La sucesión de Lucas

María Isabel Viggiani Rocha

Consideramos la sucesión numérica $\{L_n\}$ definida por:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ si } n \geq 3 \text{ y } L_1 = 1 \text{ y } L_2 = 3.$$

Esta sucesión es conocida como **la sucesión de Lucas** y a sus términos se los llama **números de Lucas.**

El nombre de esta sucesión se debe al matemático francés **François Edouard Anatole Lucas** (1.842–1.891) quien estuvo muy interesado por la *Teoría de Números* y además estudió exhaustivamente la *sucesión de Fibonacci*, $\{a_n\}$ definida por:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ si } n \geq 3 \text{ con } a_1 = a_2 = 1$$

la cual hasta ese momento no había sido tenida en cuenta y *sus generalizaciones* (sucesiones que comienzan por 2 enteros positivos cualesquiera y a partir de ahí, cada término de la sucesión es suma de los 2 precedentes).

La más sencilla de las generalizaciones es la hoy conocida por la sucesión de Lucas. Sus 25 primeros términos son:

L_1=1	L_2=3	L_3=4	L_4=7	L_5=11
L_6=18	L_7=29	L_8=47	L_9=76	L_{10}=123
L_{11}=199	L_{12}=322	L_{13}=521	L_{14}=843	L_{15}=1.364
L_{16}=2.207	L_{17}=3.571	L_{18}=5.778	L_{19}=9.349	L_{20}=15.127
L_{21}=24.476	L_{22}=39.603	L_{23}=64.079	L_{24}=103.682	L_{25}=167.761

La R.E.M. y Edouard Lucas

a) Volumen 8 Número 2: "Biografía de Edouard Lucas".

b) Volumen 8, Número 1: "Divisibilidad de Números Combinatorios – El Teorema de Lucas" (Roberto J. Miatello – María Isabel Viggiani Rocha)

c) Volumen 8 Número 3: "El sistema binario – El juego del Nim y otras aplicaciones" (Roberto J. Miatello – María Isabel Viggiani Rocha), donde se trata nuevamente "el Teorema de Lucas" y se presenta: "Las torres de Brahama y de Hanoi" (problema planteado por Lucas en 1.883)

d) Volumen 21, Número 3: "La sucesión de Fibonacci" (María Isabel Viggiani Rocha). En este artículo aparece la sucesión de Lucas y nociones básicas como ejemplo de las generalizaciones de Fibonacci.

e) Volumen 25 Número 1: En el "Editorial" se comenta que en la revista *Annals of Mathematics,* Universidad de Princenton, E.E.U.U., vol 203, año 2.006, págs 969 a 1.019, aparece un artículo del prof. Bujeauk M. Sissek donde demuestra, entre otros teoremas, el siguiente resultado: "Los únicos números de Lucas igual a una potencia de un número natural son poquísimos, sólo: 1 y 4."

Desarrollo del tema

Si bien en la introducción definimos que $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ si $n \geq 3$ y $L_1 = 1$ y $L_2 = 3$, también **los números de Lucas** poseen la siguiente expresión:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para una demostración consultar Volumen 21 Número 3.

Recordando que, $f = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número áureo), la expresión anterior se escribe:

$$L_n = f^{\,n} + (-f)^{-n}$$

1- Algunos resultados conocidos sobre esta sucesión.

Probaremos algunos de ellos en **3-**:

a) La razón entre cada par de números consecutivos va oscilando por encima y por debajo de f y conforme se va avanzando en esta sucesión, la diferencia con f va haciéndose cada vez menor. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = f$$

b) También podemos encontrar que:

b₁) $\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+k}}{L_n} = f^{\,k}$

b₂) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} L_{n+k}}{L_{n+m} - L_n} = f$

b₃) $L_{n+1} + f^{-1} L_n = \sqrt{5}\, f^{\,n}$

c) Otra forma de conocer un número de Lucas (L_{n+1}) sin conocer los dos anteriores es:

$$L_{n+1} = \left[\frac{1+(1+\sqrt{5})\,L_n}{2} \right],\ n \geq 3$$, siendo [x] = parte entera de x. O lo que

es lo mismo

$$L_{n+1} = \left[\frac{1}{2} + f\ L_n \right],\ n \geq 3.$$

d) L_n y L_{n+1} son coprimos [1]

e) $(L_n)^2 - L_{n-1} . L_{n+1} = \pm 5$, (+ si n es par, - si n es impar)

f) $$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

g) A partir de n = 2, el 4º de cada 4 números de Lucas, es divisible por 3. A partir de n = 3 , el 3º de cada 3 números, es divisible por 2. A partir de n = 4, el 8º de cada 8 números, es divisible por 7. A partir de n = 5, el 10º de cada 10 números, es divisible por 11. Así podríamos continuar.

h) Ningún número de Lucas es divisible por 5.

2- Existen muchas fórmulas sencillas y resultados que interrelacionan la sucesión de Fibonacci y la de Lucas, de los cuales verificaremos algunos en 3-:

---

[1] Como L_n tiende a infinito esta propiedad genera otra prueba de un teorema de Euclides."Existen infinitos números primos".

a) $L_n = a_{n-1} + a_{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}$

c) $a_{2n} = a_n \,.\, L_n$

d) $L_{n+m} = a_m L_{n+1} + a_{m-1} L_n$, $m \geq 2$

e) $\sum_{k=0}^{m} L_{n+k} = a_{m+1} L_n + (a_{m-2} - 1) L_{n+1}$

f) La ecuación diofántica $5x^2 + 4 = y^2$ sólo tiene por soluciones enteras $x = a_n$ $y = L_n$; $x = -a_n$, $y = L_n$, $x = a_n$, $y = -L_n$ $x = -a_n$, $y = -L_n$.
Aparentemente, estas son sus únicas soluciones en los enteros.

g) 1 y **3** son ambos números de Lucas y de Fibonacci, no hay otros (Martin D. Hirsch, en *Mathematics Magazine*, vol 50, noviembre 1.977, pág 264).

h) John H. E. Cohn, del Belford College, de la Universidad de Londres, demostró en 1.963 que hay sólo dos cuadrados perfectos entre los números de Fibonacci: a saber **1** y **144** y sólo dos entre los números de Lucas los cuales son: **1** y **4**.

i) Hymie London y Raphael Finkeeistein en *The Fibonacci Quarterly* (revista cuatrimestral desde 1.963, cuya edición está a cargo de la Fibonacci Association. En la revista se trata la sucesión de Fibonacci y sus sucesiones generalizadas, como así también, otras sucesiones análogas).
En vol. 77, diciembre 1.969, págs. 476 a 481, se encuentra una prueba de que

hay sólo dos cubos perfectos entre los números de Fibonacci: **1** y **8** y sólo uno entre los de Lucas: **1**.

Lo expuesto en **h)** y en **i)** es lo que en la revista *Annals of Mathematics (*vol. 203, año 2.006, págs. 969 a 1.019) el prof. Bujeauk. M. Sissek demuestra nuevamente.

3- Demostraciones de algunos resultados sobre la sucesión de Lucas:

1- a) Sea la sucesión $\{k_n\}$, $k_n = \dfrac{L_{n+1}}{L_n}$ $n \geq 1$, probemos que:

- $k_n = 1 + \dfrac{1}{k_{n-1}}$, $n \geq 2$. En efecto,

$$1 + \frac{1}{k_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{L_n}{L_{n-1}}} = 1 + \frac{L_{n-1}}{L_n} = \frac{L_n + L_{n-1}}{L_n} = \frac{L_{n+1}}{L_n} = k_n$$

QED

- $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = f.$

La sucesión $\{k_n\}$ es convergente, sino no tendría sentido decir que vamos a probar que $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = f$. La convergencia resulta de escribir

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = f \; \frac{1 + (-1)^{n+1} (f)^{-2(n+1)}}{1 + (-1)^n (f)^{-2n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} k_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k_{n-1}} \right) \quad \textbf{(1).}$$

Como $\{k_n\}$ es convergente, diremos que $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = K$, como así también

$\lim\limits_{n\to\infty} k_{n-1}$ = K, por lo tanto la expresión **(1)** se convierte en $K = 1 + \frac{1}{K}$,

de donde $K^2 - K + 1 = 0$ y obtenemos que $K = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, de esto

$K = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pues $k_n > 0,\ \forall n$, entonces K debe ser mayor que 0 y

llegamos a que $K = \lim\limits_{n\to\infty} k_n = f$ **QED**

De manera que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = f$.

b) Verificación de **b$_1$)** Probaremos este resultado por inducción,

considerando la proposición

$$P(m):\ \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+m}}{L_n} = f^{\,m}$$

Sea P(n) una proposición asociada a todo número natural n.

Si se cumple: ***1)*** *la proposición P(1) es verdadera,*

2) *"n, si la proposición P(n) es verdadera, entonces también lo es P(n+1).*

Entonces, la proposición P(n) es verdad para todo n.

P(1) es verdadera pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = f^1 \text{ ver } \mathbf{a)} \qquad \mathbf{(2)}$$

Supongamos P(m-1) verdadera:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+m-1}}{L_n} = f^{m-1} \qquad \textbf{(3),}$$

debemos probar que

$$P(m): \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+m}}{L_n} = f^m$$

es verdadera.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+m}}{L_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+m} \cdot L_{n+m-1}}{L_n \cdot L_{n+m-1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{L_{n+m-1}}{L_n} \frac{L_{n+m}}{L_{n+m-1}} \right) \qquad \textbf{(4)}$$

Sabemos que: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{L_{n+m-1}}{L_n} = f^{m-1}$ por **(3)** y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+m}}{L_{n+m-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{(n+m-1)+1}}{L_{n+m-1}} = f \text{ por } \textbf{(2)},$$

entonces a **(4)** lo podemos calcular como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+m-1}}{L_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+m}}{L_{n+m-1}} = f^{m-1}\ f = f^m \qquad \textbf{QED}$$

b_3) Heurística para deducir la fórmula **b_3** y su prueba.

Si llamamos H a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, encontramos que H = $\frac{1}{1+H}$, de donde

1 + H = $\frac{1}{H}$ y 1 + 2 H = 1 + $\frac{2}{1+H}$ = $\frac{3+H}{1+H}$, por lo tanto

$$(1 + 2\,H)\,(1 + H) = 3 + H.$$

Así resulta que $(1 + 2\,H)\,(1 + H)^2 = (3 + H)\,(1 + H) =$

$(3 + H)\,\frac{1}{H} = \frac{3}{H} + 1 = 3\,(1 + H) + 1 = 4 + 3H$.

De manera similar llegaremos a que $(1 + 2\,H)(1 + H)^3 = 7 + 4H$.

Por lo tanto observando la tabla de valores de L_n presuponemos que

$(1 + 2\,H)\,(1 + H)^n = L_{n+1} + H\,L_n$. Como $H = \phi^{-1}$, y

$1+2\,H = \sqrt{5}$, se infiere que $\sqrt{5}\;\phi^n = L_{n+1} + \phi^{-1}\,L_n$.

Ahora probaremos por inducción la igualdad considerando la proposición

$$P(n):\ (1 + 2\,H)\,(1 + H)^n = L_{n+1} + H\,L_n$$

P(1) es verdadera pues

$$(1 + 2\,H)\,(1 + H)^1 = L_2 + H\,L_1 = 4 + 3\,H.$$

Supongamos P(n-1) verdadera: $(1 + 2\,H)\,(1 + H)^{n-1} = L_n + H\,L_{n-1}$,

debemos probar que

$$P(n):\ (1 + 2\,H)\,(1 + H)^n = L_{n+1} + H\,L_n$$

es verdadera.

$(1 + 2\,H)\,(1 + H)^n = [(1 + 2\,H)\,(1 + H)^{n-1}]\,(1 + H) =$

$$= (L_n + H\,L_{n-1})\frac{1}{H} = \frac{L_n}{H} + L_{n-1} =$$

$= L_n\,(1 + H) + L_{n-1} = (L_n + L_{n-1}) + H\,L_n = L_{n+1} + H\,L_n$ **QED**

Recordando que $H = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $1 + H = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = f$, escribiremos la expresión $(1 + 2\,H)\,(1 + H)^n = L_{n+1} + H\,L_n$ como

$$\left(1+2\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = L_{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,L_n \quad \text{de donde}$$

$\sqrt{5}\; f^{\,n} = L_{n+1} + f^{-1}\,L_n$ **QED**

e) Verificación de $(L_n)^2 - L_{n-1}\,.\,L_{n+1} = \pm 5$, (+ si n es par, - si n es impar)

$(L_n)^2 - L_{n-1}\;L_{n+1} =$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} -$$

$$-\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \frac{(-4)^n}{2^{2n-1}} -$$

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= (-1)^n\, 2 - \left[\frac{(1+\sqrt{5})^2(-4)^n}{2^{2n}} + \frac{(1-\sqrt{5})^2(-4)^n}{2^{2n}}\right] =$$

$$= (-1)^n\, 2 - \left[\frac{(-1)^{n-1}(3+\sqrt{5})}{2} + \frac{(-1)^{n-1}(3-\sqrt{5})}{2}\right] =$$

$$= (-1)^n\, 2 - (-1)^{n-1}\, 3 = (-1)^n (2+3) = (-1)^n\, 5 = \begin{cases} 5 \quad , & n \text{ es par} \\ -5 \quad , & n \text{ es impar} \end{cases}$$ **QED**

f) Probemos por inducción que $L_{n+2} - 3 = \sum_{i=1}^{n} L_i$ considerando

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

P(1) es verdadera pues

$$\sum_{i=1}^{1} L_i = L_1 = 1 \quad y \quad L_{1+2} - 3 = L_3 - 3 = 4 - 3 = 1 \ \checkmark$$

Supongamos P(n-1) verdadera, es decir tenemos por hipótesis que

$$\sum_{i=1}^{n-1} L_i = L_{n+1} - 3$$

debemos probar que

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3 \text{ es verdadera.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n-1} L_i + L_n = (L_{n+1} - 3) + L_n = (L_{n+1} + L_n) - 3 = L_{n+2} - 3 \quad \textbf{QED}$$

2- a) Prueba de $a_{n-1} + a_{n+1} = L_n$.

Recordemos que $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[f^n - (-f)^{-n}\right] \quad \text{(pág. 31, Volumen 21- Número 3)}$$

De donde,

$$a_{n-1} + a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[f^{n-1} - (-f)^{-(n-1)} + f^{n+1} - (-f)^{-(n+1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[f^{n-1}(1+f^2) - (-f)^{-(n+1)}(1+f^{-2})\right] = \frac{1+f^2}{\sqrt{5}f}\left[f^n - (-f)^{-n}\right] =$$

$$\frac{1+f^2}{\sqrt{5}f} L_n = L_n \quad (\text{pues } 1+f^2 = \sqrt{5}f\,) \qquad \textbf{QED}$$

b) Prueba de $a_n = \dfrac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}$.

$$\frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5} = \underbrace{\frac{(a_{n-2} + a_n) + (a_n + a_{n+2})}{5}}_{\text{usando } \mathbf{a)}} =$$

$$= \underbrace{\frac{2a_n + (a_n - a_{n-1}) + (a_n + a_{n+1})}{5}}_{\text{usando definición sucesión Fibonacci}} =$$

$$= \underbrace{\frac{4a_n + a_{n+1} - a_{n-1}}{5}}_{\text{usando definición sucesión Fibonacci}} = \frac{4a_n + a_n}{5} = a_n \qquad \textbf{QED}$$

c) Prueba de $a_{2n} = a_n L_n$.

$a_{2n} = a_n . L_n \Leftrightarrow L_n = a_{2n} / a_n.$

Recordemos que $a_{2n} / a_n = \begin{cases} a_n + 2\ a_{n-1} & n \neq 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$

(pág. 31, Volumen 21, Número 3, **1-c)**)

La expresión dada para L_n en **a)** vale para $n \geq 2$, pues si n = 1, $a_{n-1} = a_0$ lo cual no es posible, por lo tanto $L_n = a_{n-1} + a_{n+1} = a_{n-1} + (a_{n-1} + a_n) = 2\ a_{n-1} + a_n = a_{2n} / a_n$, $n \neq 1$.

Si n = 1: $a_1 = 1$ y $L_1 = 1$, de donde $a_1 \,.\, L_1 = 1 = a_2$ **QED**

d) Prueba de $L_{n+m} = a_m \; L_{n+1} + a_{m-1} \; L_n$.

$$a_m\, L_{n+1} + a_{m-1}\, L_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[f^m - (-f)^{-m}\right](f^{\,n+1} + (-f)^{-(n+1)}) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[f^{m-1} - (-f)^{1-m}\right](f^{\,n} + (-f)^{-n}) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[f^{m+n+1} + f^m(-f)^{-(n+1)} - f^{n+1}(-f)^{-m} - (-f)^{-(m+n+1)} +\right.$$

$$\left. + \; f^{m+n-1} + f^{m-1}(-f)^{-n} - f^n(-f)^{1-m} - (-f)^{1-m-n}\right] =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[f^{m+n-1}\left(1+f^2\right) - (-f)^{-(m+n+1)}\left(1+f^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1+f^2}{\sqrt{5}}\left[f^{m+n-1} - (-f)^{-(m+n+1)}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{5}\,f}{\sqrt{5}}\left[f^{m+n-1} - (-f)^{-(m+n+1)}\right]$$

$$= f^{m+n} + (-1)^{m+n+2} f^{m+n} = f^{m+n} + (-1)^{m+n} f^{m+n} = L_{n+m}$$ **QED**

ver en **3-2- a)**

e) Prueba de $\sum_{k=0}^{m} L_{n+k} = a_{m+1} L_n + (a_{m-2} - 1) L_{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{m} L_{n+k} = L_n + L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+3} + \ldots + L_{n+m} =$$

$$= L_n + L_{n+1} + (a_2 L_{n+1} + a_1 L_n) + (a_3 L_{n+1} +$$

usando **-2- d)**

$$+ a_2 L_n) + \ldots + (a_m L_{n+1} + a_{m-1} L_n) = L_n + L_{n+1} + (a_1 + a_2 + \ldots +$$

$$+ a_{m-1}) L_n + (a_2 + a_3 + \ldots + a_m) L_n$$

Recordemos que: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+2} - 1$ (pág. 32, Volumen 21, Número 3, **1-i)**), por lo tanto la expresión anterior se transforma en:

$$L_n + L_{n+1} + (a_{m+1} - 1) L_n + (a_{m+2} - 1 - a_1) L_{n+1} = a_{m+1} L_n + (a_{m+2} - a_1) L_{n+1} = a_{m+1} L_n + +$$

$$+ (a_{m-2} - 1) L_{n+1}$$ **QED**

Bibliografía

***** R.E.M.: **#** Volumen 8 Números 1, 2 y 3 (1.993) .

Volumen 10 Número 1: "Principio de Inducción" (M.I. Viggiani Rocha y G.P. Ovando) (1.995).

Volumen 21, Número 3 (2.006)

Volumen 25, Número 1 (2.010)

* Martin Gardner (Alianza Editorial, Madrid): **#** Carnaval matemático (1.983).

***** Lucas numbers and the Golden Section
(http://milan.milanovic.org/math/english/lucas/ lucas. html)

***** La sucesión de Fibonacci (Wikipedia).

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología.
Universidad Nacional de Tucumán.