

# La descomposición en valores singulares: un enfoque geométrico y aplicaciones

*Flavia Buffo, Adriana Verdiell*

## 1 Introducción

Este trabajo tiene como objetivo presentar uno de los temas clásicos del Álgebra Lineal Numérica: la descomposición en valores singulares de una matriz. No es nuestra intención dar las demostraciones de los resultados matemáticos, ya que pueden encontrarse en la bibliografía citada, sino hacer hincapié en la interpretación geométrica, su relación con la descomposición en autovalores y su aplicación al problema de transmisión de imágenes.

## 2 Breve reseña histórica

La descomposición en valores singulares de una matriz fue propuesta en forma independiente por Beltrami en 1873 y Jordan en 1874. Su generalización a espacios de dimensión infinita fue desarrollada en el contexto de ecuaciones integrales por Smith (1907) y Weyl (1912). Sin embargo, esta factorización no fue popular hasta fines de la década del 60, cuando Golub y otros autores mostraron cómo calcularla numéricamente y usarla como herramienta para muchos algoritmos estables [2,4]

## 3 Formulación matemática del problema

**Definición 3.1** [3] Dada  $A \in \mathcal{C}^{m \times n}$ , una descomposición en valores singulares (SVD) es una factorización del tipo  $A = U\Sigma V^*$  con  $U \in \mathcal{C}^{m \times m}$ ,  $V \in \mathcal{C}^{n \times n}$  matrices unitarias,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matriz "diagonal", ie :  $\Sigma_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ,  $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p > 0$ ,  $\Sigma_{ii} = 0$ ,  $i > p$  y  $p \leq \min\{m, n\}$ .

A continuación enunciamos el teorema de existencia y unicidad de esta factorización.

**Teorema 3.1** *Toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  admite descomposición en valores singulares. Más aun, si  $m = n$  y los  $\sigma_j$  son distintos dos a dos, entonces la matriz  $\Sigma$  es única. En este caso, las columnas de  $U$  (vectores singulares a derecha) y las columnas de  $V$  (vectores singulares a izquierda) están unívocamente determinados salvo un escalar complejo de módulo uno.*

## 4 Formulación geométrica del problema

La descomposición en valores singulares se aplica tanto a matrices reales o complejas, sin embargo, con el objetivo de dar una interpretación geométrica asumimos  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Notemos con  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$  y con  $S$  la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.1** *Llamamos hiperelipse en  $\mathbb{R}^m$ , a la superficie obtenida deformando la esfera unitaria a lo largo de direcciones ortogonales  $u_1, u_2, \dots, u_m$  de  $\mathbb{R}^m$ , en magnitudes  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  (eventualmente cero).*

Esto es, la hiperelipse de semiejes  $\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_m u_m$  es

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{j=1}^m c_j \sigma_j u_j \wedge \sum_{j=1}^m c_j^2 = 1 \right\}.$$

Como los  $u_i$  son versores, los vectores  $\{\sigma_i u_i\}$  tienen longitud  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  respectivamente y se los denomina *los semiejes principales* de la hiperelipse.

Si  $S$  es la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$  su imagen por cualquier transformación  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , es una hiperelipse en el subespacio imagen de  $A$ . En efecto, denotemos por  $v_1, \dots, v_n$  (resp.  $u_1, \dots, u_n$ ) las columnas de  $V^*$  (resp. las columnas de  $U$ )

$$AS = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n \wedge \|x\|_2 = 1\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{j=1}^n c_j Av_j : \sum_{j=1}^n c_j^2 = 1 \right\} = \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^n c_j \sigma_j u_j : \sum_{j=1}^n c_j^2 = 1 \right\}
\end{aligned}$$

Puesto que un simple cálculo muestra que  $Av_j = \sigma_j u_j$ ,  $j = 1 \dots n$ .

Sea  $m \geq n$  y supongamos por simplicidad que  $\text{rango}(A) = n$ .

**Definición 4.2** Los valores singulares de  $A$  son las longitudes de los  $n$  semiejes principales de  $AS$  numerados de tal modo que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ .

**Definición 4.3** Los vectores singulares a izquierda de  $A$  son los vectores unitarios  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Geométricamente son direcciones de los semiejes principales de  $AS$  y numerados en correspondencia con los valores singulares, es decir  $\sigma_i u_i$  es el  $i$ -ésimo semieje principal de  $AS$ .

**Definición 4.4** Los vectores singulares a derecha de  $A$  son los vectores unitarios  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in S$ . Estos vectores son preimágenes de los semiejes principales de  $AS$ . Puesto que  $Av_j = \sigma_j u_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

En notación matricial, si  $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{U} = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\tilde{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la expresión  $Av_j = \sigma_j u_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  se escribe:

$$A = \tilde{U} \tilde{\Sigma} V^T.$$

Esta factorización de la matriz  $A$  se llama *descomposición en valores singulares reducida*. Observemos que las columnas de  $\tilde{U}$  son  $n$  vectores ortonormales en un espacio de dimensión  $m$ , por lo tanto si  $m > n$  no constituyen una base; sin embargo es posible agregarle  $m - n$  columnas de manera que la matriz resultante  $U$  es ortogonal.

En la figura 1 se representan esquemáticamente las descomposiciones en valores singulares reducida (a) y completa (b).

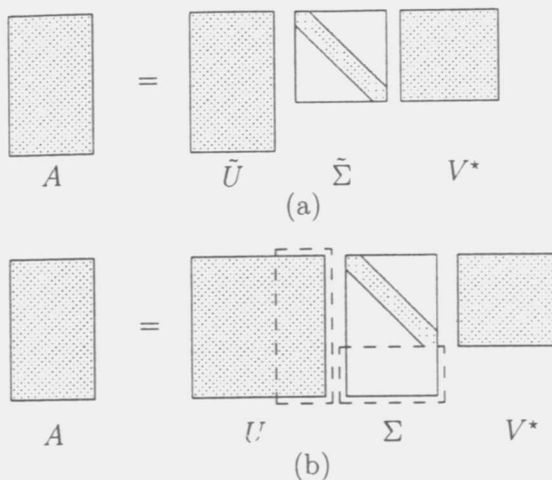


Figura 1: (a) SVD reducida. (b) SVD completa.

Si  $A$  tiene rango  $r < n$ , la factorización  $A = U\Sigma V^*$  también es posible, sólo que en este caso son  $r$  los vectores singulares a izquierda están determinados por la geometría de la hiperelipse. Para construir la matriz  $U$  es necesario agregar  $m - r$  columnas ortonormales y  $V$  necesita de  $n - r$  columnas ortonormales arbitrarias para completar las  $r$  determinadas geoméricamente [5].

## 5 Interpretación algebraica de la descomposición en valores singulares.

De acuerdo al teorema 3.1, podemos asegurar que si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , es posible escoger una base ortonormal en  $\mathbb{R}^n$  ( las columnas de  $V$ ), y una base ortonormal en  $\mathbb{R}^m$  (las columnas de  $U$ ) tal que la matriz de  $A$  en dicho par de bases es diagonal.

La diagonalización de una matriz está íntimamente relacionada con el tema de autovalores. Sabemos que si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tiene  $n$  autovectores linealmente independientes es diagonalizable, esto es

$$A = X \Lambda X^{-1}$$

donde  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz cuyas columnas son los autovectores de  $A$  y  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal cuyas entradas son los autovalores de  $A$ . Esta factorización se conoce como *descomposición en autovalores*.

Las diferencias fundamentales entre ambas factorizaciones son las siguientes:

- SVD utiliza dos bases diferentes para diagonalizar una matriz (las bases determinadas por los vectores singulares a derecha e izquierda),
- las bases en SVD son ortonormales, lo cual no siempre ocurre en la descomposición en autovalores,
- no toda matriz admite descomposición en autovalores, aún siendo cuadrada, sin embargo el teorema 3.1 asegura que toda matriz admite descomposición en valores singulares.

Cabe destacar que los valores singulares adquieren importancia en los problemas que dependen del comportamiento de  $A$  o de su inversa, mientras que los autovalores resultan relevantes en los problemas que involucran cálculos reiterados de la matriz  $A$ , como las potencias  $A^k$  o las exponenciales  $e^{tA}$ .

Los resultados más importantes de SVD se resumen en el siguiente teorema:

**Teorema 5.1** Sea  $A = U \Sigma V^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , con  $m > n$ , entonces:

1. Los autovalores de la matriz  $A^T A$  son los números  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ , y los autovectores de  $A^T A$  son los vectores singulares a derecha  $v_i$  de  $A$ .
2. Los autovalores no nulos de la matriz  $AA^T$  son los  $\sigma_i^2$ , y los autovectores asociados son los vectores singulares a izquierda  $u_i$  de  $A$ . Cualquier otro

complemento ortogonal a  $U_1 \dots U_n$  puede elegirse como autovectores asociados al autovalor 0.

3. Si  $m = n$ , y  $H = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$ , los  $2n$  autovalores de  $H$  son  $\pm\sigma_i$  con autovectores asociados  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_i \\ \pm u_i \end{bmatrix}$ .

4. Si  $A$  es de rango completo, la solución del problema de cuadrados mínimos

$$\min_x \|Ax - b\|$$

es  $x = V\Sigma^+U b$ .

Donde  $\Sigma^+$  es la matriz "diagonal"  $\Sigma_{ij}^+ = 0$  si  $i \neq j$ ,  $\Sigma_{ii}^+ = \sigma_i^{-1}$  si  $\sigma_i \neq 0$ ,  $\Sigma_{ii}^+ = 0$  si  $\sigma_i = 0$

5.  $\|A\| = \sigma_1$ . Si  $A$  es inversible,  $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n}$ .

6. Como  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p > 0$ , el rango de  $A$  es  $p$ . El espacio nulo de  $A$  está generado por las columnas  $[v_{p+1}, \dots, v_n]$  de  $V$  y el espacio rango por las columnas  $[u_1, \dots, u_p]$  de  $U$ .

7. La imagen de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$  por  $A$  es una hiperelipse en  $A\mathbb{R}^n$  centrada en el origen con semiejes principales  $\sigma_i u_i$ .

8. Si  $k < n$  la solución del problema

$$\min \{\|A - B\| : B \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ y } \text{rango}(B) = k\}$$

es  $A_k = U\Sigma_k V^T$ , con  $\Sigma_k = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0)$  y se tiene que  $\|A - A_k\| = \sigma_{k+1}$ .

## 6 Interpretación geométrica de los valores singulares

En esta sección mostramos gráficamente los resultados citados en el inciso 7 del teorema 5.1. Notemos que la transformación ortogonal  $V$  sólo produce la rotación de la esfera  $S$ ,  $\Sigma$  la deforma en una hiperelipse y finalmente  $U$  rota la hiperelipse.

**Ejemplo 6.1** En este ejemplo,  $n = 2$  y por lo tanto  $S$  es la circunferencia unitaria. Elegimos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

En la figura 2 podemos ver la deformación de la circunferencia unitaria y de los vectores singulares a derecha de  $A$  al aplicar sucesivamente las transformaciones  $V^T$ ,  $\Sigma$  y  $U$ .

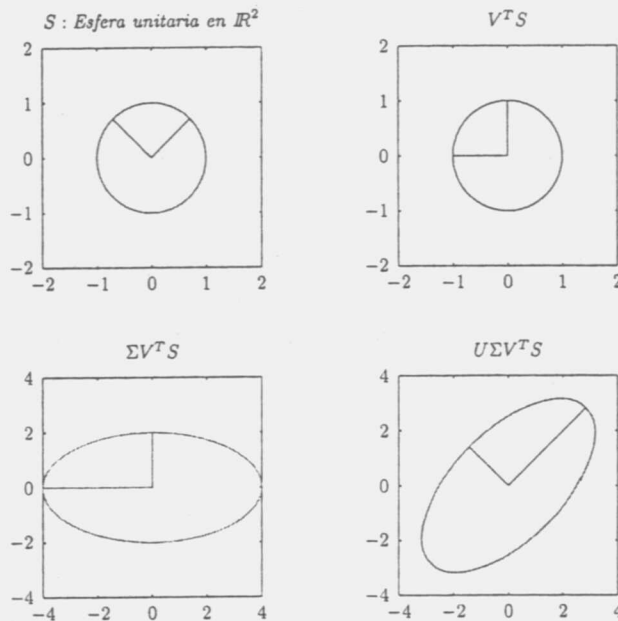


Figura 2: Transformación de la esfera unitaria en  $R^2$ .

**Ejemplo 6.2** En este ejemplo  $n = 3$  y por lo tanto,  $S$  es la esfera unitaria de  $\mathbb{R}^3$ . En la figura 3 mostramos la esfera  $S$  los vectores singulares a derecha y su imagen por la transformación:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

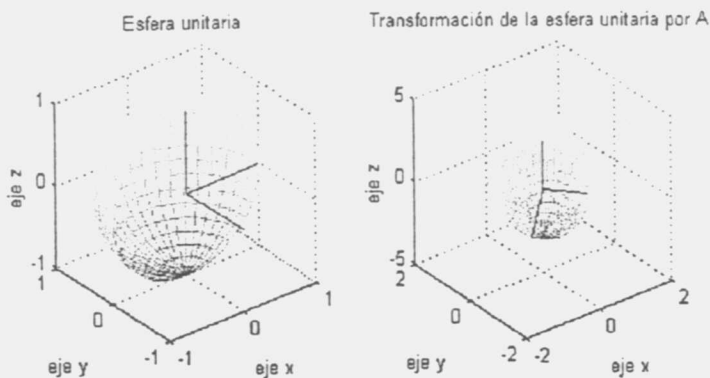


Figura 3: Transformación de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ .

## 7 Aplicación al problema de transmisión de imágenes

El objetivo de esta sección es mostrar cómo puede utilizarse la descomposición en valores singulares de una matriz para transmitir una imagen y cómo explotarla adecuadamente para economizar lugares de memoria.

La pantalla del monitor de una computadora está compuesta por puntos de coordenadas  $(i, j)$ . Usualmente es  $1 \leq i \leq 645$ ,  $1 \leq j \leq 936$ . Cada punto es susceptible de ser coloreado con un color. A cada color se le asigna un número entre 0 y 1. Por tanto una imagen queda representada por una matriz  $A \in R^{645 \times 936}$ , donde  $a_{ij}$  es el número del color asignado al punto  $(i, j)$ .



Si una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango completo (= rango máximo) representa una imagen y una matriz  $B \in \mathbb{R}^{p \times 3}$  una gama de colores, es posible, usando las funciones de MATLAB `colormap` e `image` visualizar la imagen definida por  $A$ .

Nos podemos preguntar cómo se modifica la *calidad* de la imagen si se aproxima  $A$  por una matriz de rango menor. Para ello se calculan los valores singulares de  $A$  usando la función de MATLAB `svd` y se consideran las matrices  $A_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango  $k < n$  definidas en el inciso 8 del teorema 5.1.

Para cuantificar la bondad de la aproximación representada por  $A_k$  respecto de  $A$  definimos dos parámetros: el error relativo  $\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_1}$  y el radio de compresión  $\frac{(m+n)k}{mn}$  [1].



Figura 4: Matriz de rango completo.

Consideremos la imagen que se muestra en la figura 4. Este dibujo está representado por una matriz  $A \in \mathbb{R}^{645 \times 936}$  de rango completo igual a 645, con valores singulares extremos  $\sigma_{max} = 1.100536 \times 10^5$ ,  $\sigma_{min} \simeq 1.3359 \times 10^{-28}$ .

En la Tabla 1 mostramos cómo se modifican los parámetros antes menciona-

Rango $k$	$\sigma_k$	$\sigma_{k+1}/\sigma_1$	Radio de Compresión
575	$7.8778 \times 10^{-5}$	0.9921	$2.20 \times 10^5$
445	40.202	$3.6275 \times 10^{-4}$	1.17
270	143.103	$1.2892 \times 10^{-3}$	0.70
130	521.82	$4.7365 \times 10^{-3}$	0.34
70	630.48	$5.6670 \times 10^{-3}$	0.18
30	2252.4	$2.0281 \times 10^{-2}$	0.079
10	$5.1419 \times 10^3$	$4.5626 \times 10^{-2}$	0.026

Tabla 1.

dos en función del rango de la aproximación escogido  $A_k$  y en las figuras 5-7 las imágenes que resultan en algunos casos.

A partir de resultados obtenidos con diferentes imágenes y variando el rango de las aproximaciones, establecemos una regla heurística para decidir cuál es el mayor valor singular,  $\sigma_{p+1}$ , tal que la aproximación de rango  $p$  permite reproducir aceptablemente la imagen original.



Figura 5: Matriz de rango  $k = 445$ .

Llamaremos *dominantes* a los  $\sigma_j$  que verifiquen que  $\sigma_j \geq \sigma_p$ .



Figura 6: Matriz de rango  $k = 30$ .

De la tercera columna de la Tabla 1 se extraen los valores singulares dominantes, en general se observa que si  $\sigma_k$  es tal que  $\sigma_k/\sigma_1$  pertenece al intervalo  $[10^{-3}, 10^{-2}]$  la imagen comienza a perder calidad y para valores superiores a  $10^{-2}$  la calidad de la imagen es realmente pobre. Por tanto  $\sigma_{(445)}$  es un valor dominante de  $A$ .



Figura 7: Matriz de rango  $k = 10$

El radio de compresión relaciona la cantidad de almacenamiento requerida

para  $A_k$  respecto de la necesaria para  $A$ ; como se puede observar dicho radio es menor que la unidad sólo si  $k < \frac{mn}{m+n}$ . Si se desea almacenar la matriz original  $A$  son necesarios  $O(6 \times 10^5)$  lugares de memoria; si consideramos que la aproximación de rango 30 es adecuada, sólo son necesarios  $4.7 \times 10^4$  lugares.

Si deseamos modificar sólo una parte de la imagen representada por la matriz  $A$ , es suficiente particionarla adecuadamente y aproximar la submatriz correspondiente por una matriz de rango menor.

La figura 8 muestra el resultado de aproximar sólo la submatriz que resulta de interceptar las filas  $130 \leq i \leq 430$  con las columnas  $255 \leq j \leq 540$  de la matriz original.

## 8 Comentarios finales

La sección anterior muestra porqué algunos especialistas prefieren hablar de Algebra Lineal Aplicada en lugar de Algebra Lineal Numérica; la amplia gama de aplicaciones que existen para los temas que trata justifican este argumento.

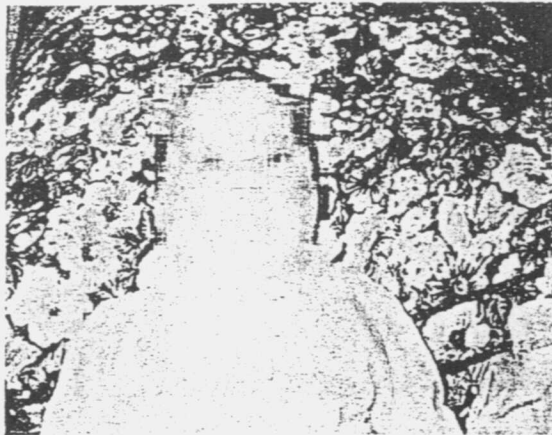


Figura 8: Submatriz de rango reducido  $k = 5$

Nuestra experiencia frente a cursos con alumnos de carreras con distintos intereses nos permite asegurar que las aplicaciones consiguen entusiasmar a casi todos.

## Referencias

- [1] J.W. DEMMEL. Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, Berkeley, California, 1997.
- [2] G.H. GOLUB and Ch.F. VAN LOAN. Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1989.
- [3] G.W. STEWART. Matrix Algorithms. Vol. 1. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [4] L.N. TREFETHEN and D. BAU. Numerical Linear Algebra. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [5] D.S. WATKINS. Fundamentals of Matrix Computation. John Wiley and Sons, New York, 1991.

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Avenida Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, ARGENTINA.

(flabuffo@criba.edu.ar)(averdiel@criba.edu.ar).