Editorial

Con este segundo número del año les contamos de avances recientes en teoría de números, los matemáticos Goldston, Motohashi, Pintz y Yildirim se encuentran trabajando en el problema de demostrar la existencia (o no) de infinitos números primos p de modo que $p + 2$ es también un número primo. Sus resultados se encuentran en http://www.aimath.org/preprints.html

Como subproducto de su trabajo demuestran el siguiente resultado. Consideran la sucesión de números naturales que son producto de exactamente dos números primos. Esto es, definen

$$q_1 = 4 = 2.2, \qquad q_2 = 6 = 2.3, \quad . \quad q_3 = 9 = 3.3, \qquad q_4 = 10 = 2.5$$

$$q_5 = 2.7 = 14, \qquad q_6 = 15 = 3.5, \qquad \cdots \qquad q_n \qquad \cdots$$

obteniendo que para todo n grande se satisface

$$(q_{n+1} - q_n) \leq 27.$$

Estamos en presencia de un teorema recién nacido!!

Muchos de nuestros lectores enseñan programación lineal, es una noticia no del todo agradable comentar que G. Dantzig, el inventor del método del simplex, ha fallecido en Palo Alto, California en el mes de mayo.

Con una invitación a participar en la Reunión de Educación Matemática de Salta nos despedimos hasta el próximo número.

Elida Ferreyra - Jorge Vargas

Historia de la Matemática – Parte II
Ecuaciones Algebraicas

Moreno Julia, Weingast Lilian(*)

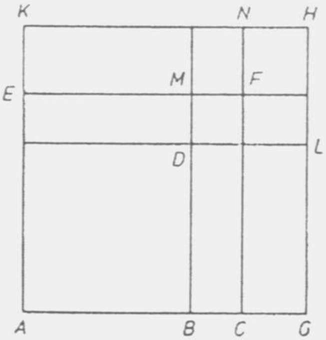
2.3.- Lodovico Ferrari y Jerónimo Cardano

En 1536, un joven de 14 años llegó a la casa de Cardano (famoso, médico, astrólogo, filósofo y matemático) como sirviente.
Allí aprendió matemática y se convirtió en un eminente matemático, amigo y secretario de Cardano.

Ferrari descubrió que la ecuación general de cuarto grado puede ser reducida a una ecuación cúbica y por lo tanto se resuelta por los métodos de resolución de las raíces cuadradas y cúbicas.

Cardano explicó el método de Ferrari en el capítulo 39 de su "Ars Magna", y declara que "esto es de Lodovico Ferrari quién lo inventó a petición mía".

La exposición de Cardano del método comienza con un teorema sobre raíces y rectángulos, que él explica como se describe a continuación:



Dibujemos el cuadrado AF, dividámoslo en dos cuadrados AD y DF, y dos suplementos DC y DE, y permítanme añadir el gnomon KFG alrededor de él para así poder completar todo el cuadrado AH.
Yo digo que este gnomon el cual consiste de GC^2 más el doble de la línea añadida GC x CA, para FG es GC x CF, de la definición dada al comienzo del segundo libro de los elementos, y CF es igual a CA por la definición de cuadrado.

Entonces KI es igual a FG, las dos superficies GF y FK consisten de GC x 2CA, y GC^2 es igual a FH. Entonces la proposición es clara. Si AD es igual a x^4 y CD y DE (cada uno) es igual a $3x^2$, y DF = 9, BA será igual a x^2 y BC será necesariamente igual a 3. Desde ahí, entonces, desearemos agregar más cuadrados a DC y DE, estos serán CL y KM. Es necesario, para completar todo el cuadrado LMN. Esto, como ya hemos demostrado, consiste del cuadrado de GC más 2GC x BC, una mitad de los números (originales) de cuadrados, para CL es la superficie producida por GC x AB como ya hemos mostrado, y AB es x^2 porque hemos asumido que AD es x^4 y, por lo tanto, FL y MN es inventado de GC x CB. Por lo tanto, la superficie LMN (este es un número a ser añadido) es GC x 2BC (esto es el coeficiente de x^2) sumemos GC veces el mismo (esto es, el número de cuadrados añadidos).

Expliquemos esto, utilizando notación algebraica moderna:
Si ponemos AB = s BC = a y CG = b el problema demostrado por Cardano es equivalente a la identidad:

$$(s + a + b)^2 = (s + a)^2 + 2sb + 2ab + b^2$$

En la aplicación de esta identidad a la solución de ecuaciones bicuadradas.

Cardano considera s= AB el cuadrado de la incógnita x, entonces él obtiene

(10) $$(x^2 + a + b)^2 = (x^2 + a)^2 + 2x^2b + 2ab + b^2$$

Como un ejemplo, Cardano considera la ecuación

(11) $$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

Con el fin de reducir el lado izquierdo a un cuadrado $(x^2 + a)^2$, el añade $6x^2$ a ambos lados, obteniendo

(12) $$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x$$

Luego dice:

" Ahora si $6x^2 + 60x$ tiene raíz cuadrada tendremos la solución. Pero esto no ocurre. Por lo tanto debe ser añadido a los dos lados, de la misma manera, cuadrados y un número de tal forma que en un lado hay un trinomio con una raíz y en el otro lo mismo".

Esto significa: si $6x^2 + 60x$ será el cuadrado de un binomio $px + q$, deberemos extraer las raíces de ambos lados de (12). Como $6x^2 + 60x$ no es un cuadrado completo, deberemos añadir el término $2bx^2$, y un término constante a ambos lados con el fin de obtener cuadrados completos a ambos lados. Poniendo $a = 6$ en la identidad (10), Cardano tiene una identidad:

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (x^2 + 6)^2 + 2x^2b + 12b + b^2$$

Entonces si uno agrega

$$2x^2b + 12b + b^2$$

a ambos lados de (12); obtiene

(13) $$\begin{aligned}(x^2 + 6 + b)^2 &= (6x^2 + 60x) + (2x^2b + 12b + b^2) \\ &= (2b + 6)x^2 + 60x + b^2 + 12b)\end{aligned}$$

Ahora b es elegido de forma tal que el lado derecho de (13) se transforme en un cuadrado completo del binomio $px + q$. La condición para esto es

$$(2b + 6)(b^2 + 12b) = 30^2$$

o,

$$2b^3 + 30b^2 + 72b = 900$$

o también,

(14) $$b^3 + 15b^2 + 36b = 450$$

Esto es una ecuación cúbica para b, la cual puede ser resuelta por el método explicado en un capítulo anterior del libro de Cardano.
El resultado es

$$b = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}} - 5$$

Ahora el lado derecho de (13) es un cuadrado completo, y uno puede extraer raíces cuadradas de ambos lados, de esta manera se obtiene una ecuación cuadrática para x.

Cardano y Ferrari se encontraron ahora en una difícil posición. Ellos habían realizado descubrimientos extremadamente importantes, pero no podían publicarlos porque Cardano había realizado un juramento por el Sagrado Gospel de nunca publicar la solución de Tartaglia para las ecuaciones cúbicas, la cual formaba la base de su trabajo en común.

En el año de 1543 Cardano y Ferrari decidieron ir a Bologne y preguntarle a Annibale della Nave si había algo de cierto en el rumor de que Scipione del Ferro había descubierto la solución de las ecuaciones cúbicas antes que Tartaglia. Ellos fueron bien recibidos y con facilidad consiguieron permiso para examinar los papeles póstumos de Scipione, en los cuales la solución era explicada claramente.

Luego Cardano decidió publicar la solución de las ecuaciones cúbicas y bicuadradas en el libro "Ars Magna" (1545) declarando claramente que la solución de la ecuación (1) había sido descubierta por Scipione del Ferro y redescubierta por Tartaglia, que él mismo había extendido la solución a las ecuaciones 2 y 3, y que la solución de las ecuaciones bicuadráticas se debían a Ferrari.

En conclusión , las sucesivas etapas en la solución de , por ejemplo, la ecuación $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, las presenta Cardano como sigue:

1.- En primer lugar añádase suficientes cuadrados y números a ambos miembros de la ecuación para convertir el primer miembro en un cuadrado perfecto, en este caso sería $x^4 + 12x^2 + 36$ o bien $(x^2 + 6)^2$.

2.- Añádase ahora a los dos miembros de la ecuación términos en los que aparezca una nueva incógnita y, de tal manera que el primer miembro siga siendo un cuadrado perfecto, tal como $(x^2 + 6 + y)^2$. La ecuación se convierte entonces en

$$(x^2 + 6 + y)^2 = 6x^2 + 60x + y^2 + 12y + 2yx^2$$

3.- La etapa siguiente, que es la crucial, consiste en elegir y de tal manera que el trinomio del segundo miembro se convierta en un cuadrado perfecto. Esto se consigue, obviamente, igualando el discriminante a cero, una receta antigua y bien conocida que en nuestro caso equivale a hacer $60^2 - 4(2y + 6)(y^2 + 12y) = 0$.

4.- El resultado de la etapa 3 es una ecuación cúbica en y, $y^3 + 15y^2 + 36y = 450$, que hoy conocemos como "la cúbica resolvente" de la ecuación cuártica dada. Esta cúbica se resuelve ahora en y por medio de las reglas dadas anteriormente para resolver ecuaciones cúbicas, con el resultado de

$$y = \sqrt[3]{287\frac{1}{2} + \sqrt{80449\frac{1}{2}}} + \sqrt[3]{287\frac{1}{2} - \sqrt{80449\frac{1}{2}}} - 5$$

5.- Sustitúyase un valor de y obtenido en la etapa 4, en la ecuación en x de la etapa 2, y tómese la raíz cuadrada de los dos miembros.

6.- El resultado de la etapa 5 es una ecuación cuadrática que debemos resolver para hallar el valor buscado de x.

2.4.- Rafael Bombelli

Su obra y el "nacimiento" de los números complejos

Rafael Bombelli fue el autor de un muy influyente trabajo en tres libros titulados "l'Algebra", los cuales fueron impresos primero en Venecia en 1572, y luego en Bologna en 1579.

Bombelli admiraba el "Ars Magna" de Cardano, pero sintió que Cardano no había sido claro en su exposición ("ma mel dire fù oscuro"). Entonces el decidió escribir un tratado que posibilitara al principiante dominar el tema sin la ayuda de otro libro.

En el libro 1 de Algebra Bombelli , se ocupa del cálculo de radicales, en particular raíces cuadradas y cúbicas. Es muy notable su aproximación de las raíces cuadradas por fracciones continuas.

Para aproximar $\sqrt{2}$, Bombelli escribió:

(1) $$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$$

Para esto el encuentra

(2) $$y = 1 + \sqrt{2}$$

Añadiendo (+1) a ambos lados de la ecuación (1), se obtiene

(3) $$y = 2 + 1/y$$

Sustituyendo (3) en (1) se obtiene

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}$$

Bombelli escribió esta fracción continua como :

$$1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{y}$$

Continuando en este camino, obtuvo una fracción continua infinita:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots$$

Si, luego de un número finito de pasos, uno se olvida 1/y, se obtiene una aproximación de $\sqrt{2}$, por ejemplo

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

o

$$1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2} = \frac{7}{5}$$

Y así sucesivamente.

Bombelli aplicó el mismo método a otras raíces cuadradas como $\sqrt{13}$.
Obtuvo una primera aproximación:

$$\sqrt{13} \approx 3 + \frac{4}{6} = 3\frac{2}{3}$$

y una segunda aproximación, reemplazando el 6 en el denominador por 6 + 4/6

$$\sqrt{13} \approx 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} = 3\frac{3}{5}$$

El capítulo 2 del álgebra de Bombelli, trata de la solución de ecuaciones de grado superior a cuatro. Para las cúbicas y bicuadráticas siguió a Cardano. En constraste con Cardano, él trató completamente los casos irreducibles. Resolviendo la ecuación :

(4) $$x^3 = 15\,x + 4$$

por la regla de Cardano, encuentra que:

(5)

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

Siguiendo a Cardano, Bombelli llama a las raíces imaginarias "sofisticadas", pero él notó que la ecuación (4) no es de ningún modo imposible, para ella la raíz es 4.
Luego investigó si podía ligar el sentido de la raíz cúbica de un número complejo. Más precisamente, el trata de igualar la primer raíz cúbica en (5) con un número complejo $p + \sqrt{-q}$.
Esto dará:

(6)

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}$$

Esto dará:

$$2+\sqrt{-121}=(p^3-3pq)+(3p^2-q)\sqrt{-q}$$

Esta ecuación se puede satisfacer con poner:

(7) $$2 = p^3 - 3pq$$

y

(8)

$$\sqrt{-121}=(3p^2-q)\sqrt{-q}$$

Ahora si estas dos condiciones se cumplen, también tendremos.

(9)

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = p-\sqrt{-q}$$

Multiplicando (6) por (9), Bombelli obtiene

$$\sqrt[3]{125} = p^2+q$$

o,

(10)

$$q = 5 - p^2$$

Sustituyendo esto en (7), uno obtiene una ecuación cúbica para p:

(11) $$4p^3 - 15p = 2$$

Una solución para esta ecuación es p = 2, y de (10) uno tiene

$$q = 5 - 4 = 1$$

entonces tenemos,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$

y

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

Por lo tanto

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

$$x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4$$

Luego de haber encontrado este resultado, Bombelli estuvo mucho más que satisfecho.

Escribió "Al principio, la cosa me pareció una "idea loca", que estaba más basada en supuestos que en la verdad, pero he examinado hasta que encontré la prueba".

Bombelli introduce una notación a la cual nosotros llamamos + i, es decir *piu di meno*, y para – i, *meno di meno*. Él presenta reglas de cálculo como:

meno di meno via men di meno fà meno

lo cual significa

$$(-i) \times (-i) = -1$$

y también presenta algunos ejemplos de cálculo que contienen números complejos

A continuación se dará un ejemplo de la notación utilizada por Bombelli. La expresión

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2+11i}$$

la cual aparece en su solución de las ecuaciones cúbicas, es escrita como

R.c. L 2p. Di m. 11. ⅃

Aquí R.c. significa raíz cúbica. La letra L y la L invertida al final juegan el papel de reglas de corchete: la raíz cúbica debe ser extraída de la expresión completa entre la L y la L invertida. La abreviación p. Di m. Significa *più di meno*.

3.- De Viète a Descartes

3.1.- François Viète (1540 – 1603)

Abogado, funcionario público y cortesano de Enrique IV, Viète dedicaba sus momentos de ocio a la Matemática. Fuera del campo matemático, fue famoso por su hazaña, nada simple, de descifrar los mensajes secretos que el rey de España enviaba a su ejército en Flandes.

Antes de Viète, las raíces de las ecuaciones algebraicas, se obtenían por medios casi exclusivamente geométricos, que exigían gran ingenio y los procedimientos no eran generales, pues en lugar de expresiones generales o literales, se consideraban únicamente ecuaciones con coeficientes numéricos.

Viètes hizo dar un salto a la técnica de la solución de ecuaciones, introduciendo una notación uniforme, con arreglo de lo cual, tanto los datos como las incógnitas, son designados por símbolos literales, él usó consonantes para las cantidades conocidas y vocales para denotar las desconocidas; además empleaba los signos + y -, y separaba el dividendo del divisor mediante una barra horizontal, pero carecía en cambio de nuestros signos de multiplicación e igualdad.

La ecuación cuadrática que hoy se escribe: $bx^2 + dx = z$, era escrita por Viète así:

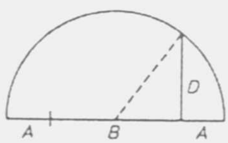
"B in A Quadratum, plùs D plano in A, aequari Z solido".

A saber, por la Ley de Homogeneidad de Viète, según la cual sólo pueden compararse magnitudes de igual dimensión (tales magnitudes son el lado, el cuadrado, el cubo, el cuadrado cuadrado, el cuadrado cubo, etc.):

Si A (nuestra x) y B, son segmentos lineales, D debe ser un área plana y Z un volumen. Puesto qué él escribe: "D plano" y "Z solido". Esta ley implica una seria restricción al formalismo algebraico. Como vimos, Omar Khayyan manejó el enredo que provoca esta restricción, introduciendo una unidad de medida e. Descartes usó el mismo truco.

Con su notación literal, Viète estudió las ecuaciones de 1° a 4° grado, encontró relaciones entre los coeficientes y las raíces (positivas).

En trabajos publicados, Viète muestra la solución geométrica de ecuaciones cuadráticas, la que puede ser construida usando círculos y líneas rectas solamente. Por ejemplo, para resolver la ecuación $A^2 + AB = D^2$ o $A (A + B) = D^2$



Viète construye dos segmentos perpendiculares B y D, a continuación dibuja un semicírculo centrado en el punto medio de B. Las dos partes restantes del diámetro son iguales a A.

En otro tratado: "Suplemento geométrico", Viète agrega el postulado de Euclides de construcción de líneas rectas y círculos y un postulado más: "Dibujar una línea recta desde un punto dado, a través de cualquiera de las dos líneas (líneas rectas o línea recta y un círculo) tal que la intersección entre las dos líneas es igual a la distancia dada".
Las construcciones basadas en este postulado se llaman construcciones *neusis*.

Por medio de este postulado, Viète primero resuelve el problema de construcción de los medios proporcionales entre dos segmentos lineales dados. La solución de este problema inmediatamente produce el doblamiento del cubo. Luego, Viète, resolvió la trisección de un ángulo. Por el mismo método él construyó un heptágono regular inscripto en un círculo.

Finalmente, él muestra que todos los principales problemas geométricos de ecuaciones cúbicas o bicuadradas, pueden ser resueltos por medio de construcciones neusis.

Después de la muerte de Viète, sus amigos publicaron trabajos en los que él discute distintos métodos de transformación de ecuaciones. Por ejemplo, si tenemos una raíz D de una ecuación, podemos obtener otra ecuación de grado menor. Por esto, presenta diversos ejemplos. Sea una ecuación cúbica:

(1) $BA - A^3 = Z$ y sea E quién satisface la condición:

(2) $(E^3 - Z = BE)$, para nosotros esto significa que $-E$ es una raíz de (1), pero Viète no reconoce raíces negativas.

Desde (1) y (2), él concluye que

$$A^3 + E^3 = B\,(A + E)$$

$$\text{ó:} \quad (A + E)\,.\,(A^2 - AE + E^2) = B.(A + E)$$

Ahora se puede dividir por $A + E$ y obtener una ecuación cuadrática en A.

En este mismo papel, Viète trata la solución de ecuaciones bicuadráticas y cúbicas.

Él comienza con la ecuación bicuadrática:

(3) $A^4 = Z - BA,$

Si agregamos a ambos miembros $A^2E^2 + \frac{1}{4}E^4$, obtenemos:

(4) $(A^2 + \frac{1}{2}E^2)^2 = Z - BA + A^2E^2 + \frac{1}{4}E^4$

En el miembro derecho, conviene completar cuadrados, si E satisface la ecuación,

$$Z + \tfrac{1}{4}E^4 = B^2/4E^2 \quad \text{ó,}$$

(5) $E^6 + 4\,Z\,E^4 = B^2$

La cual es una ecuación cúbica en E^2. El método de Viète es esencialmente el mismo que el de Ferrari.

En otro capítulo, aparece un nuevo método para resolver la ecuación cúbica:

(6) $A^3 + 3\,BA = 2Z$

Viète introduce un E, para la ecuación, tal que

(7) $B = E.(A + E)$

Sustituyendo (7) en (6), se tiene que $A^3 + 3\,E.\,(A + E)A = 2Z$, ó,

(8) $(A + E)^3 = 2Z + E^3$

Por (7), $A + E = B/E$ y al sustituirlo en (8):

(9) $B^3/E^3 = 2Z + E^3$ ó $B^3 = 2ZE^3 + E^6$,

la cual puede ser resuelta para E^3 y por lo tanto para E,

(10)

$$E = \sqrt[3]{\sqrt{B^3 + Z^2} - Z}$$

En contraste con el método explicado por Cardano, se tiene que extraer solamente una raíz cúbica. No obstante, el resultado final es el mismo que el del método de Cardano, a pesar de eso, si uno introduce otro elemento desconocido $E' = A + E$, uno tiene

$B = E'\,(E' - A)$ y puede derivar como antes, en una ecuación cuadrática para E'^3

$$B^3 = E'^6 - 2ZE'^3$$

para la cual se obtiene

$$E' = \sqrt[3]{\sqrt{B^3 + Z^2} + Z}$$

Ahora A = E' – E, es la diferencia de dos raíces cúbicas, como en Ars Magna de Cardano.

Conociendo la relación entre raíces y coeficientes de una ecuación, Viète formula un teorema:

"Si A cubus –B-D-G in A quad +B in D + B in G + D in G in A aequatur B in D in G: A explicabilits est de quiadlibet illarum trium B, D vel G"

Esto significa:

Si $A^3 + (-B-D-G)A^2 + (BD + BG + DG)A = BDG$, entonces A es igual a alguna de las cantidades B, D o G.

Viète resolvió también ecuaciones numéricas de grado elevado por medio de funciones trigonométricas. A saber: en 1593, el matemático holandés Romanus, propone a todos los matemáticos el problema de resolver una cierta ecuación de grado 45. El embajador de Los Países Bajos, comunicó a la corte de Enrique IV que nadie en Francia fue capaz de resolver este problema. El rey entonces, informó a Viète de este reto. Viète vio que la ecuación podía ser resuelta, subtendiendo una cuerda en un arco de 8° en un círculo de radio 1. Así, la solución puede ser encontrada dividiendo una circunferencia en 45 partes iguales. En una audiencia, Viète presentó una raíz de la ecuación y al día siguiente, todas las 23 raíces positivas. Más tarde publicó su solución.

Por otra parte, se debe a Viète un método de aproximación de las raíces de una ecuación que anticipa el actualmente llamado "método de Newton".

Viète halló numerosas fórmulas de trigonometría plana y esférica, entre ellas las que expresan el seno, el coseno y la tangente de nx en función de sen x, cos x y tan x. También confeccionó tablas trigonométricas y calculó π con nueve decimales y lo expresó como un producto infinito: El área de un polígono de 4×2^n de lado, inscripto en un círculo de radio 1, puede ser escrita como:

$$\frac{2}{c_1 c_2 c_3 \ldots c_n}$$

con

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad c_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} c_1} \qquad c_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} c_2}$$

y así sucesivamente.

Cuando n tiende a infinito, obtenemos,

$$\pi = \frac{2}{c_1 c_2 c_3 \ldots}$$

En otras publicaciones, Viète considera la trisección de un ángulo y usa esto para obtener soluciones trigonométricas de ecuaciones cúbicas en casos irreducibles.

Si uno pone, con un radio arbitrario R,

$$2R \cos\varphi = A$$
$$2R \cos 3\varphi = \pm B$$

uno tiene la ecuación:

$$A^3 = 3 R^2 A \pm R^2 B$$

y cualquier ecuación cúbica teniendo tres raíces reales, puede ser reducida a esta forma y resuelta trigonométricamente.

3.2.- Simon Stevin

Se le debe la idea del método de aproximación de las raíces mediante sustituciones sucesivas, señalando que si el producto entre los valores numéricos de ambos miembros de la ecuación es negativo para dos valores numéricos de la variable, la raíz está comprendida entre esos dos valores.

Así en la ecuación $x^3 = 300x + 33915024$, da a x los valores 10, 100, 1000 y comprueba que x está entre 100 y 1000; al darle luego los valores 100, 200, 300, 400, comprueba que está entre 300 y 400 y así sucesivamente.

Stevin introdujo varias simplificaciones a la notación algebraica. Usó + y – para adición y sustracción, M y D para multiplicación y división, √ para raíz cuadrada, $^3\sqrt{}$ para raíz cúbica y así sucesivamente.

3.3.- Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Se dedicó a varias ramas de la Matemática.

Una de sus primeras aspiraciones, fue resolver problemas geométricos por métodos algebraicos. Como ya observamos, se puede aplicar métodos geométricos a la resolución de problemas algebraicos.

Fermat explica un método general, que reduce cualquier ecuación cuadrática en x e y en una forma especial:

$ax = by$	línea recta
$xy = b$	hipérbola
$x^2 \pm xy = ay^2$	pares de líneas
$x^2 = ay$	parábola
$b^2 - x^2 = y^2$	círculo
$b^2 - x^2 = ay^2$	elipse
$b^2 + x^2 = a\,y^2$	hipérbola

Así cualquier ecuación cuadrática en x e y, representa una línea recta o una sección cónica. El mismo resultado fue probado, mediante un método diferente por Descartes.

Fermat, no obstante sus ocupaciones oficiales de magistrado, dedicó con tanta eficacia su tiempo libre a la matemática que dejó huella en varias de sus ramas. Profundo conocedor de las obras clásicas griegas: Euclides, Apolonio, Diofanto, es probable que el estudio de Apolonio, de quién reconstruyó obras perdidas, tuviera como consecuencia la memoria Ad locos planos et solidos isagoge, escrita antes de1673 pero publicada póstuma en 1679, donde aparecen los principios fundamentales del método de las coordenadas, si no en forma tan extensa cono en la Geometría de Descartes, por lo menos en forma tan clara o más. Lo mismo que Descartes toma un eje de referencia y en él un punto fijo que considera el origen de segmentos variables, a partir de cuyos extremos toma otros segmentos variables, en general perpendicularmente, de manera que este segundo segmento dibujará un lugar diferente según sea la relación algebraica que vincula a los dos segmentos variables. En esa memoria aparece la ecuación de la recta, que no figura explícitamente en Descartes. Si la recta pasa por el origen, Fermat, que sigue el simbolismo de Viète, escribe D in A aeq, B in E, es decir $ax = by$.

El método de Fermat, no muy diferente del actual, puede apreciarse mediante el siguiente ejemplo, en el cual se propone eliminar y entre las ecuaciones

$$x^3 + y^3 = c^3 \qquad y \qquad ax + y^2 + by = n^2$$

Escribe ambas ecuaciones como fracciones iguales a 1, cuyos numeradores tengan como factor común la letra que debe eliminarse, en este caso:

$$1 = \frac{y^3}{c^3 - x^3} = \frac{y^2 + by}{n^2 - ax}$$

De donde

$$y^2 (n^2 - ax) = (y + b) (c^3 - x^3)$$

Comparando esta ecuación con la segunda de las dadas (ambas cuadráticas en y) y aplicando el mismo proceso se llega a una ecuación lineal en y, que despeja y sustituye en cualquiera de las dadas. Fermat utiliza además la eliminación para racionalizar expresiones.
Sea, por ejemplo, racionalizar:

$$b = ax^2 - x^3 + x^3 + c^2x$$

hace $y^3 = x^3 + c^2x$ y elimina y entre esta ecuación y $ax^2 - x^3 = (b - y)^3$

ANEXO

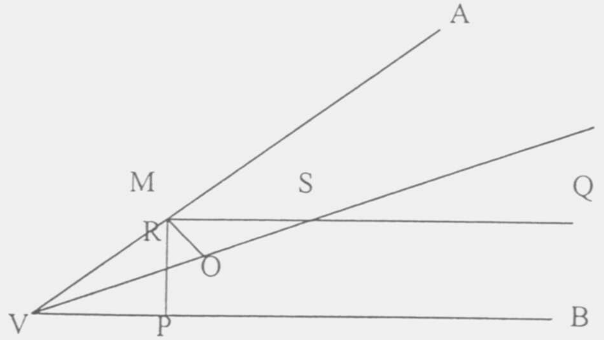
En el siglo V a. C. la matemática aún no se había sistematizado. No obstante, la labor de los pitagóricos había dejado saltos importantes, uno de carácter general: la exigencia de la demostración, y otro de carácter circunstancial: la consagración casi exclusiva de los matemáticos a las investigaciones geométricas.

Como las primeras figuras de las que partieron los griegos fueron la recta y la circunferencia, todas las proposiciones geométricas, fueran teoremas o construcciones, debían fundarse sobre esas dos figuras y sus relaciones y conexiones mutuas.

Los matemáticos del siglo V se dedicaron a la búsqueda de nuevas propiedades de las figuras, muchas de ellas fueron logradas mediante la búsqueda y la persecución de algunos problemas particulares que, atrajeron su atención. Esos problemas, hoy llamados "los problemas clásicos de la geometría", fueron tres: la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo.
Abordaremos los dos primeros, que son los que aparecen en nuestro trabajo monográfico.

La división de un ángulo cualquiera en tres partes iguales mediante construcciones con rectas y circunferencias o, como suele también decirse, con regla y compás, es un problema que ha de haber nacido naturalmente y si llamó la atención fue seguramente por la desconcertante discrepancia entre la sencillez de sus términos y la imposibilidad de resolverlo con regla y compás; imposibilidad tanto más llamativa cuanto con esos medios podía dividirse un ángulo cualquiera en 2, 4, 8, ... partes, mientras que podían trisectarse ángulos especiales, como el recto y sus múltiplos. Es posible además, que la construcción de los polígonos regulares contribuyera a aumentar el interés por el problema, pues así como la bisección de un ángulo permitía construir un polígono de doble número de lados de otro dado, la trisección hubiera permitido la de un polígono de triple número de lados.

Sin embargo, todos los intentos de los matemáticos griegos por resolver el problema, resultados infructuosos cuando se pretendía utilizar las propiedades de una geometría fundada exclusivamente en las rectas y circunferencias y sus intersecciones, mientras que la cosa resultaba factible cuando a esa geometría se agregaban nuevas líneas o se admitían nuevas posibilidades entre las líneas conocidas.



Tal es el caso de la trisección por "inserción". Los griegos denominaban "inserción" a una relación entre figuras que consistía en admitir que dadas dos transversales, y un punto fijo, siempre existe una recta que pasa por el punto fijo y tal que sus intersecciones con las transversales determinan un segmento de longitud prefijada.

Con la intersección, postulada como una construcción posible más, el campo de la resolubilidad de los problemas geométricos se amplia (la inserción presupone la resolución de una ecuación de cuarto grado) si las transversales son rectas.

Por ejemplo, añadida la inserción, la trisección del ángulo es posible con regla y compás. Sea AVB el ángulo a trisecar. Por un punto M de AV se trazan MP y MQ perpendicular y paralela respectivamente a VB; la recta VC que por inserción determina entre MP y MQ un segmento RS doble del VM, triseca el ángulo dado, pues el ángulo CVB es mitad del AVC. Basta para comprobarlo unir el punto medio O de RS con M y considerar los ángulos de los triángulos isósceles MOS y VOM.

El problema de la duplicación del cubo, que consiste en determinar geométricamente el lado de un cubo de volumen doble del de un cubo de lado dado, ofrece otro cariz. Por lo pronto, varias leyendas le atribuyen un origen extramatemático. Una de ellas refiere que consultando el oráculo de Delfos a fin de aplacar una peste, habría aconsejado duplicar el ara de Apolo que era cúbica, de ahí el nombre de "problema de Delos" con que a veces se lo designa. Pero es posible que también en este caso su origen fuera geométrico, como natural generalización del problema de la duplicación del cuadrado, de fácil solución, sin más que tomar la diagonal como lado del cuadrado doble.

Pero al trasladar el problema del plano al espacio, todos los intentos de resolver el problema con los medios ordinarios de la geometría resultaron vanos.

Con este problema se vincula la figura de Hipócrates de Quios, el primer matemático "profesional", quien habiendo llegado a Atenas en la primera mitad del siglo por razones nada científicas, se interesó por la matemática, y siguiendo una probable tradición de mercader, enseñó esa ciencia por dinero a la manera de los sofistas.

Hipócrates, redujo el problema de la duplicación del cubo a un problema de geometría plana que, generalizado, tomó el nombre de "problema del mesolabio". La historia de este problema aparece brevemente expuesta en una carta de Eratóstenes (s II a.C.) envió a Ptolomeo III con una solución propia y un instrumento con el cual se llevaba a cabo prácticamente esa solución. La primera parte de esta carta expresa: "Se cuenta que uno de los antiguos poetas trágicos hiciese aparecer en escena al rey Minos en el acto de ordenar la construcción de una tumba para su hijo Glauco, y advirtiendo que la tumba tenía en cada uno de sus lados una longitud de cien pies, exclamó: "Escaso espacio en verdad concedéis a un sepulcro real, duplicando, conservando siempre la forma cúbica, duplicad de inmediato a cada uno de sus lados". Es evidente que en esto se engañaba, puesto que duplicando los lados de una figura plana, ésta se cuadruplica mientras que si es sólida se octuplica. Se agitó entonces entre los geómetras la cuestión de cómo podía duplicarse una figura sólida cualquiera, manteniendo su especie. Y este problema se llamó de la duplicación del cubo. Después de muchos titubeos, fue Hipócrates de Quíos el primero que encontró que si entre dos rectas, una doble de la otra, se insertan dos medias proporcionales se duplicará el cubo, con lo que convirtió la dificultad en otra no menor. En efecto, aún reducido a un problema de geometría plana, no pudo resolverse por medio de recursos elementales. Más, es posible que más delante esa reducción no agradara a Platón que criticaba a los geómetras griegos por su escasa dedicación a la geometría del espacio.

El razonamiento que condujo a Hipócrates a esa reducción pudo ser el siguiente: si los volúmenes de cuatro cubos están en progresión geométrica de razón 2, el cuarto cubo tiene el lado doble del lado del primero; y como al estar una serie de cubos en progresión geométrica, también lo estarán sus lados, resulta en definitiva que si se intercalan dos medias proporcionales entre dos segmentos, uno doble del otro, la primera de esas medias resolvía el problema de Delos. Más tarde se eliminó tal limitación y con el nombre de "problema del mesolabio" se conoció el problema de intercalar dos segmentos medios proporcionales entre dos segmentos dados; es decir, dados a y b, determinar geométricamente dos segmentos x e y tales que

$$a : x :: x : y :: y : b$$

de donde $x^3 = a^2b; \qquad y^3 = ab^2$

Cuando $b = 2^a$, $x^3 = 2a^3$, se cae en el problema de Delos.

BIBLIOGRAFÍA

- A History of Algebra, B.L. van der Waerden. Springer – Verlag Berlin Heidelberg. Alemania 1985
- Historia de la Matemática, J. Ray Pastor y José Babini. Volumen 1 – Volumen 2. Gedisa. Barcelona 1984
- Historia de la matemática, Carl B. Boyer. Alianza Universidad Textos. Madrid 1992.
- Tendencias actuales de la enseñanza de la Matemática. Miguel de Guzmán. Studia Pedagógica. Revista de Ciencias de la Educación. 1989.
- Elementos de historia de las matemáticas. Nicolás Bourbaki. Alianza Universidad. Madrid, 1972, 1976.

(*) liwein@ciudad.com.ar