

Problemas para resolver

1) Sea T un triángulo cualquiera, al cual se le numeran los vértices con 0,1 y 2.
2. Triangule el triángulo como quiera, es decir, pártalo en triángulos más chicos. Numere los vértices de esos triángulos como quiera, con las únicas restricciones de que sólo puede usar los números 0,1 y 2, y que, aquellos vértices que estén en el lado (del triángulo grande) 01, deben llevar sólo 0 y 1's, aquellos en el lado 12 sólo 1 y 2's y aquellos en el lado 02 sólo 0 y 2's. (Los vértices "internos", es decir los que estén en el interior del triángulo pueden llevar cualquiera de los números 0,1 y 2). Probar que no importa como los numere, siempre habrá un triangulito con vértices numerados 0, 1 y 2. (Esto es conocido como el lema de Sperner).

2) Sea S un conjunto finito cualquiera de números naturales. Para cada número n en S , sea $t(n)$ el número total de divisores menores y múltiplos mayores de n que estén en S .

Por ejemplo, si $S = \{1, 2, 4, 5, 7, 10\}$, entonces $t(1) = 5$ (5 múltiplos), $t(2) = 3$ (1 divisor, 2 múltiplos), $t(4) = 2$ (2 divisores), $t(5) = 2$ (1 divisor, 1 múltiplo), $t(7) = 1$ (1 divisor) y $t(10) = 3$ (3 divisores). Observar que en este caso, $t(4) = t(5)$.

Probar que, en general, dado un S cualquiera, existen dos números $n, m \in S$ tales que $t(n) = t(m)$.

3) Un hombre nacido en el siglo XX cumplirá t años en el año t^2 . Cuándo nació el hombre?

4) Probar que:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} = \text{etc} = 0$$

5) ¿ De cuántas formas puede formarse una comisión de 10 diputados tomados de un grupo de 45 diputados entre los cuales hay 20 justicialistas, 15 radicales y 10 del Frepaso. si:

i) No hay restricciones en la selección?

ii) La comisión debe tener exactamente 5 justicialistas?

iii) La comisión debe tener 5 justicialistas, 3 radicales y 2 del Frepaso, y entre los 45 diputados están A,B y C, justicialista, radical y frepasista, respectivamente y como los tres tienen personalidad y carisma fuerte, se desea que o bien estén los tres (para contrabalancearse entre si), o bien no esté ninguno de los tres (para que no influyan)?

iv) En la comisión debe haber al menos un representante de cada partido?

6) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Sea $g_n = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$, donde en la composición hay n f 's. Hallar $g_{1516}(30)$ y $g_{17001}(2)$.