# Una introducción a las funciones exponenciales y logarítmicas

*Roberto Miatello y Paulo Tirao*[1]

Estas notas contienen una introducción a las funciones exponenciales y logarítmicas, basada en los conocimientos que el alumno trae de la escuela secundaria sobre las mismas. Este enfoque resulta natural y también práctico al apoyarse en conocimientos previos del alumno y permite disponer de estas funciones al cabo de algunas semanas de clase. Otras presentaciones resultan menos trabajosas, pero requieren el uso de series de potencias o integrales y poseen más prerequisitos, obligando a posponer su uso. Por otra parte, si bien este enfoque es clásico, no se lo encuentra desarrollado frecuentemente en los libros de texto. En esta presentación se utilizarán las propiedades de los números reales, incluyendo el *axioma de completitud* o *axioma del supremo*.

Su contenido es el siguiente. Primero se introduce la función exponencial $a^x$, donde $a$ es un número real positivo fijo y $x$ es progresivamente un número natural, entero, racional y se establecen las propiedades básicas de la misma. Para ello se usan fuertemente las propiedades de la raíz $n$-ésima de un número real positivo. Se define luego $a^x$ para $x \in \mathbb{R}$ por medio del axioma del supremo. La mayor dificultad en esta etapa es probar la continuidad de $a^x$. La función logaritmo se introduce como inversa de la exponencial, apelando al teorema de inversión de funciones continuas estrictamente crecientes o decrecientes. Las propiedades básicas de $\log_a x$ se deducen de las de $a^x$. El próximo paso y a la vez el más difícil, es la determinación de las derivadas de las funciones $a^x$ y $\log_a x$. Para ello es suficiente la determinación de una de ellas, siendo funciones inversas entre sí. En este caso calcularemos en primer lugar la derivada de $\log_a x$. Veremos que este cálculo se reduce a determinar los límites $\lim_{t\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$. La existencia de estos límites es no trivial, aunque puede probarse con argumentos elementales. Al final se grafican las funciones $a^x$ y $\log_a x$, para distintos valores de $a$.

[1]FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba y CIEM, CONICET.

# 1 Potencias y Raíces

## 1.1 Potencias naturales

**Definición 1.1.** Dados números reales $a_1, \ldots, a_n$, denotamos por $a_1 \ldots\ldots a_n$ al producto de los mismos. Por la propiedad asociativa en $(\mathbb{R}, .)$, resulta indistinto el modo en que se asocia para hacer la multiplicación. Si $a_i = a$, para todo $1 \leq i \leq n$, escribimos

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \ldots\ldots a}_{n}.}$$

Si $a, b$ son reales positivos y $m, n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \ldots\ldots a^m}_{n} = \underbrace{\underbrace{(a \ldots a)}_{m} \ldots \underbrace{(a \ldots a)}_{m}}_{n} = a^{mn}; \tag{$e_{\mathbb{N}}$}$$

$$a^m.a^n = \underbrace{a \ldots a}_{m}\underbrace{a \ldots a}_{n} = \underbrace{a \ldots\ldots a}_{m+n} = a^{m+n}; \tag{$p_{\mathbb{N}}$}$$

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \ldots (ab)}_{n} = \underbrace{a \ldots a}_{n}\underbrace{b \ldots b}_{n} = a^n.b^n. \tag{$d_{\mathbb{N}}$}$$

Estas propiedades se verifican usando la asociatividad y conmutatividad del producto de números reales.

## 1.2 Raíces $n$-ésimas

Dados un número real $a$ y un natural $n$, una raíz $n$-ésima de $a$ es un número real $s$ tal que

$$s^n = a.$$

No siempre existe tal $s$, por ejemplo, si $n$ es par y $a$ negativo. Notemos también que si $n = 2$, no existe ningún $s$ racional tal que $s^n = 2$. Sin embargo, si $a > 0$, veremos que siempre hay un $s$ real tal que $s^n = a$. La existencia de raíces $n$-ésimas se prueba con el uso del axioma de completitud de los números reales, propiedad que los distingue de los números racionales.

**Definición 1.2.** Dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que:

(i) $A$ es *acotado superiormente* (resp. *acotado inferiormente*) si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \geq x$ (resp. $M \leq x$) para todo $x \in A$. Se llama a $M$ una *cota superior* (resp. *inferior* de $A$).

(ii) $s$ es un *supremo* (resp. *ínfimo*) de $A$ si

(a) $s$ es una cota superior (resp. inferior) de $A$ y

(b) para $s'$ una cota superior (resp. inferior) de $A$, se tiene $s' \geq s$ ($s' \leq s$). O equivalentemente, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, x \in A$ tal que $0 \leq s - x < \epsilon$ (resp. $0 \leq x - s < \epsilon$).

Es fácil ver que el supremo y el ínfimo de un conjunto, si existen, son únicos.
*Observación.* Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado inferiormente si el conjunto $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ es acotado superiormente y $t$ es el ínfimo de $A$ si y sólo si $-t$ es el supremo de $-A$ (verificar).

**Axioma de Completitud.** Todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente (resp. inferiormente), tiene supremo (resp. ínfimo).

**Proposición 1.3.** *Para todo $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un único número real $s > 0$ tal que $s^n = a$. Si $a < 0$ y $n$ es impar, existe un único número real $s$ tal que $s^n = a$.*

*Prueba.* Veamos primero el caso $a > 0$. Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 : x^n \leq a\}$. Las propiedades de los números reales implican que $A$ es no vacío (verificar). Afirmamos que $A$ es acotado superiormente. En efecto, si $a \geq 1$, $M = a$ es una cota superior, pues si $x > a$ resulta $x^n > a^n \geq a$, luego se tiene que $x \notin A$. En el caso en que $0 < a < 1$, se tiene que $1/a$ es cota superior pues si $x > 1/a$, resulta $x^n > (1/a)^n > 1 > a$ lo cual implica que $x \notin A$. En consecuencia, por el axioma de completitud se sigue que el conjunto $A$ posee un supremo $s > 0$.

A continuación demostraremos que el supremo $s$ del conjunto $A$ necesariamente satisface $s^n = a$. Para ello veremos que tanto la desigualdad $s^n > a$ como la desigualdad $s^n < a$ llevan a un absurdo.

Supongamos primero que $s^n > a$ y sean $\delta = s^n - a > 0$ y $0 < \epsilon < \min\{\frac{\delta}{\mathrm{nS}}, 1\}$, donde $S = \text{máx}\{\binom{n}{i} s^{n-i} : i = 0 \dots n\}$. Así tenemos que

$$\begin{aligned}(s-\epsilon)^n - a &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \epsilon^i s^{n-i} - a \\ &= s^n - a + \sum_{i=\text{par}>0} \binom{n}{i} \epsilon^i s^{n-i} - \sum_{i=\text{impar}} \binom{n}{i} \epsilon^i s^{n-i}.\end{aligned}$$

Luego, como $\epsilon < 1$, $\epsilon^i < \epsilon$ para $i \geq 2$ y

$$(s-\epsilon)^n - a > s^n - a - \sum_{i=\text{impar}} \binom{n}{i} \epsilon^i s^{n-i} > \delta - \epsilon n S > \delta - \delta = 0.$$

Es decir $(s-\epsilon)^n > a$, lo cual contradice el hecho de ser $s$ supremo de $A$. Por lo tanto $s^n \leq a$.

Supongamos ahora que $s^n < a$ y sean $\delta = a - s^n$ y $0 < \epsilon < \min\{\frac{\delta}{\mathrm{nS}}, 1\}$, donde $S = \text{máx}\{\binom{n}{i} s^{n-i} : i = 0 \dots n\}$. Luego se tiene

$$\begin{aligned}(s+\epsilon)^n - a &= s^n - a + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \epsilon^i s^{n-i} \\ &< -\delta + \epsilon n S < -\delta + \delta \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(s+\epsilon)^n < a$, es decir $s + \epsilon \in A$, contradiciendo el hecho de ser $s$ el supremo de $A$. Por lo tanto concluimos que $s^n = a$, como se había afirmado.

Con respecto a la unicidad, supongamos que $s, t$ son números reales positivos y $s \neq t$. Si $s < t$ (resp. $s > t$) se sigue de la monotonía del producto que $s^n < t^n$ (resp. $s^n > t^n$) para todo $n \in \mathbb{N}$, luego, $s^n \neq t^n$.

Finalmente en el caso $a < 0$ y $n$ impar, como $-a > 0$, por el caso anterior existe $s$ tal $s^n = -a$. Siendo $n$ impar, $-1 = (-1)^n$ y luego $(-s)^n = (-1)^n s^n =$

$-s^n = a$. Es decir, $-s$ es raíz $n$-ésima de $a$. La unicidad se prueba de manera análoga al caso $a > 0$ y queda como ejercicio. $\square$

## 1.3 Potencias enteras

Las siguientes observaciones sugieren la definición que buscamos para $a^0$ y $a^{-m}$ si pretendemos mantener las propiedades formales ($(\mathrm{e_N})$, $(\mathrm{p_N})$, $(\mathrm{d_N})$) válidas para exponentes naturales:

$$(\mathrm{p_Z}) \Longrightarrow a^0.a^1 = a^{0+1} = a^1 \Longrightarrow a^0 = 1;$$
$$(\mathrm{p_Z}) \Longrightarrow a^{-1}.a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1 \Longrightarrow a^{-1} = \frac{1}{a};$$
$$(\mathrm{e_Z}) \Longrightarrow a^{-m} = a^{(-1)m} = \left(a^{-1}\right)^m.$$

Por lo tanto es natural dar la siguiente definición.

**Definición 1.4.** Dados un número real positivo $a$ y un natural $m$, definimos

$$\boxed{a^0 := 1; \qquad a^{-1} := \frac{1}{a}; \qquad a^{-m} := (a^{-1})^m.}$$

En particular vale que $a^{-m} = (a^m)^{-1}$, pues $a^{-m}.a^m = \underbrace{a^{-1}\dots a^{-1}}_{m}.\underbrace{a\dots a}_{m} = \underbrace{(a^{-1}a)\dots(a^{-1}a)}_{m} = 1$. No es difícil verificar que, con estas definiciones, valen las siguientes propiedades para exponentes enteros. Si $a, b$ son reales positivos y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}; \tag{$\mathrm{e_Z}$}$$
$$a^m.a^n = a^{m+n}; \tag{$\mathrm{p_Z}$}$$
$$(ab)^n = a^n.b^n; \tag{$\mathrm{d_Z}$}$$
$$a^{-m} = (a^m)^{-1}. \tag{$\mathrm{i_Z}$}$$

Las propiedades $(\mathrm{e_Z})$, $(\mathrm{p_Z})$ y $(\mathrm{d_Z})$ son las mismas propiedades $(\mathrm{e_N})$, $(\mathrm{p_N})$ y $(\mathrm{d_N})$ enunciadas para exponentes enteros. Es decir, hemos extendido la definición de $a^n$ junto con la validez de las propiedades básicas que teníamos.

Antes de seguir adelante verificaremos, a modo de ejemplo, la propiedad ($e_{\mathbb{Z}}$). Si $m, n \in \mathbb{N}$, ésta se cumple por ($e_{\mathbb{N}}$). Supongamos que $m \in \mathbb{Z}, m < 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, usando la definición de potencias enteras y la propiedad ($e_{\mathbb{N}}$) se tiene:

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= \left(a^{-(-m)}\right)^n = \left((a^{-m})^{-1}\right)^n \\ &= \left((a^{-m})^n\right)^{-1} = (a^{-mn})^{-1} \\ &= a^{mn}.\end{aligned}$$

Notamos que sólo hemos usado que $a^{-m} = (a^m)^{-1}$ para cualquier entero $m$, la definición de $a^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y la propiedad ($e_{\mathbb{N}}$). Supongamos ahora que $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ y $m$ es cualquier entero. Entonces,

$$(a^m)^n = (a^m)^{(-(-n))} = \left((a^m)^{-n}\right)^{-1} = (a^{-mn})^{-1} = a^{mn}.$$

Dejamos como ejercicio (útil) la verificación del resto de las propiedades.

## 1.4 Potencias racionales

Nuestro objetivo es definir $a^x$ para todo par de números reales $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Esto nos lleva en primer lugar a intentar definir $a^q$ para cualquier número racional $q = \frac{m}{n}$.

**Definición 1.5.** Dados un número real $a > 0$ y $q = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, con $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\boxed{a^q := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.}$$

donde $a^{\frac{1}{n}}$ denota la raíz $n$-ésima positiva de $a$.

Dado que la expresión de un número racional como cociente de enteros no es única, debemos verificar primero la buena definición de $a^q$. Supongamos que $q = \dfrac{m}{n} = \dfrac{r}{t}$. Veamos que $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ y $\left(a^{\frac{1}{t}}\right)^r$ son raíces $(tn)$-ésimas positivas de $b = a^{mt} = a^{rn}$. En efecto, elevando ambos números a la potencia $un$ tenemos

$$\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^{tn} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mtn} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^{mt} = a^{mt} = b;$$

$$\left(\left(a^{\frac{1}{t}}\right)^r\right)^{tn} = \left(a^{\frac{1}{t}}\right)^{rtn} = \left(\left(a^{\frac{1}{t}}\right)^t\right)^{rn} = a^{rn} = b.$$

Esto implica, por la unicidad de las raíces, que ambos son iguales, probando la buena definición.

**Lema 1.6.** *Si $a > 0$, $n, t \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{t}} = a^{\frac{1}{nt}}, \tag{1}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

*Prueba.* Por la unicidad de raíces $n$-ésimas positivas, basta probar que los dos miembros de (1) son raíces $(nt)$-ésimas de $a$. El de la derecha lo es por definición y para el de la izquierda tenemos

$$((a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{t}})^{nt} = (((a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{t}})^t)^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a,$$

donde la primera igualdad se sigue de $(\mathrm{e}_{\mathbb{Z}})$.

En el caso de (2), ambos miembros son raíces $n$-ésimas de $a^m$. En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^n &= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mn} && \text{por } (\mathrm{e}_{\mathbb{Z}}), \\ &= \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m && \text{por } (\mathrm{e}_{\mathbb{Z}}), \\ &= a^m && \text{por definición.} \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.7.** *Sean $a$, $b$ reales positivos y $p$, $q$ racionales. Entonces valen las siguientes propiedades:*

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq}; \tag{$\mathrm{e}_{\mathbb{Q}}$}$$

$$a^p.a^q = a^{p+q}; \tag{$\mathrm{p}_{\mathbb{Q}}$}$$

$$(ab)^q = a^q.b^q; \tag{$\mathrm{d}_{\mathbb{Q}}$}$$

$$a^{-q} = (a^q)^{-1}. \tag{$\mathrm{i}_{\mathbb{Q}}$}$$

*Prueba.* Veamos en detalle la validez de $(e_Q)$. Si $p = \dfrac{m}{n}$ y $q = \dfrac{r}{t}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{t}} &= \left(\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{r} && \text{por la definición (2 veces)},\\
&= \left(\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m}\right)^{r}\right)^{\frac{1}{t}} && \text{por (2)},\\
&= \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mr}\right)^{\frac{1}{t}} && \text{por } (e_Z),\\
&= \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{mr} && \text{por (2)},\\
&= \left(a^{\frac{1}{nt}}\right)^{mr} && \text{por (1)},\\
&= a^{\frac{mr}{nt}} && \text{por definición},\\
&= a^{pq}.
\end{aligned}
$$

Para probar $(p_Q)$ elevamos ambos miembros al producto $nt$ y usamos $(e_Q)$. Por un lado tenemos

$$\left(a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{r}{t}}\right)^{nt} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{nt}\left(a^{\frac{r}{t}}\right)^{nt} = a^{mt}a^{rn} = a^{mt+rn},$$

y por el otro

$$a^{\frac{mt+rn}{nt}} = a^{mt+rn},$$

lo cual implica $(p_Q)$, por la unicidad de la raíz positiva $(nt)$-ésima de $a^{mt+rn}$.

De $(e_Z)$ se sigue que la raíz $s$-ésima del producto $ab$ es el producto de las raíces $s$-ésimas de $a$ y de $b$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
(ab)^q &= \left((ab)^{\frac{1}{t}}\right)^{r}\\
&= \left(a^{\frac{1}{t}}b^{\frac{1}{t}}\right)^{r}\\
&= \left(a^{\frac{1}{t}}\right)^{r}\left(b^{\frac{1}{t}}\right)^{r}\\
&= a^q b^q.
\end{aligned}
$$

Finalmente como $a^{-q}.a^q = a^0 = 1$, entonces $a^{-q} = (a^q)^{-1}$ lo que prueba $(i_Q)$. □

# 2 Exponenciales y Logaritmos

De acuerdo a lo hecho en la Sección 1, tiene sentido elevar un número real $a > 0$ a un exponente racional cualquiera $q$. Esta operación satisface todas las propiedades usuales de la potenciación ($(\mathrm{e}_{\mathbb{Q}})$, $(\mathrm{p}_{\mathbb{Q}})$, $(\mathrm{d}_{\mathbb{Q}})$, $(\mathrm{i}_{\mathbb{Q}})$).

Esto nos permite considerar la función *potencial* de exponente $q$,

$$x \mapsto x^q : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$$

y también, dado un $a > 0$ fijo, considerar la función *exponencial* de base $a$

$$a \mapsto a^x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{>0}.$$

La segunda, por ahora, está sólo definida sobre los racionales. Esta función se puede extender a todos los reales de manera de obtener una función con muy buenas propiedades, por ejemplo derivable e invertible. A esta extensión se la conoce como función *exponencial de base $a$* y a su inversa como el *logaritmo en base $a$*.

Estas funciones son fundamentales en análisis y su definición es no completamente trivial. Hay varias maneras de introducirlas que requieren distintos conocimientos previos y más o menos trabajo según el caso. En esta sección definimos la exponencial de exponente real como la única extensión continua de la exponencial de exponente racional, para luego introducir el logaritmo como su inversa.

## 2.1 Extensión de las potencias racionales

En la Sección 1, hemos extendido aquella primera definición de potencias de números reales con exponentes naturales a exponentes racionales, basados en la existencia de raíces $n$-ésimas, la que a su vez es consecuencia del axioma de completitud. El siguiente paso consiste en extender la definición a exponentes reales arbitrarios. El proceso de definición involucra nuevamente el axioma de completitud de los números reales, que permitirá extender el dominio de definición de la función exponencial de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ por continuidad.

Primeramente probaremos algunas propiedades de la función $q \mapsto a^q$, $q \in \mathbb{Q}$, para $a > 0$ fijo. Se tiene que $a^q > 0$ para todo $q \in \mathbb{Q}$, y más aun, si $a > 1$ se tiene que $a^q > 1$. Esto es consecuencia directa de la definición y de que las potencias naturales y las raíces $n$-ésimas tienen estas propiedades (verificar).

**Proposición 2.1.** *Sea $a > 0$.*

(i) *Si $a > 1$ (resp. $a < 1$) $q \mapsto a^q$ es estrictamente creciente (resp. decreciente). Si $a = 1$ se tiene $a^q = 1$ para todo $q$.*

(ii) $$lim_{q\to+\infty} a^q = \begin{cases} +\infty, & si\ a > 1; \\ 0, & si\ a < 1; \end{cases} \quad y \quad \lim_{q\to-\infty} a^q = \begin{cases} 0, & si\ a > 1; \\ +\infty, & si\ a < 1. \end{cases}$$

(iii) *La función $q \mapsto a^q$ es continua.*

*Prueba.* En primer lugar demostraremos (i) para $a > 1$, dejando como ejercicio el caso $a < 1$. Si $0 \le p = \dfrac{m}{n} < q = \dfrac{r}{t}$, entonces $mt < rn$ (en $\mathbb{N}$). Tenemos así que
$$a^{mt} < a^{rn} \Rightarrow \left(a^{mt}\right)^{\frac{1}{nt}} < \left(a^{rn}\right)^{\frac{1}{nt}} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{r}{t}}$$
como queremos. Si $p < 0 \le q$, entonces $a^p = (a^{-p})^{-1} < 1 \le a^q$ (pues $a^{-p} > 1$). Si $p < q \le 0$, entonces $0 \le -q \le -p$ y $a^{-q} < a^{-p}$, luego multiplicando ambos miembros por $a^{p+q} > 0$ resulta $a^p < a^q$, lo que prueba (i).

Pasemos ahora a (ii). Si $n \in \mathbb{N}$, $q > n$ y $a = 1 + \alpha > 1$, entonces $a^q > a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$, que es arbitrariamente grande si $n$ es suficientemente grande, lo que prueba que $\lim_{q\to+\infty} a^q = +\infty$. Por otro lado
$$\lim_{q\to-\infty} a^q = \lim_{q\to-\infty} \frac{1}{a^{-q}} = \lim_{q\to+\infty} \frac{1}{a^q} = 0.$$
Ahora, si $a < 1$, entonces $\dfrac{1}{a} > 1$ y por lo tanto
$$\lim_{q\to+\infty} a^q = \lim_{q\to+\infty} \left((a)^{-1}\right)^{-q} = \lim_{q\to-\infty} \left((a)^{-1}\right)^q = 0.$$

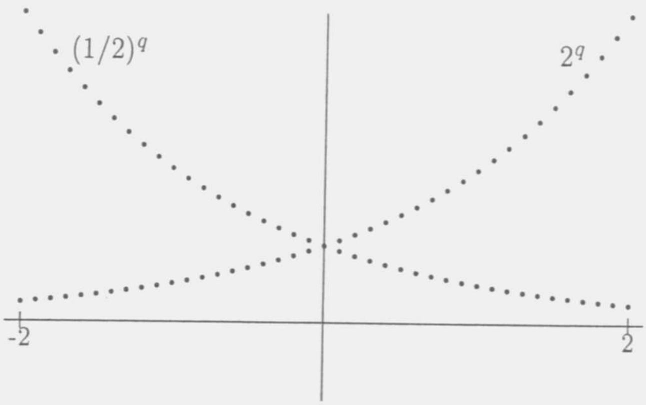
Análogamente se ve que $\lim_{q\to-\infty} a^q = +\infty$, si $a < 1$.

Por último probamos (iii). Debemos mostrar que si $q \to q_0$, entonces $a^q \to a^{q_0}$ o sea que $a^q - a^{q_0} \to 0$. Pero $a^q - a^{q_0} = a^{q_0}(a^{q-q_0} - 1)$, por lo tanto tomando $h = q - q_0$, vemos que basta ver que $a^h - 1 \to 0$, si $h \to 0$. Si $\epsilon > 0$, sabemos que $(1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon > a$ para $n$ suficientemente grande, digamos $n \geq n_0$; luego si $0 < h < \dfrac{1}{n_0}$, tenemos que

$$a^h - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < ((1+\epsilon)^n)^{1/n} - 1 = \epsilon.$$

Similarmente, si $-\dfrac{1}{n} < h < 0$, entonces $0 \leq -h < \dfrac{1}{n}$ y por lo tanto $|a^h - 1| = a^h|1 - a^{-h}| < \epsilon$, pues $a^h \leq 1$ y $|1 - a^{-h}| < \epsilon \quad (-h > 0)$. Esto completa la prueba de la continuidad. $\square$

Veamos algunos gráficos de la función $q \mapsto a^q$ para algunos valores de $a$.




Gráficos de $2^q$ y $\left(\dfrac{1}{2}\right)^q$, con $q$ racional, $q \in [-2, 2]$.

A continuación definiremos $a^x$ para $x \in \mathbb{R}$. Esta es la primera vez en la que deberemos distinguir los casos $a > 1$ y $a < 1$. Esto es así por el punto (i) de la Proposición 2.1.

**Definición 2.2.** Sea $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

Si $a \geq 1$ definimos

$$\boxed{a^x := \sup\{a^q :\ q \in \mathbb{Q},\ q \leq x\}.}$$

Si $a \leq 1$ definimos

$$\boxed{a^x := \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\}.}$$

Notar que resulta $1^x \equiv 1$, para todo $x$.

De ahora en más, deberemos siempre tener en cuenta la distinción de estos dos casos, que aunque distintos, resultan completamente análogos.

**Lema 2.3.** *Sea $x \in \mathbb{R}$.*

(i) *Si $a > 1$, $\sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\} = \inf\{a^{q'} : q' \in \mathbb{Q}, x \leq q'\}$.*

(ii) *Si $0 < a < 1$, $\inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\} = \sup\{a^{q'} : q' \in \mathbb{Q}, x \leq q'\}$.*

*Prueba.* Claramente, vale la desigualdad "sup $\leq$ inf" en (i) y (ii). Ahora bien, si en (i) tuviéramos "sup $<$ inf", existiría $\epsilon > 0$ tal que

$$\sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\} + \epsilon < a^{q'}, \text{ para todo } q' \geq x. \tag{3}$$

Tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, números racionales $q_n, q'_n$ tales que $q_1 < \cdots < q_n \leq x$, $q'_1 > \cdots > q'_n \geq x$, y $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{q'_n\} = x$, entonces se tiene que $q'_n - q_n \to 0$ y por lo tanto $a^{q'_n - q_n} \to 1$, por continuidad de $q \mapsto a^q$ en $q = 0$. Ahora bien, por (3), para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$a^{q'_n - q_n} = \frac{a^{q'_n}}{a^{q_n}} \geq \frac{a^{q'_n}}{\sup\{a^{q_n} : n \in \mathbb{N}\}} > 1 + \frac{\epsilon}{\sup\{a^{q_n} : n \in \mathbb{N}\}} = 1 + \epsilon' \quad (\epsilon' > 0),$$

lo cual es imposible pues $a^{q'_n - q_n} \to 1$, si $n \to \infty$. □

A continuación resumiremos en un teorema las propiedades principales de la función $a^x$, $x \in \mathbb{R}$, análogas a las de $a^q$, con $q \in \mathbb{Q}$.

**Teorema 2.4.** *Sea $a > 0$. La función de variable real $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ es continua, estrictamente creciente si $a > 1$, idénticamente 1 si $a = 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$ y se tiene que*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a > 1; \\ 0, & \text{si } a < 1; \end{cases} \quad y \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{si } a > 1; \\ +\infty, & \text{si } a < 1. \end{cases}$$

*Además si $b > 0$, valen las siguientes propiedades para todo $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}; \tag{$\mathrm{e}_\mathbb{R}$}$$

$$a^x.a^y = a^{x+y}; \tag{$\mathrm{p}_\mathbb{R}$}$$

$$(ab)^x = a^x.b^x; \tag{$\mathrm{d}_\mathbb{R}$}$$

$$a^{-x} = (a^x)^{-1}. \tag{$\mathrm{i}_\mathbb{R}$}$$

*Prueba.* Dado que $a^q > 0$ para todo $q \in \mathbb{Q}$, se sigue de la definición que $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además si $x_1 < x_2$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x_1 < q < x_2$; es fácil ver, usando la definición y la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, que $a^{x_1} < a^q < a^{x_2}$.

Veamos la continuidad de $a^x$. Dado $\epsilon > 0$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < x$ y $a^x - a^q < \epsilon$ y por el Lema 2.3 existe $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q'$ y $a^{q'} - a^x < \epsilon$. De aquí resulta que si $x' \in [q, q']$, entonces $|a^{x'} - a^x| < \epsilon$.

Si $a = 1 + \alpha$ con $\alpha > 0$, tenemos para $n \in \mathbb{N}$ $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$. Luego, si $x > n$, se tiene que $a^x > a^n > 1 + n\alpha$, que es arbitrariamente grande si $n$ es suficientemente grande. Así $\lim_{x \to -+\infty} a^x = +\infty$.

Ahora bien, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$. Si $a < 1$, entonces $1/a > 1$ y por lo tanto $a^x = a^{(-1)(-x)} = (a^{-1})^{-x}$; pero ahora estamos en el caso anterior teniendo en cuenta que cuando $x \to \pm\infty$, $-x \to \mp\infty$.

Consideremos ahora la propiedad ($\mathrm{e}_\mathbb{R}$).

Sea $q \in \mathbb{Q}$ ($q$ fijo) y comparemos las funciones de variable real $x \mapsto \left(a^x\right)^q$ y $x \mapsto a^{xq}$. Ambas son continuas en $\mathbb{R}$ (por ser composición de funciones continuas) y ambas coinciden para todo $x \in \mathbb{Q}$; luego, por continuidad, son idénticas para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir

$$\left(a^x\right)^q = a^{xq}, \qquad \forall q \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

Sea ahora $y \in \mathbb{R}$ (fijo) y consideremos las funciones $\left(a^x\right)^y$ y $a^{xy}$. Como acabamos de ver, se tiene $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$, para todo $y \in Q$, luego, por continuidad se concluye la igualdad para todo $y \in \mathbb{R}$. Esto prueba ($\mathrm{e}_\mathbb{R}$).

Para verificar $(\mathrm{p}_{\mathbb{R}})$ fijamos $y$, primeramente en $\mathbb{Q}$ y luego en $\mathbb{R}$, y comparamos las funciones $x \mapsto a^x a^y$ y $x \mapsto a^{x+y}$. Si $y \in \mathbb{Q}$, estas son, nuevamente, funciones continuas en $\mathbb{R}$ que coinciden para todo $q \in \mathbb{Q}$ (por (4)), luego coinciden para todo $x \in \mathbb{R}$. La demostración se completa comparando las mismas funciones para $y \in \mathbb{R}$, $y$ fijo.

La prueba de $(\mathrm{d}_{\mathbb{R}})$ es similar a la dada en los dos puntos anteriores. Finalmente $(\mathrm{i}_{\mathbb{R}})$ se sigue de $(\mathrm{p}_{\mathbb{R}})$ tomando $x_1 = x$ y $x_2 = -x$ y usando que $a^0 = 1$. $\square$

## 2.2 El logaritmo como inversa de la exponencial

Dado un número real $a > 0$, hemos definido $a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y hemos visto que la función $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ es continua, estrictamente creciente (resp. decreciente) si $a > 1$ (resp. $a < 1$) y tiene como imagen todos los reales positivos (Teorema 2.4). Una función con estas propiedades tiene una inversa continua definida en $\mathbb{R}^{>0}$ y con imagen $\mathbb{R}$.

**Definición 2.5.** Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, se define el logaritmo en base $a$,

$$\log_a : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R},$$

como la función inversa de la función exponencial $x \mapsto a^x$.

Se sigue directamente de la definición que

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \\ \log_a(a^x) &= x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

y en particular

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{y} \quad \log_a a = 1.$$

De las propiedades de $a^x$ resultan las siguientes propiedades para el $\log_a x$.

**Teorema 2.6.** *Sea $a > 0$. La función $\log_a : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ es continua, estrictamente creciente si $a > 1$, estrictamente decreciente si $a < 1$ y*

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & si\ a > 1; \\ -\infty, & si\ a < 1; \end{cases} \quad y \quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & si\ a > 1; \\ +\infty, & si\ a < 1. \end{cases}$$

*Además, para todo $b > 0$, valen las siguientes propiedades, para $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$:*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$
$$\log_a(x^b) = b\log_a x;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

Este teorema es el análogo del Teorema 2.4 para las funciones logarítmicas. El mismo se sigue de aquél y de las propiedades de la inversa de una función continua y monótona.

A modo de ejemplo, verifiquemos la identidad $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Si denotamos $\alpha = \log_a x + \log_a y$ y calculamos

$$a^\alpha = a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy,$$

podemos concluir, por la inyectividad de $a^x$, que $\alpha = \log_a(xy)$. Dejamos el resto de la demostración como ejercicio para el lector.

**Ejercicio 2.7.** Escribir la prueba completa del Teorema 2.6.

**Proposición 2.8 (Cambio de base).** *Sean $a, b > 0$. Entonces para todo $x > 0$ vale*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

*Prueba.* Tomemos $\alpha = (\log_b a)(\log_a x)$ y usando las definiciones de $\log_b$ y $\log_a$ evaluemos

$$b^\alpha = b^{(\log_b a)(\log_a x)} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x.$$

Por otro lado como $b^{\log_b x} = x$, se sigue que $\alpha = \log_b x$ y de ahí la proposición. $\square$

Presentamos a continuación algunos ejemplos y ejercicios que nos ayudarán a familiarizarnos con estas nuevas funciones. Hacemos hincapié en que sólo usaremos las definiciones y las propiedades vistas hasta el momento.

**Ejemplo 2.9.** ¿Qué número es mayor, $\log_{10} 200$ ó $\log_{100} 2000$? ¿Qué contestaría usted antes de calcular?

Para poder comparar ambos números primero cambiamos la base del segundo logaritmo;

$$\log_{100} 2000 = \frac{\log_{10} 2000}{\log_{10} 100}.$$

Ahora calculamos

$$\log_{100} 2000 = \frac{\log_{10}(2 \times 1000)}{\log_{10} 100} = \frac{\log_{10} 2 + 3}{2} = \frac{\log_{10} 2}{2} + \frac{3}{2},$$

$$\log_{10} 200 = \log_{10}(2 \times 100) = \log_{10} 2 + 2;$$

ahora es claro que el primero es menor que el segundo, es decir

$$\log_{10} 200 > \log_{100} 2000.$$

**Ejercicios 2.10.** Calcular:

$$(a)\ 10^{\log_{10} 2,3}; \quad (b)\ \log_3 27; \quad (c)\ \log_2 \sqrt{2}^3;$$

$$(d)\ \log_5 \frac{1}{\sqrt{5^5}}; \quad (e)\ \log_{10}\left(\log_2\left(\log_7 7^{2^{100}}\right)\right).$$

**Ejercicio 2.11.** Dar el intervalo entero $[n, m]$ más chico que contiene al número $\log_{10}\left(c10^{-23}\right)$ para cualquier constante $c$, con $1 \leq c \leq 100$.

**Ejercicios 2.12.** Decidir cuáles de los siguiente números son positivos y cuáles negativos.

$$(a)\ 2\log_2 3 - 3\log_2 2; \quad (b)\ \log_{1/2} 3 + \log_{1/2} 2.$$

## 2.3 Las derivadas de la exponencial y el logaritmo

Tenemos ya definidas la exponencial $a^x$ y el logaritmo $\log_a x$. Ambas son funciones continuas, cada una inversa de la otra. El próximo objetivo es ver que ambas funciones son derivables y calcular sus derivadas. Bastará calcular la derivada de una de ellas, que en nuestro caso será $\log_a x$, pues la derivada de la otra se obtiene usando la expresión de la derivada de la función inversa (esto es, $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$). Se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log_a x &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} && (5)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) && (6)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}, && (7)
\end{aligned}
$$

donde $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ y $h$ es suficientemente pequeño (positivo o negativo) de modo que $\log_a(x+h)$ esté definido. Para calcular este límite necesitaremos resultados adicionales.

**Proposición 2.13.** *La sucesión $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y $a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

*La sucesión $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_n < b_n$ y*

$$b_n - a_n < \frac{3}{n} \qquad (8)$$

*Prueba.* Desarrollando el binomio tenemos

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\frac{1}{n^3} + \dots\\
&= 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots\\
&\quad \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Similarmente

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\dots \\ &\quad \dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Observamos que en ambos casos los dos primeros términos son iguales a 1 y que si $n \geq 2$, cada uno de los términos de $a_{n+1}$ es mayor que el correspondiente de $a_n$; además $a_{n+1}$ tiene un sumando positivo más. Se concluye entonces que $a_n < a_{n+1}$, es decir la sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente creciente. Por otro lado, usando la muy conocida serie geométrica, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{n!} < 2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}\right) < 2+1=3.$$

A continuación mostramos que la sucesión $b_n$ es estrictamente decreciente, probando que $\dfrac{b_{n-1}}{b_n} > 1$, para todo $n \geq 2$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\frac{n}{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1} \\ &\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} \\ &> \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue pues $(1+a)^n > 1+na$, para todo $n \geq 2$ si $a > 0$.

Finalmente, es claro que $b_n - a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\dfrac{1}{n} = \dfrac{a_n}{n} < \dfrac{3}{n}$, lo que prueba la última afirmación. □

**Definición 2.14.** Sea $e$ el número real definido por

$$e := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{9}$$

*Nota.* Se sigue de la proposición anterior que $e$ está bien definido y coincide con los límites de las sucesiones $a_n$ y $b_n$.

La misma proposición implica que $e < 3$ y que para todo $n$, vale la desigualdad

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \tag{10}$$

Esta desigualdad permite obtener aproximaciones precisas de $e$. La siguiente tabla muestra algunos valores de las sucesiones $a_n$ y $b_n$.

| $n$ | 10 | 100 | $10^3$ | $10^4$ | $10^5$ | $10^7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1+\frac{1}{n})^n$ | 2.59 | 2.704 | 2.7169 | 2.7181459 | 2.7182682 | 2.71828170 |
| $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ | 2.8531 | 2.731862 | 2.7196 | 2.7184177 | 2.718295 | 2.71828182 |

A partir de esta tabla podemos asegurar que

$$2.71828170 < e < 2.71828182, \tag{11}$$

esto es, a menos de un error menor que $2.10^{-7}$ tenemos $e = 2.718281$.

Se prueba que $e$ es irracional y su valor aproximado es $e \sim 2.71828182\ldots$. La notación $e$ fue usada por primera vez por el matemático suizo L. Euler (1727).

Si se toma $a = e$ se llama a $\log_e x$ *logaritmo natural de* $x$ y se denota $\ln x$.

Para calcular la derivada del logaritmo necesitaremos un resultado adicional, consecuencia de la Proposición 2.13.

**Teorema 2.15.** *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to\pm\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^x$.

*Prueba.* Haciendo el cambio de variable $t = ux$ vemos que el límite anterior es igual a $\lim_{t\to\pm\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^x$, por lo cual basta probar la afirmación para $x = 1$.

Tomemos $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$; se tiene $[t] \leq t < [t] + 1$, donde $[t]$ es la parte entera de $t$. Claramente tenemos las siguientes desigualdades:

$$\left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} \leq \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \leq \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1}, \qquad t > 0. \tag{12}$$

Ahora escribimos

$$\left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{[t]+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]+1}.$$

De la identidad anterior se sigue que $\left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} \to 1.e = e$, si $t \to +\infty$. Ahora escribimos

$$\left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1} = \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]} + \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]}\frac{1}{[t]},$$

de donde se sigue que $\left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1} \to e$, si $t \to +\infty$.

Por lo tanto, de (12), concluímos que $\lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$.

Análogamente, si reemplazamos $t$ por $-t$ (donde $t > 0$) se tiene

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1 + \frac{1}{t-1}\right).$$

Como $\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \to e$ y $\left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \to 1$ si $t \to +\infty$, se sigue que

$$\lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = e.1 = e.$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

Ahora ya estamos en condiciones de calcular la derivada del logaritmo.

**Teorema 2.16.** *Se tiene que*

(i) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

(ii) $(a^x)' = e^x \ln a$;

(iii) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$ y $\left(e^x\right)' = e^x$.

*Prueba.* Usando el teorema y haciendo $\frac{x}{h} = t$, resulta

$$\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{t\to\pm\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \qquad \text{corresponde } +(-) \text{ si } h > 0 (h < 0) \\
&= \frac{1}{x} \log_a e.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x} \log_a e$ y como $\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a}$, se sigue la primera parte. La derivada de la función $a^x$, inversa de $\log_a x$, es

$$\left(a^x\right)' = \frac{1}{\left(\log_a x\right)'(a^x)} = \frac{1}{\frac{1}{a^x \ln a}} = a^x \ln a.$$

La tercera parte sigue de inmediato de las anteriores tomando $a = e$. □

Notar que si $a = e$, resulta $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

## 2.4 Los gráficos de $a^x$ y $\log_a x$

Si $0 < a < 1$, entonces $\dfrac{1}{a} > 1$ y $a^x = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$; por lo tanto el gráfico de $a^x$ se obtiene a partir del gráfico de $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{x}$ reflejándolo respecto al eje vertical $(x = 0)$. En general los gráficos de $f(x)$ y $f(-x)$ son, para cualquier función $f$, uno el reflejado del otro. Por esto nos concentraremos en el caso $a > 1$.

Por otro lado sabemos que si $f$ y $g$ son una la inversa de la otra ($f \circ g = \text{id}$ y $g \circ f = \text{id}$), entonces sus gráficos son uno el reflejado del otro respecto de la diagonal principal $(y = x)$. Por esto estudiaremos los gráficos de las funciones $a^x$, con $a > 1$. Adem'as, obtendremos los gráficos de $a^x$ con $a < 1$, $\log_a x$ con $a > 1$ y $\log_a x$ con $a < 1$ por reflexión de los anteriores.

El Teorema 2.4 nos brinda información útil para graficar $a^x$ para un $a$ dado que junto con la información que nos da su derivada serán suficientes a nuestro fin.

Además graficaremos en un mismo gráfico comparativo, para distintos valores de $a$, las distintas funciones $a^x$. En la siguiente proposición encontraremos la que necesitamos.

**Proposición 2.17.** *Sean $a > b > 1$ y $0 < x \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces*

(i) $a^x > b^x$, *para todo* $x > 0$;

(ii) $a^x < b^x$, *para todo* $x < 0$;

(iii) $a^x \to 1$, *si* $a \to 1$;

(iv) $a^x \to \infty$, *si* $a \to \infty$;

(v) $a^{-x} \to 0$, *si* $a \to \infty$.

**Ejercicio 2.18.** Escribir la prueba de esta proposición.

Todas las funciones exponenciales y logarítmicas son convexas o cóncavas. Esto se sigue fácilmente observando sus segundas derivadas:

$$(a^x)'' = a^x(\ln a)^2;$$
$$(\log_a x)'' = -\frac{1}{x^2(\ln a)^2}.$$

Luego, $a^x$ es convexa (cóncava hacia arriba) cualquiera sea $a > 0$ y $\log_a x$ es cóncava hacia abajo cualquiera sea $a > 0$.

El siguiente lema agrega un dato más que da más precisión a nuestros gráficos.

**Lema 2.19.** *Sea $a > 1$. El gráfico de $a^x$ no corta a la diagonal principal $(y = x)$ si $a > e^{1/e}$; es tangente a dicha diagonal si y sólo si $a = e^{1/e}$ y la corta dos veces si $a < e^{1/e}$.*

*Prueba.* Comenzamos por determinar el $a$ para el cual el gráfico de $a^x$ es tangente a la diagonal, es decir al gráfico de $x$. Decir que los gráficos de dos funcions son tangentes en un punto es lo mismo que decir que las dos funciones coinciden en ese punto y que sus derivadas también coinciden en ese punto. Por lo tanto buscamos $a$ tal que

$$a^x = x,$$
$$a^x \ln a = 1.$$

Reemplazando en la segunda $a^x$ por $x$ resulta $x = \dfrac{1}{\ln a}$. Volvemos a la primera y tenemos $a^{\frac{1}{\ln a}} = \dfrac{1}{\ln a}$; pero

$$a^{\frac{1}{\ln a}} = e^{\ln a^{\frac{1}{\ln a}}} = e^{\frac{1}{\ln a}\ln a} = e.$$

Por lo tanto $e = \dfrac{1}{\ln a}$ y $\ln a = \dfrac{1}{e}$, luego $a = e^{1/e}$.

El resto se sigue de la proposición anterior. □

Con todo lo visto estamos en condiciones de hacer un gráfico cualitativo de diversas funciones exponenciales y logarítmicas.

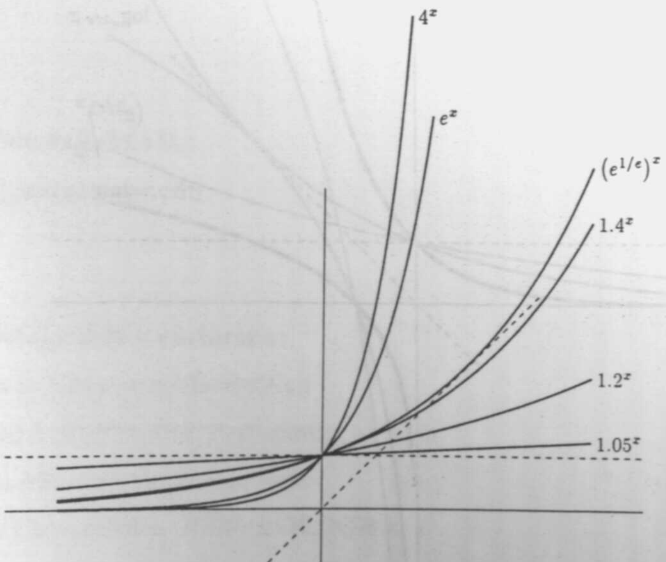



Gráfico comparativo: $a^x$ para distintos valores de $a$ ($a > 1$).

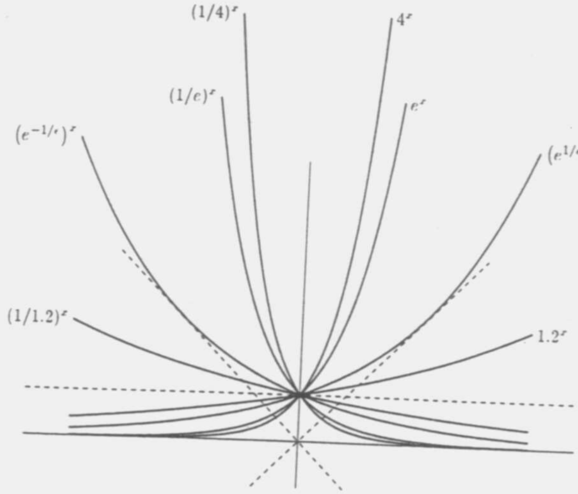



Gráfico comparativo: $a^x$ y $(1/a)^x$ para algunos valores de $a$ $(a > 1)$.

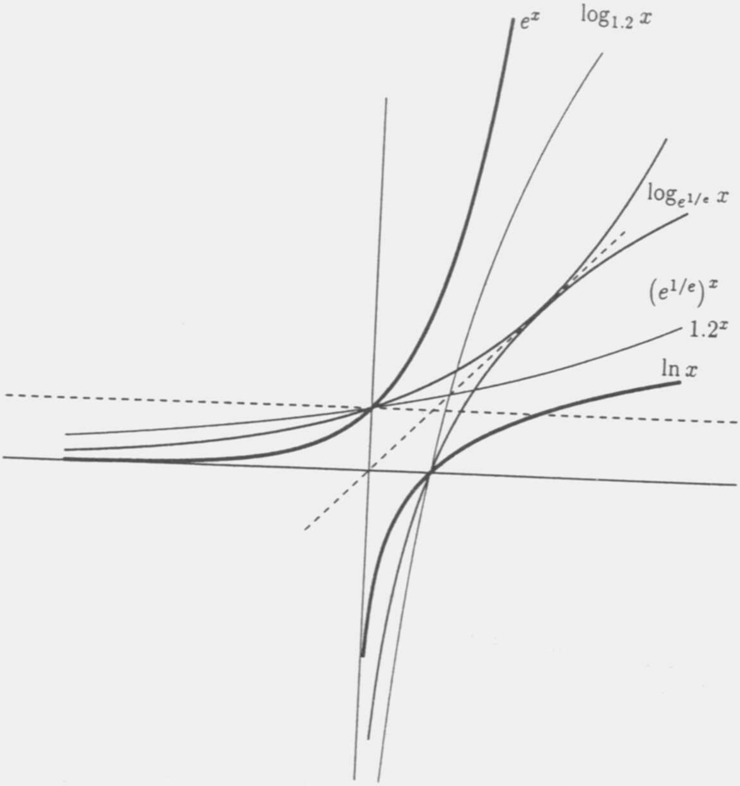



Gráfico comparativo: $a^x$ y $\log_a x$ para algunos valores de $a$ $(a > 1)$.