Lógica Simbólica y Teoría de Conjuntos

Parte II

Juan Carlos Bressan y Ana E. Ferrazzi de Bressan

Resumen

En la Parte I se introdujeron simultáneamente las proposiciones, funciones proposicionales y sus conjuntos de verdad. Cada conectiva definida mediante una tabla de verdad, se relacionó con la operación entre conjuntos correspondiente. Las tautologías se utilizaron para diferenciar el condicional de la implicación lógica, así como el bicondicional de la equivalencia lógica.

En esta Parte II del trabajo, se analizan las tautologías y las formas de razonamiento válidas, se relaciona el cuantificador universal con la conjunción y la intersección de familias de conjuntos. Análogamente, se procede con el cuantificador existencial relacionándolo con la disyunción inclusiva y la unión de familias de conjuntos. Se destacan la diferencia entre demostraciones por el contrarrecíproco y por el absurdo y la importancia en el orden en que se escriben los cuantificadores en Matemática.

La numeración de los parágrafos así como de las tablas continúa la numeración de la Parte I, por cuanto las dos partes están estrechamente relacionadas constituyendo entre ambas la totalidad del trabajo.

6. Tautologías y Formas de Razonamiento Válidas

En las tablas consideradas los valores de verdad de la proposición compuesta definida mediante conectivas, dependía de los valores de verdad de las proposiciones p y q que la formaban. Hay algunos casos en que la tabla de verdad toma únicamente uno de los valores F o V. En las *contradicciones* toma únicamente el valor F, por ejemplo, en $p \wedge (\neg p)$ y en $(p \wedge q) \rightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$. En las tautologías, como las vistas en los parágrafos 5.4 y 5.5, toma únicamente el valor V. Otros ejemplos de tautologías son el *principio del tercero excluido* $p \vee (\neg p)$ y los *principios de identidad* $p \rightarrow p$ y $p \leftrightarrow p$.

Las tautologías permiten probar la validez de razonamientos. Para ello, se toma como antecedente de la implicación la conjunción de todas las proposiciones que constituyen sus premisas y como consecuente la conclusión, comprobándose así que es una tautología. Esto asegura que de la verdad de las premisas se deduce la verdad de la conclusión. Por ejemplo, la validez del *modus ponens*,

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \quad q \end{array}$$

resulta de la tautología $[(p \to q) \wedge p] \to q$, como se observa en la Tabla 18.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Tabla 18

Puesto que la última columna de la tabla tiene únicamente el valor de verdad V, se obtiene que $[(p \to q) \wedge p] \to q$ es una tautología, es decir, $(p \to q) \wedge p$ *implica lógicamente* q, que en forma simbólica se denota $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$.

Recordemos que, según afirmamos en 5.3, la forma de razonamiento

$$\begin{array}{l} p \text{ o } q \\ \underline{\neg p \qquad} \\ \quad q \end{array}$$

llamada silogismo disyuntivo, es válida tanto para la disyunción inclusiva como para la exclusiva. Esto puede comprobarse en la siguiente tabla de verdad.

p	$\neg p$	q	$p \vee q$	$p \nabla q$	$(p \vee q) \wedge (\neg p)$ $(p \nabla q) \wedge (\neg p)$	$[(p\ o\ q) \wedge (\neg p)] \to q$
V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V

Tabla 19

Como puede observarse en la Tabla 19, hemos utilizado una misma columna para $(p \vee q) \wedge (\neg p)$ y para $(p \nabla q) \wedge (\neg p)$ pues tienen los mismos valores de verdad. Así, vale la equivalencia lógica $[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \Leftrightarrow [(p \nabla q) \wedge (\neg p)]$. De allí que podamos resumir en la última columna los valores de verdad de $[(p\ o\ q) \wedge (\neg p)] \to q$ donde el "o" puede remplazarse por la disyunción inclusiva así como la exclusiva. De esta forma, $[(p\ o\ q) \wedge (\neg p)] \to q$ es una tautología y el silogismo disyuntivo es una forma de razonamiento válida. Para destacar la implicación lógica escribiremos $[(p\ o\ q) \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$.

Otra forma de razonamiento válido es el *silogismo hipotético*,

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

El mismo se obtiene de la tautología $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$, como puede verse en la Tabla 20.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to$ $\to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	V	F	V	**V**
V	F	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	**V**

Tabla 20

Si destacamos la implicación lógica tendremos

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r) \,.$$

7. Cuantificadores

Vamos a hacer un estudio de los cuantificadores universal y existencial que constituyen una herramienta de gran utilidad en Matemática, por cuanto permiten expresar las definiciones con una notación precisa y que por lo tanto no se preste a ambigüedades. Si embargo, el lenguaje coloquial no debe descuidarse y es conveniente que el alumno esté acostumbrado a ambos lenguajes por cuanto en algunos casos el uso correcto de los cuantificadores puede resultar un poco dificultoso, siendo preferible en ese caso utilizar el lenguaje coloquial en lugar de hacer un uso inadecuado de los mismos.

7.1. Cuantificadores universal y existencial

Consideremos una forma proposicional $a(x)$ donde $x \in U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Al reemplazar la indeterminada x por un elemento $x_i \in U$ obtendremos una proposición $a(x_i)$ que podrá ser verdadera o falsa. Si tomamos todos los valores $x_1, x_2, ..., x_n \in U$, la conjunción $a(x_1) \wedge a(x_2) \wedge ... \wedge a(x_n)$ será verdadera únicamente si cada una de las proposiciones $a(x_1), a(x_2), ..., a(x_n)$, que intervienen en la conjunción es verdadera. En este caso la conjunción $a(x_1) \wedge a(x_2) \wedge ... \wedge a(x_n)$ significará que para todo $x_i \in U$ es $a(x_i)$ una proposición verdadera. Esto se simbolizará mediante $(\forall x \in U)\,[a(x)]$, que se lee "para todo $x \in U$ se cumple $a(x)$". El símbolo $\forall$ se lee *para todo* y se llama *cuantificador universal*. Puesto que la forma proposicional $a(x)$ tiene como única variable x, la expresión cuantificada $(\forall x \in U)\,[a(x)]$ es una proposición. Si bien la introducción de este cuantificador fue hecha partiendo de un conjunto universal finito, sigue siendo válida cuando el universal es un conjunto infinito, en cuyo caso estamos ante una conjunción de las infinitas proposiciones que se obtienen al reemplazar la indeterminada por cada uno de los elementos del conjunto universal considerado. En tal sentido cabe destacar que para representar el cuantificador universal puede también utilizarse en lugar de "$\forall$", el símbolo en mayúscula de la conjunción "$\bigwedge$" como lo hace Kuratowski, K. (1966).

Dada la función proposicional $a(x)$ y su conjunto de verdad $A = \{\, x \in U : a(x) \,\}$, resulta la equivalencia de $(\forall x \in U)\,[a(x)]$ con $A = U$.

Sabemos que si $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, $A \cap B = \{\, x \in U : x \in A \wedge x \in B \,\}$. Análogamente, si la familia $(A_i)_{i \in I}$ es tal que $(\forall i \in I)[A_i \subseteq U]$, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i = \{\, x \in U : (\forall i \in I)[x \in A_i]\,\}$.

Si seguimos los pasos que nos llevaron al cuantificador universal podremos introducir el cuantificador existencial. Consideremos nuevamente una forma proposicional $a(x)$ donde $x \in U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Si tomamos todos los valores $x_1, x_2, ..., x_n \in U$, la disyunción inclusiva $a(x_1) \vee a(x_2) \vee ... \vee a(x_n)$ será verdadera si al menos una de las proposiciones $a(x_1), a(x_2), ..., a(x_n)$ es verdadera. De esta forma la disyunción $a(x_1) \vee a(x_2) \vee ... \vee a(x_n)$ significará que existe algún $x_i \in U$ tal que $a(x_i)$ es una proposición verdadera. Esto se simbolizará mediante $(\exists x \in U)\,[a(x)]$, que se lee "existe algún $x \in U$ tal que $a(x)$". El símbolo $\exists$ se llama *cuantificador existencial*. Puesto que la forma proposicional $a(x)$ tiene como única variable x, la expresión cuantificada $(\exists x \in U)\,[a(x)]$ es una proposición. Como en el caso del cuantificador universal, la introducción de este cuantificador fue hecha partiendo de un conjunto universal U finito; no obstante, sigue siendo válida cuando el conjunto universal U es infinito, en cuyo caso se trata de una disyunción inclusiva de las infinitas proposiciones que se obtienen al reemplazar la indeterminada por cada uno de los elementos del conjunto universal. Cabe destacar que para representar el cuantificador existencial puede también utilizarse en lugar de "$\exists$", el símbolo en mayúscula de la disyunción inclusiva "$\bigvee$" como lo hace Kuratowski, K. (1966).

Consideremos la forma proposicional $a(x)$ y su conjunto de verdad

$A = \{\, x \in U : a(x) \,\}$.

Evidentemente, $(\exists x \in U)\,[a(x)]$ es equivalente a $A \neq \phi$.

Sabemos que si $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, $A \cup B = \{\, x \in U : x \in A \vee x \in B \,\}$. Análogamente, si la familia $(A_i)_{i \in I}$ es tal que $(\forall i \in I)[A_i \subseteq U]$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i = \{\, x \in U : (\exists i \in I)[x \in A_i]\,\}$.

La introducción de los cuantificadores se hizo partiendo de un conjunto universal o referencial U finito para luego pasar al caso infinito. Lo único que importa es que $U \neq f$.

7.2. Negación de cuantificadores

Ahora veremos la negación de cuantificadores de una función proposicional $a(x)$, mediante su conjunto de verdad $A = \{\, x \in U : a(x) \,\}$.

(i) Sabemos que $(\forall x \in U)\,[a(x)]$ es equivalente a $A = U$. En consecuencia,

$\neg(\forall x \in U)\,[a(x)]$ equivalente a $A \neq U$, lo cual es equivalente a $A' \neq U'$, es decir, $A' \neq f$, lo cual equivale a $(\exists x \in U)\,[\neg a(x)]$. Luego:

$$\neg(\forall x \in U)\,[a(x)] \Leftrightarrow (\exists x \in U)\,[\neg a(x)].$$

(ii) Vimos que $(\exists x \in U)\,[a(x)]$ es equivalente a $A \neq f$. En consecuencia,

$\neg(\exists x \in U)\,[a(x)]$ equivalente a $A = f$, lo cual es equivalente a $A' = f'$, es decir $A' = U$, lo cual equivale a $(\forall x \in U)\,[\neg a(x)]$. En consecuencia:

$$\neg(\exists x \in U)\,[a(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in U)\,[\neg a(x)].$$

Ahora vamos a analizar mediante los conjuntos de verdad el caso en que partimos de la proposición $(\forall x \in U)\,[b(x) \to c(x)]$, donde los conjuntos de verdad de las funciones proposicionales son $B = \{\, x \in U : b(x) \,\}$ y $C = \{\, x \in U : c(x) \,\}$.

En el parágrafo 5.4, vimos que $(\forall x \in U)\,[b(x) \to c(x)]$ es equivalente a $B' \cup C = U$. En consecuencia, obtenemos la siguiente cadena de equivalencias lógicas:
$\neg(\forall x \in U)\,[b(x) \to c(x)]$ equivale a $B' \cup C \neq U$; por complementación de ambos miembros, $[B' \cup C]' \neq f$, que es equivalente a $B \cap C' \neq f$, lo cual es equivalente a $(\exists x \in U)\,[b(x) \wedge \neg c(x)]$. De esta forma resulta:

$$\neg(\forall x \in U)\left[b(x) \to c(x)\right] \Leftrightarrow (\exists x \in U)\left[b(x) \wedge \neg c(x)\right].$$

Estimamos que el uso de los conjuntos de verdad de las formas proposicionales ayuda a la mejor comprensión de la negación de los cuantificadores por parte del alumno.

En muchos casos los alumnos confunden las demostraciones por el contrarrecíproco con aquéllas que son por el absurdo. El lenguaje simbólico ayuda a diferenciar las unas de las otras.

Si tenemos un teorema de la forma $(\forall x \in U)\left[p(x) \to q(x)\right]$, su demostración por el contrarrecíproco consiste en demostrar $(\forall x \in U)\left[(\neg q(x)) \to (\neg p(x))\right]$ en cuyo caso no se trata de llegar a ninguna contradicción ni absurdo.

Sabemos, por la Tabla 10, que

$$(\forall x \in U)\left[p(x) \to q(x)\right] \Leftrightarrow (\forall x \in U)\left[\left(\neg p(x)\right) \vee q(x)\right].$$

Así, si efectuamos la demostración por el absurdo, supondremos que $\neg(\forall x \in U)\left[p(x) \to q(x)\right]$, es decir que $\neg(\forall x \in U)\left[\left(\neg p(x)\right) \vee q(x)\right]$. Teniendo en cuenta cómo se efectúa la negación del cuantificador universal, resulta la proposición equivalente $(\exists x \in U)\neg\left[\left(\neg p(x)\right) \vee q(x)\right]$ que por una de las leyes de De Morgan es equivalente a $(\exists x \in U)\left[p(x) \wedge \left(\neg q(x)\right)\right]$. De esta forma, al efectuar la demostración por el absurdo se trata de llegar a partir de esta última proposición a alguna contradicción con definiciones, teoremas o axiomas dados.

7.3. El orden de los cuantificadores

Es fundamental insistir en el orden en que se escriben los cuantificadores y en la dependencia de los cuantificadores existenciales respecto de los universales que lo preceden. Por ejemplo, al formular los axiomas de existencia de elemento neutro y de inverso en un grupo G escribimos, respectivamente

$$(\exists u \in G)(\forall x \in G)\left[x * u = u * x = x\right],$$

$$(\forall x \in G)(\exists x' \in G)\left[x * x' = x' * x = u\right].$$

Por el orden de los cuantificadores, el elemento neutro u no depende de x, mientras que el inverso x' depende del x considerado.

Otro ejemplo que conviene mencionar es la definición de continuidad en $x_0 \in R$ y su aplicación posterior a la continuidad y la continuidad uniforme en un intervalo. Recordemos que f *es continua* en x_0 si y solo si $\underset{x \to x_0}{lím} f(x) = f(x_0)$, lo cual significa que

$$(\forall e > 0)(\exists d > 0)(\forall x \in R)\left[x \in (x_0 - d;\, x_0 + d) \to f(x) \in (f(x_0) - e\,;\, f(x_0) + e)\right].$$

Por otra parte, f es continua en un intervalo $I \subseteq R$ si y solo si

$$(\forall x_0 \in I)(\forall e > 0)(\exists d > 0)(\forall x \in I)$$
$$\left[\, x \in (x_0 - d; x_0 + d) \to f(x) \in (f(x_0) - e\,;\, f(x_0) + e)\,\right].$$

De esta forma, si el intervalo es cerrado, por ejemplo $I = [a; b]$, resulta que en los extremos se pide simplemente la continuidad lateral, es decir, $\underset{x \to a^+}{lím} f(x) = f(a)$ y $\underset{x \to b^-}{lím} f(x) = f(b)$.

Puesto que por la permutación de cuantificadores universales consecutivos se obtiene una fórmula lógicamente equivalente, la definición anterior puede expresarse de la siguiente forma:

$$(\forall e > 0)(\forall x_0 \in I)(\exists d > 0)(\forall x \in I)$$
$$\left[\, x \in (x_0 - d; x_0 + d) \to f(x) \in (f(x_0) - e\,;\, f(x_0) + e)\,\right].$$

Evidentemente, como en la expresión anterior, d depende de e y de x_0.

Esta definición de continuidad en un intervalo I difiere de la de continuidad uniforme en I en el orden de los cuantificadores. En efecto, f es *uniformemente continua* en I si y solo si,

$$(\forall e > 0)(\exists d > 0)(\forall x_0 \in I)(\forall x \in I)$$
$$[\, x \in (x_0 - d ; x_0 + d) \rightarrow f(x) \in (\, f(x_0) - e \,;\, f(x_0) + e \,) \,].$$

Observemos la diferencia de ubicación de los cuantificadores en ambas definiciones. Mientras que en la definición de continuidad en I figuran $(\forall x_0 \in I)(\forall e > 0)(\exists d > 0)(\forall x \in I)$, o $(\forall e > 0)(\forall x_0 \in I)(\exists d > 0)(\forall x \in I)$, en la de continuidad uniforme tenemos $(\forall e > 0)(\exists d > 0)(\forall x_0 \in I)(\forall x \in I)$. Es decir, en la primera d depende de x_0 y de e, mientras que en la de continuidad uniforme d depende únicamente de e. Esto ocurre porque $(\forall x_0 \in I)(\exists d > 0)$ no es equivalente a $(\exists d > 0)(\forall x_0 \in I)$. De esta forma, el orden de los cuantificadores universal y existencial permite diferenciar los dos conceptos.

Si consideramos dos conjuntos $X \neq f$, $Y \neq f$ y una función proposicional $a(x, y)$, obtenemos las siguientes equivalencias e implicaciones lógicas.

1.- $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)[a(x, y)] \Leftrightarrow (\forall y \in Y)(\forall x \in X)[a(x, y)].$

2.- $(\exists x \in X)(\exists y \in Y)[a(x, y)] \Leftrightarrow (\exists y \in Y)(\exists x \in X)[a(x, y)].$

3.- $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)[a(x, y)] \Rightarrow (\forall y \in Y)(\exists x \in X)[a(x, y)].$

4.- $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)[a(x, y)] \Rightarrow (\exists x \in X)(\exists y \in Y)[a(x, y)].$

Como consecuencia de la implicación lógica 3, podemos afirmar que de la continuidad uniforme en I se deduce la continuidad en I, pero no la recíproca. El teorema de Heine-Cantor es el que asegura que si f es continua en $I = [a; b]$, entonces f es uniformemente continua en dicho intervalo cerrado.

7.4. Cuantificadores, conectivas y conjuntos de verdad

Veremos en qué casos se puede distribuir un cuantificador en una función proposicional compuesta formada por dos funciones proposicionales unidas por una conectiva. Consideremos para ello un conjunto referencial $U \neq f$ y dos funciones proposicionales $a(x)$ y $b(x)$ definidas sobre U con conjuntos de verdad $A = \{\, x \in U : a(x) \,\}$ y $B = \{\, x \in U : b(x) \,\}$. A continuación analizaremos diversos casos de equivalencias o de implicaciones lógicas.

(1) $(\forall x \in U)\, [a(x) \wedge b(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in U)\, [a(x)] \wedge (\forall x \in U)\, [b(x)]$.

Dicha equivalencia resulta de la siguiente cadena de equivalencias lógicas:

$$(\forall x \in U)\, [a(x) \wedge b(x)] \Leftrightarrow A \cap B = U \Leftrightarrow [A = U \wedge B = U] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in U)\, [a(x)] \wedge (\forall x \in U)\, [b(x)].$$

(2) $(\exists x \in U)\, [a(x) \vee b(x)] \Leftrightarrow (\exists x \in U)\, [a(x)] \vee (\exists x \in U)\, [b(x)]$.

Es consecuencia de la siguiente cadena de equivalencias lógicas:

$$(\exists x \in U)\, [a(x) \vee b(x)] \Leftrightarrow A \cup B \neq f \Leftrightarrow [A \neq f \vee B \neq f] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in U)\, [a(x)] \vee (\exists x \in U)\, [b(x)].$$

(3) $(\forall x \in U)\, [a(x)] \vee (\forall x \in U)\, [b(x)] \Rightarrow (\forall x \in U)\, [a(x) \vee b(x)]$.

Resulta de la siguiente cadena de implicaciones lógicas:

$$(\forall x \in U)\, [a(x)] \vee (\forall x \in U)\, [b(x)] \Rightarrow [A = U \vee B = U] \Rightarrow A \cup B = U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall x \in U)\, [a(x) \vee b(x)].$$

En este caso vale únicamente la implicación lógica (3) puesto que $A \cup B = U$ **no** implica $[A = U \vee B = U]$.

(4) $(\exists x \in U)\, [a(x) \wedge b(x)] \Rightarrow (\exists x \in U)\, [a(x)] \wedge (\exists x \in U)\, [b(x)]$.

Es consecuencia de la siguiente cadena de implicaciones lógicas:

$$(\exists x \in U)\,[a(x) \wedge b(x)] \;\Rightarrow\; A \cap B \neq f \;\Rightarrow [A \neq f \wedge B \neq f] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (\exists x \in U)\,[a(x)] \wedge (\exists x \in U)\,[b(x)].$$

También en este caso vale únicamente la implicación lógica ya que $[A \neq f \wedge B \neq f]$ **no** implica $A \cap B \neq f$.

7.5. Uso correcto de los símbolos de los cuantificadores

En el ambiente matemático es de uso bastante difundido colocar el cuantificador universal al finalizar la fórmula, como una forma abreviada de escribir *para todo*. Esto crea confusiones en el alumno que pueden evitarse si el cuantificador universal se antepone a la fórmula válida bajo esa cuantificación o se mantiene la expresión coloquial. Veremos algunos ejemplos de este uso poco conveniente del cuantificador universal.

1) Forma poco conveniente: “$S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \forall n \in N$”.

Algunas formas correctas:

Coloquial “$S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$, para todo $n \in N$”. Lenguaje simbólico:

$$\text{“}(\forall n \in N)\left[S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\right]\text{”.}$$

2) Forma poco conveniente: “$(a^x)^y = a^{xy}, \quad \forall a > 0,\ \forall x \in R,\ \forall y \in R$”

Algunas formas correctas:

Coloquial “$(a^x)^y = a^{xy}$, para $a > 0$, $x \in R$, $y \in R$” o también, “siendo $a > 0$, $x \in R$, $y \in R$”. Lenguaje simbólico:

$$\text{“}(\forall a > 0)(\forall x \in R)(\forall y \in R)\ \left[(a^x)^y = a^{xy}\right]\text{”.}$$

Este uso poco conveniente del cuantificador universal al finalizar la fórmula no constituye un error matemático ya que se entiende igualmente su significado; pero resulta una dificultad didáctica al tener que hacer un uso sistemático de los cuantificadores, principalmente en las demostraciones por el absurdo cuando es necesario negar el enunciado.

8. Conclusiones

Acorde con las necesidades de los diversos cursos de matemática, se puede hacer un desarrollo en paralelo de la lógica simbólica y de la teoría de conjuntos, con mayor profundidad del que quedó aquí bosquejado. Muchas de las nociones dadas son compatibles con su enseñanza en el nivel medio, quedando a criterio del docente las adaptaciones correspondientes al nivel de enseñanza.

El diseño de los cursos siguiendo el esquema anterior, impartido a profesores de Matemática tanto en la modalidad presencial como a distancia resultó muy exitoso. Resultados igualmente satisfactorios se obtuvieron en los cursos de postgrado impartidos a graduados universitarios de carreras profesionales o técnicas.

Nuestra experiencia en el dictado de distintos cursos de Análisis Matemático y Álgebra, nos mostró las falencias de los alumnos en la construcción de razonamientos válidos, en parte debidas al incorrecto uso de los cuantificadores, y a la deficiente interpretación de las condiciones necesaria y suficiente, así como la confusión entre las demostraciones por el contrarrecíproco y el absurdo, entre otras.

BIBLIOGRÁFÍA

Bressan, J. C., Ferrazzi de Bressan, A. E. (1986), *Lógica y conjuntos* (EM 1, M 1), Buenos Aires, SENOC, Asociación para la Promoción de Sistemas Educativos no Convencionales.

Copi, I. M. (1978), *Introducción a la Lógica*, Buenos Aires, EUDEBA.

Ferrazzi de Bressan, A. E. y Bressan, J. C. (1995), *Elementos de lógica simbólica y álgebra de Boole con aplicaciones a circuitos lógicos*, Buenos Aires, Universidad Argentina de la Empresa.

Gamut, L. T. F. (2002), *Introducción a la Lógica*, Buenos Aires, EUDEBA.

Hamilton, A. G. (1981), *Lógica para Matemáticos*, Madrid, Paraninfo.

Kuratowski, K. (1966), *Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología*, EditorialVicens-Vives.

Nota: En esta Bibliografía se citan algunas publicaciones de los autores que siguen el enfoque de este trabajo y otras publicaciones como la de Gamut, L. T. F. (2002) y la de Hamilton, A. G. (1981) que permiten ampliar el tema. El libro de Copi, I. M.

es una buena introducción a la lógica clásica y al simbolismo lógico. Por otra parte, se omiten algunas obras citadas en la Parte I y relacionadas únicamente con observaciones puntuales hechas en esa parte del trabajo.

Juan Carlos Bressan
Departamento de Fisicomatemática.Facultad de Farmacia y Bioquímica, UBA.
Junín 956 - (1113) Buenos Aires - Argentina
jbressan@mybfyb.ffyb.uba.ar
bressanjuancarlos22@gmail.com