversitario.html>
- [31] Soto G. Centro de Modelamiento Matemático *El laboratorio de geometría: un lugar para recuperar la motivación por aprender*, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Setiembre 2008, Santiago, Chile.
- [32] Soto G., González M. *No te preocupes...en algún momento te va a servir*, Octubre 2009, Supervisión de Nivel Medio Comodoro Rivadavia, Chubut.
- [33] Stewart J., Redlin L., Watson S. *Preclulo* 5ta Ed. Thomson 2007.
- [34] Tirao J. *El plano* Editorial Docencia, 1979.

- [35] Araujo J., Keilhauser G., Pietrocola N., Vavilov V. *Área y volumen* Red Olímpica 2000.
- [36] Villarreal M., Borba M.C., Esteley C.B. *Voices from the south: dialogical relationships and collaborations in mathematics education* Internationalisation and Globalisation in Mathematics and Science Education (2008), B. Atweh et al. (eds.), Springer Science+Business Media B.V. 2008 pág. 383-402.

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco.
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería. Ciudad Universitaria, Km 4 - Comodoro Rivadavia (9000) Chubut-Argentina. TE=+54-297-4550836
gsoto@ing.unp.edu.ar