# Transformaciones geométricas

*Liliana Guisin*

*Transformaciones topológicas, proyectivas, afines y métricas. Invariantes. Representación matricial. Parámetros. Propiedades. Relaciones con los contenidos de EGB3 y Polimodal.*

La Geometría elemental se ocupa de estudiar propiedades de figuras y cuerpos en el plano y en el espacio. Para poder abarcar el estudio de estas propiedades puede hacerse una clasificación según diferentes enfoques. Tradicionalmente éstos tomaban en cuenta el método utilizado para construir o demostrar las diferentes propiedades. Hablamos así de geometría "sintética" cuando utilizamos un método axiomático donde, a partir de un conjunto de axiomas o postulados, deducimos por razonamientos lógicos los teoremas, con herramientas fundamentalmente geométricas, de alguna manera independientemente del álgebra y de la noción de continuidad en conjuntos numéricos. Hablamos de geometría "analítica" cuando, basados en la noción de coordenadas, usamos técnicas algebraicas; este tratamiento de alguna manera unificó la geometría, el análisis y el álgebra, produciendo cambios profundos en la matemática.

Nosotros queremos utilizar las transformaciones geométricas para clasificar las propiedades. Esta idea de clasificar las propiedades geométricas según clases de transformaciones fue propuesta por Felix Klein en su "Programa de Erlangen", en 1872. Esta propuesta también produjo cambios en la geometría. Estudiaremos algunas de las transformaciones en el plano euclídeo, asociándoles propiedades que son invariantes por ellas.

## El Siglo XIX

El Siglo XIX fue llamado, en matemática, la edad de Oro. Se analizaron conceptos antes intuitivos, como teoremas de existencia y unicidad (Cauchy, Poisson, Fourier, Lipschitz, Riemann, Baire, Picard). Comenzó a establecerse una fundamentación lógica a la superestructura construida el siglo anterior, aparecieron problemas tecnológicos y económicos relacionados con la industrialización. Se introdujeron nuevas nociones, como conjuntos (Cantor) y medida (Lebesgue). El álgebra estaba muy pegada a la aritmética, pero con los cuaterniones aparecieron distintas álgebras y se desarrolló el álgebra abstracta (Hamilton, Grassmann, Boole, De Morgan, Cayley, Sylvester, Hermite). Comenzó a desarrollarse la teoría de grupos, uno de cuyos pioneros fue Evariste Galois (1811-32), muerto en un duelo a los 20 años, quien la noche anterior la ocupó en dejar por escrito, en una carta a su amigo Auguste Chevallier, sus desarrollos matemáticos.

En otras áreas podemos mencionar, por ejemplo, en 1803 la teoría atómica de Dalton; en 1820 el electromagnetismo (Oersted), en 1827 la ley de Ohm, en 1836 el telégrafo, en 1859 el origen de las especies de Darwin, en 1869 la tabla periódica de Mendeleief, en 1873 electricidad y magnetismo de Maxwell, en 1876 el teléfono, en 1895 los rayos x (Roentgen), en 1896 la radiactividad (Becquerel), en 1897 el electrón y en 1898 el radio (Courie).

En la primera mitad del siglo XIX hubo desarrollos importantes en Geometría. Jean Victor Poncelet (1788-1867), oficial-ingeniero abandonado en el campo de batalla durante la retirada de las tropas de Napoleón de Moscú y mantenido prisionero durante 2 años en Saratov, al regresar a Francia resucitó el estudio de la geometría proyectiva a nuevos ámbitos de belleza y generalidad (la geometría proyectiva estaba prácticamente abandonada desde la época de Desargues y Pascal).

Se desarrollaron las Geometrías no euclidianas. Ya Gauss (1777-1855) había comenzado a pensar en el problema del 5to. postulado y en 1792 estaba convencido de la existencia de una geomatría lógicamente consistente en que éste no valiera. Pocos años más tarde postuló un enunciado alternativo: "que existen al menos dos rectas paralelas a una dada por un punto exterior." Exploró las consecuencias de ese supuesto y pudo deducir un sistema auto-consistente que tenía varios teoremas extraños. A diferencia de sus predecesores en el campo, él confió en seguir esta aproximación, pero no quiso (o no se animó a) publicarlo. La cuestión contradecía el criterio de Kant, de que el espacio era sólo la forma de nuestra concepción. En una carta que Gauss escribió en 1817 dijo: "Estoy cada vez más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede probarse, por lo menos no con razones humanas. Quizás en otra vida podamos obtener una visión de la naturaleza de este espacio que nos es inalcanzable ahora." El primero en publicar ideas equivalentes fue el ruso N. I. Lobatchevski en 1829. También Johann Bolyai publicó (en 1831), como apéndice de un libro de su padre, resultados casi idénticos a los que había arribado Gauss.

Bernhard Riemann (1826-1866), en 1854 exploraba el problema de que por un punto exterior a una recta no pasara ninguna paralela a dicha recta. Con estos desarrollos, la geometría de Euclides perdía su unicidad. Se desarrolló la Geometría diferencial (estudio de propiedades de curvas y superficies usando cálculo infinitesimal), que provocó, con su estudio de geometrías n-dimensionales, la liberación de la geometría.

**Félix Klein (1849-1925)**

Ya Galois (1811-52) había entrevisto la idea de grupo como importante en los desarrollos algebraicos. Pero la idea de englobar las distintas geometrías utilizando esta noción, fue desarrollada en gran parte por Christian Félix Klein, quien había ingresado en la Universidad de Bonn a estudiar física. Como asistente del profesor Plucker, quien investigaba en geometría, Klein se adentró en estas investigaciones. Luego de egresado conoció en Berlín al noruego Sophus Lie, con quien compartió una estadía en París, y a Camile Jordan que en 1870 publicaba su "Traité des substitutions et des équations algebriques", que era una exposición elaborada de las ideas de Galois. Klein debió volver a Alemania (a causa de la guerra franco-prusiana) y trabajó un año en Gotinga, pagado por los estudiantes que tomaban sus cursos. Finalmente fue nombrado profesor en Erlangen. Su conferencia de habilitacioón, conocida como el "Programa de Erlangen", fue publicada el los Mathematische Annalen en 1873 y traducida a 6 idiomas (inglés, francés, polaco, ruso, italiano y húngaro). Allí unificaba muchas e las geometrías conocidas hasta entonces, dentro de la teoría de grupos. El programa permitió varios desarrollos posteriores en geometría, subsistiendo aún hoy su influencia.

Klein también dio los nombres de hiperbólica, parabólica y elíptica a las geometrías en que por un punto exterior a una recta pasan, respectivamente, dos, una o ninguna paralela a dicha recta. Desarrolló modelos para las geometrías no euclidianas y llegó a ver que la geometría proyectiva era independiente del 5to postulado, por lo que las geometrías no euclidianas podían incluirse dentro de ésta.

Desde 1905 Klein mostró interés por la enseñanza de las matemáticas en la escuela media. Intervino en la elaboración del "Meraner Lehrplanentwurf", para mejorar la enseñanza de la matemática, en el que incluía la introducción de la noción de función y del cálculo en el curriculum de la enseñanza media. Su influencia trascendió las fronteras, llegando hasta Inglaterra. En 1908 publicó "Matemáticas elementales desde un punto de vista avanzado", basado en sus conferencias a profesores de escuela media. Un detalle significativo es que abogaba por el uso de la calculadora como medio didáctico. Hizo mucho por crear en Goettingen un Instituto

Matemático separado de la Facultad de Filosofía (aunque no lo llegó a verlo realizado).

## El Programa de Erlangen

Para tener una idea del espíritu del programa, pensemos en un proyector de imágenes. Sabemos que, en una determinada posición, podemos obtener una imagen ampliada de la figura. Pero según cómo coloquemos la pantalla, podemos obtener imágenes deformadas. Lo que seguro sucede es que las rectas se transforman en rectas. Estas tansformaciones entre planos (en este caso el de la imagen original y el de la pantalla), que mandan rectas en rectas, se llaman colineaciones o transformaciones proyectivas. Las propiedades y relaciones que se mantiene invariantes por estas transformaciones, son propiedades proyectivas; definen una geometría que llamamos geometría proyectiva (que como mencionamos antes, incluye a las geometrías no euclidianas).

Si, retomando el proyector, nos quedamos con aquellas transformaciones que además conservan el paralelismo (afinidades), tenemos un subgrupo (aunque Klein no lo mencionó explícitamente en su programa).

Si pedimos que también se conserven los ángulos, tenemos las semejanzas.

Si pedimos que sea invariante la distancia, tendremos los movimientos rígidos (que definen la geometría que solemos llamar euclídea o métrica).

Las transformaciones más generales, que ni siquiera mandan rectas en rectas, son las topológicas.

$$\text{topología}\begin{cases}\text{otras geometrías}\\[2ex] \text{geometría proyectiva}\begin{cases}\text{geometrías no euclidianas}\begin{cases}\text{geometría hiperbólica}\\ \text{geometría elíptica}\end{cases}\\[2ex] \text{geometría euclídea}\to\text{geom.afín}\to\text{geom.métrica}\end{cases}\end{cases}$$

## Grupos de transformaciones

La noción de grupo tiene que ver con estructuras. Decimos que un conjunto no vacío con una operación interna tiene estructura de grupo si cada vez que operamos dos elementos del conjunto obtenemos otro elemento del conjunto, y si cada elemento tiene el inverso respecto de la operación en el conjunto. Nos interesan los conjuntos cuyos elementos son aplicaciones de un conjunto en sí mismo, con la composición como operación,

Hablaremos de una *aplicación* $\sigma$ de un conjunto S en un conjunto S', cada vez que dispongamos de una regla por la cual a cada elemento $x \in S$ le corresponde un elemento, y uno solo $x' \in S'$. Para ellas siguen siendo válidas las definiciones de *inyectiva* [$\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x=y$ ], *suryectiva* [$\sigma(S) = S'$ ] y *biyectiva* [inyectiva y suryectiva] que conocemos para funciones numéricas.

Dadas dos aplicaciones $\sigma_1$: S $\rightarrow$ S' y $\sigma_2$: S' $\rightarrow$ S'', definimos la *composición* (o producto) como la aplicación $(\sigma_2\,\sigma_1)$: S $\rightarrow$ S'' dada por $(\sigma_2\,\sigma_1)(x) = \sigma_2[\sigma_1(x)]$. Si una aplicación $\sigma$: S $\rightarrow$ S' es biyectiva, su *aplicación inversa* $\sigma^{-1}$ se define como la aplicación de S' en S que a cada elemento $x' \in S'$ le hace corresponder el (único) elemento $x \in S$ tal que $\sigma(x)=x'$. Cuando trabajemos con aplicaciones de un conjunto en sí mismo, hablaremos de *transformaciones.*

Decimos que un conjunto no vacío G[$\sigma$ ] de transformaciones biyectivas de un conjunto S en sí mismo es un *grupo de transformaciones* (que actúa en S) si se verifican:

- si $\sigma_1 \in G$ y $\sigma_2 \in G$ , entonces $(\sigma_2\,\sigma_1) \in G$ .
- si $\sigma \in G$ , entonces $\sigma^{-1} \in G$ .

Todo grupo de transformaciones contiene a la transformación idéntica (Sea $\sigma \in G$ , entonces $\sigma^{-1} \in G$, entonces $(\sigma\,\sigma^{-1}) = Id \in G$).

Podemos encontrar ejemplos sencillos de grupos de transformaciones, analizando las transformaciones en la recta ($S = S' = \mathbf{R}$):

- *grupo de las traslaciones*: $\sigma(x) = x+a$, $a \in \mathbf{R}$ (conserva longitudes).

- *grupo de las homotecias*: $\sigma(x) = mx$, $m \neq 0$, $m \in \mathbf{R}$ (conserva proporciones, y tiene un punto fijo)

- *grupo afín*: $\sigma(x) = ax+b$; $a \neq 0$; $a,b \in \mathbf{R}$ (conserva proporciones).

- El conjunto de transformaciones dado por $\sigma(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $a,b,c,d \in \mathbf{R}, ad-bc \neq 0$, conserva razones dobles. Si extendemos la recta con su punto impropio o infinito (que tomamos como imagen de $x = \dfrac{-d}{c}$), obtenemos un grupo de transformaciones, el *grupo de las proyectividades.*

En estos ejempos, el grupo proyectivo contiene al grupo afín, y las homotecias y traslaciones son casos particulares de éstas, para $m = 1$ y $a = 0$, respectivamente.

## Transformaciones topológicas, proyectivas, afines y métricas. Invariantes. Representación matricial. Parámetros. Propiedades.

### Transformaciones topológicas.

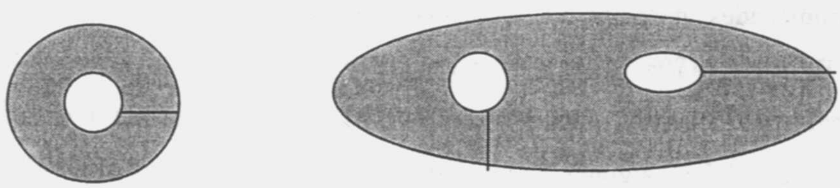
Para analizar las transformaciones en el plano, y los invariantes relacionados con ellas, comenzaremos con el caso más general, las *transformaciones topológicas*. A mediados del siglo XIX comenzó un desarrollo en geometría que tenía que ver con aquellas propiedades invariantes aun después de deformaciones que no preservan ni propiedades métricas ni propiedades proyectivas. A.F. Moebius (1790-1868), J.B.Listing (1808-1882) y Riemann (1826-1866) fueron algunos de los primeros y más importantes exponentes de estudios en topología. Aunque su desarrollo es de los últimos siglos, algunas propiedades topológicas ya eran conocidas en tiempos remotos, por ejemplo, una fórmula que relaciona vértices, aristas y caras de poliedros, observada por Descartes en 1640 y redescubierta y usada por Euler en 1752, aunque recién Poincaré la reconoció como uno de los teoremas centrales de la topología.

Llamamos *transformaciones topológicas* a las transformaciones biunívocas que son continuas en ambas direcciones. Esto hace que, si la distancia entre dos puntos, por ejemplo de una curva, se achica, entonces la distancia entre sus imágenes también se achica. No conservan rectas, ni ángulos ni longitudes. Un ejemplo son las deformaciones (por ejemplo cuando inflamos un globo, o cuando deformamos una lámina de caucho). Queremos buscar algunas propiedades invariantes por este tipo de transformaciones, es decir, *invariantes topológicos*.

Consideremos por ejemplo un disco A, y la región B encerrada entre dos circunferencias concéntricas. Cualquier curva cerrada contenida en el dominio A puede contraerse a un punto sin salirse del dominio, lo que no es cierto para el dominio B.


(Fig.1)

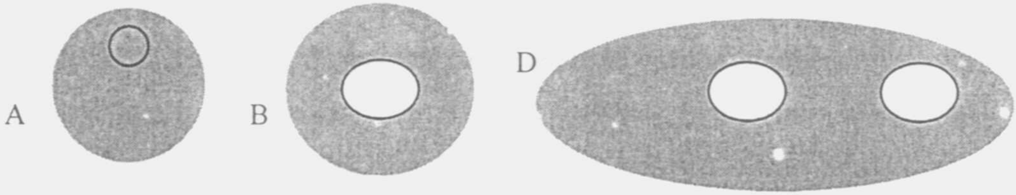
Un dominio tal que cualquier curva cerrada contenida en él puede contraerse a un punto sin salirse del dominio se llama *simplemente conexo*. Si un dominio no es simplemente conexo, para cada "hueco" podemos hacer un corte hasta el borde que lo convierte en simplemente conexo.



(Fig. 2)

*El número de cortes necesarios para transformar un dominio en simplemente conexo es un invariante topológico.*

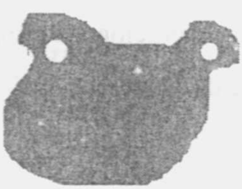
Consideremos tres superficies cerradas (es decir con dos lados):




(Fig.3)

Una curva *C* separa la esfera A en dos partes (disconexas), es decir, existen 2 puntos tales que, cualquier curva que los une debe cortar a *C*. En el toro B, encuentro una curva *C* que no hace lo mismo, ya que cualesquiera dos puntos del toro los puedo unir con una curva que no corte a *C*. En la superficie D, puedo encontrar dos curvas $C_1$ ,$C_2$ que no separan la superficie, mientras que tres curvas que no se cortan la separarían. Se llama *género* de una superficie al mayor número de curvas cerradas simples que no se intersecan y pueden trazarse sin que separen a la superficie.
Por ejemplo: El género de la esfera es 0, del toro es 1 y de la superficie D es 2. Si a una esfera le añadimos un toro, decimos que se le ha añadido un asa. Se puede demostrar que toda superficie cerrada (de las que llamaremos "orientables") de género **p** es topológicamente equivalente a una esfera con **p** asas añadidas. *El género también es un invariante topológico.*

(Fig.4)



La *característica de Euler* de una superficie es V-A+C = 2-2**p** donde **p** es el género de la superficie. En el caso de la esfera, como p = 0, resulta V-A+C=2, y en el caso de un poliedro simple, como éste es topológicamente equivalente a una esfera, también vale que V-A+C=2. Decimos que una esfera con **p** asas tiene característica de Euler N=2(1-p). *La característica de Euler también es un invariante topológico (sólo depende del género).*

Otro ejemplo de teoremas topológicos son los teoremas de punto fijo, por ejemplo, el *teorema del punto fijo de Brouwer.* Para el círculo se enuncia: Sea K un círculo cerrado y $\mathbf{j}:\mathbf{K}\rightarrow\mathbf{K}$ una transformación continua de **K** en **K**, entonces **j** tiene al menos un punto fijo (es decir, existe $\mathbf{k}\in\mathbf{K}$ / $\mathbf{j(k)=k}$).

Muchos resultados sorprendentes pueden deducirse del teorema del punto fijo, por ejemplo:

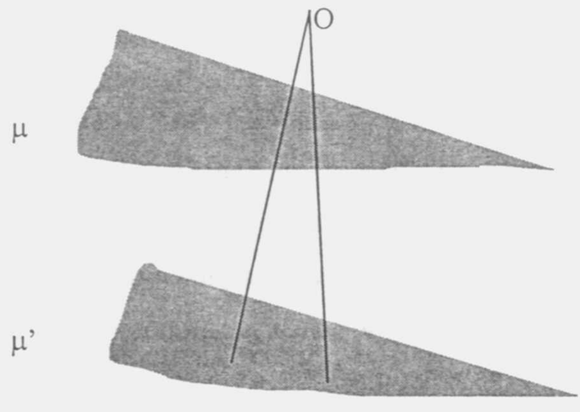
- si revolvemos el café -antes en reposo- en una taza, cuando el líquido vuelve a alcanzar el reposo, al menos una partícula de líquido ocupa el mismo lugar que antes;
- el viento no puede estar soplando simultáneamente en todos los lugares de la Tierra; en cada instante debe haber al menos un punto en reposo sobre la superficie de la Tierra.

**Transformaciones proyectivas.**

La imagen plasmada por un pintor sobre una tela puede considerarse como la proyección del original sobre el plano de la misma, siendo el ojo del pintor el centro de la proyección. A pesar de que tanto las longitudes como los ángulos se alteran necesariamente, en general se puede reconocer en la tela la estructura geométrica del original. Esto tiene que ver con que las alteraciones se producen en alguna forma que depende de las posiciones relativas de de los diversos objetos pintados, manteniendo invariantes en la proyección algunas propiedades que permiten hacer la identificación. Estos son los *invariantes proyectivos*.

Este tipo de cuestiones ya fue analizado por los artistas del Renacimiento. Leonardo da Vinci (1452-1519), pintor, escultor, ingeniero, arquitecto y hombre de ciencia italiano, llevaba a cabo cierta investigación que le permitiera dotar a su trabajo de una base teórica, entre otras cosas sobre perspectiva. Albrecht Duerer (1471-1528) publicó en 1525 una obra de geometría práctica que contiene, además de numerosas construcciones útiles para los artistas, numerosas ideas geométricas originales. La geometría proyectiva como tal, fue inventada por Gérard Désargues (1593-1661), pero mucho antes de que se hubiese decubierto un grupo proyectivo se conocían diversas propiedades proyectivas (Menelao, Pappus). En su obra "Brouillon project d'une atteinte aux événements des recontres du cone avec un plan" Désargues trabaja sobre las secciones cónicas; su enfoque se centra también en la perspectiva. Expesa el paralelismo en en términos de elementos en el infinito, en el plano y en el espacio. La primer sistematización de la geometría proyectiva, sin embargo, debió esperar un siglo y medio a J.V.Poncelet.

Supongamos en $R^3$ dos planos ($\mu$ y $\mu'$), no necesariamente paralelos, y proyectemos uno sobre otro desde un punto O exterior a ambos.




(Fig.5)

Para poder incluir a la proyección paralela como un caso particular de este tipo de transformaciones, consideremos el espacio ampliado por tantos puntos como direcciones hay en él. Cada uno de estos puntos "agregados", que llamaremos puntos impropios o del infinito, es la intersección de todas las rectas que tienen la dirección definida por el punto (es el punto en que se cortan las paralelas). La unión de todos estos puntos es una recta, llamada la recta impropia.

En este espacio proyectivo, la proyección paralela resulta una proyección con centro impropio. Llamaremos *transformación proyectiva* a cualquier sucesión finita de estas proyecciones. Se puede reconocer rápidamente que:

- una recta se proyecta sobre una recta
- rectas coincidentes se proyectan sobre rectas coincidentes
- si un punto está en una recta, su imagen estará en la recta imagen.

Es decir, *incidencia, concurrencia y colinealidad son invariantes proyectivos.*

Como consecuencia de ello, polígono (y su número de lados) es un concepto proyectivo. Triángulo es un concepto proyectivo, pero triángulo equilátero no lo es. Tampoco la proporcionalidad de segmentos es un invariante proyectivo (dados A,B,C sobre una recta, en general la proyección no sólo cambia AB y BC, sino también la relación AB/BC). En cambio si dados 4 puntos A,B,C,D, definimos la razón doble entre ellos dados en un cierto orden, como

$$(ABCD) = CA/CB : DA/DB$$

esta relación sí resulta invariante. *La razón doble es un invariante proyectivo.*

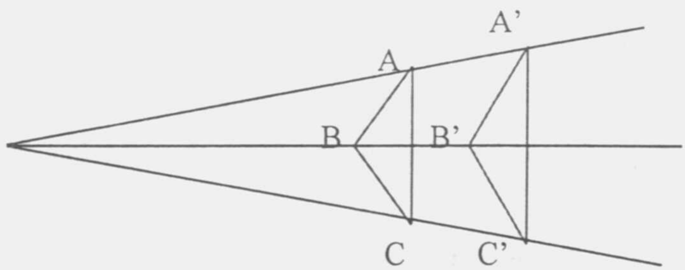
[Usando el teorema del seno, se puede ver que la razón doble sólo depende de los ángulos subtendidos desde el centro de la proyección sobre cada uno de los segmentos involucrados, que es el mismo para los segmentos proyectados. Para la proyección paralela sale directamente. Si le ponemos signo (tomando coordenadas sobre la recta) es sencillo verificar que se conserva el signo, porque se conserva la posición relativa.]

Una definición intrínseca de *transformaciones proyectivas* o *colineaciones* se obtiene definiéndolas como las transformaciones biunívocas (entre planos) que conservan razones dobles. A partir de ello se puede probar que mandan puntos alineados en puntos alineados.

Otro concepto proyectivo es el de cónica, ya que cualquier cónica es la proyección, con centro en el centro del cono, de una circunferencia. Es decir, todas *las cónicas son proyectivamente equivalentes.*

Uno de los teoremas fundamentales de la geometría proyectiva, cuya demostración muestra cómo manejarse en este ámbito, es el *Teorema de Desargues*: "Si dos triángulos de un mismo plano son tales que las rectas que unen vértices homólogos concurren en un punto, entonces los lados homólogos se cortan en puntos alineados."

Para demostrarlo, consideremos el siguiente gráfico y apliquemos una transformación proyectiva que mande, respectivamente P y Q a puntos impropios, es decir, que los triángulos imágenes verifiquen AB//A'B' y AC//A'C'. El teorema se reduce ahora a probar que R es un punto impropio.




(fig.6)

para ello, como todos los puntos de los triángulos son propios, hacemos el siguiente razonamiento:

AB // A'B' $\Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{r}{s}$, y AC//A'C' $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{r}{s}$. Entonces, $\frac{u}{v} = \frac{x}{y}$, de donde BC//B'C', es decir, R es impropio.

Si nos restringimos al plano euclídeo, podemos definir las transformaciones proyectivas utilizando coordenadas (como hicimos en la recta). Como queremos que manden rectas en rectas, llamamos P={proyectividades}, al conjunto de transformaciones del plano que tienen ecuaciones

$$x'_1 = \frac{ax_1 + bx_2 + c}{px_1 + qx_2 + r}, \quad x'_2 = \frac{dx_1 + ex_2 + f}{px_1 + qx_2 + r}$$

con la condición que el determinante de la matriz de los coeficientes, A, sea distinto de 0, donde $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix}$. En el plano euclídeo, la proyectividad no está definida para la recta $px_1 + qx_2 = 0$, de modo que no es biyectiva. En el plano proyectivo, esta recta tiene como imagen la recta impropia (y las transformaciones proyectivas forman grupo).

De las ecuaciones, podemos deducir que las proyectividades o colineaciones tienen 8 parámetros (numerador y denominador pueden dividirse por un coeficiente no nulo). A partir de ello, resulta que quedan determinadas por 4 puntos (no alineados de a tres) y sus homólogos [cada punto y su homólogo nos provee de dos ecuaciones].

### Transformaciones afines.

Si ahora nos quedamos, de entre todas las transformaciones proyectivas con aquéllas que tienen unida (no de puntos unidos) a la recta impropia (es decir las que mandan puntos propios en puntos propios y puntos impropios en puntos impropios), obtenemos las *transformaciones afines* o *afinidades*. Si tenemos dos rectas paralelas entre sí, su intersección es un un punto impropio, la imagen de este punto es otro punto de la recta impropia, de modo que las rectas imágenes también son paralelas entre sí.

Esto nos dice que *el paralelismo es un invariante afín.* También son conceptos afines los paralelogramos, las razones simples, los puntos medios de segmentos y las medianas de los triángulos.

Llamamos A={afinidades} al conjunto de transformaciones del plano que responden a las ecuaciones

$$x_1' = ax_1 + bx_2 + c$$
$$x_2' = dx_1 + ex_2 + f$$
$$ae-bd \neq 0$$

(siempre en el plano euclídeo. Desaparecen los denominadores porque no podemos mandar una recta propia en la impropia). Este es un grupo de transformaciones.

Tienen 6 parámetros (quedan determinadas por 3 puntos y sus homólogos, las dos ternas no alineadas). La razón simple de tres puntos alineados, dados en un cierto orden, se define como

$$(PQR) = PQ/PR$$

Escrito usando las abcisas de las proyecciones sobre una recta, esto será

$$(x_P, x_Q, x_R) = \frac{x_Q - x_P}{x_R - x_P}.$$

Entonces,

$$(x'_P, x'_Q, x'_R) = \frac{x'_Q - x'_P}{x'_R - x'_P} = \frac{(ax_Q + c) - (ax_P + c)}{(ax_R + c) - (ax_P + c)} = \frac{a(x_Q - x_P)}{a(x_R - x_P)} = (x_P, x_Q, x_R)$$

Como conservan razones simples, en particular conservan los puntos medios de los segmentos. Además, como dos triángulos cualesquiera son siempre afinmente equivalentes (existe una afinidad que manda uno en otro), la "forma" de los triángulos no es una propiedad afín. Esto nos permite, por ejemplo, demostrar cualquier propiedad afín para triángulos sobre los triángulos equiláteros. (por jemplo, la de las medianas). Es decir, el hecho que "en todo triángulo equilátero las medianas se cortan en un punto que divide a cada una de ellas en la proporción 1:2", siendo *triángulo, mediana y proporción* conceptos afines, nos permite afirmar que "en todo triángulo las medianas se cortan en un punto que divide a cada una de ellas en la proporción 1:2".

[Dado un triángulo cualquiera, definimos la afinidad A que lo manda a un triángulo equilátero. En éste construimos las medianas ara las que conocemos la propiedad. Como $A^{-1}$ manda las medianas del triángulo equilátero en las medianas del triángulo dado y, por ser una afinidad, manda el punto de intersección en el punto de intersección, manteniendo las proporciones, la propiedad vale para el triángulo dado.]

Si adoptamos la siguiente notación matricial: $A = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, y para los vectores columna $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, X' = \begin{vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} c \\ f \end{vmatrix}$, las ecuaciones de la afinidad se reducen a $X'=AX+B$, con la condición $\det.\{A\}\neq 0$. Este determinante es el módulo de la afinidad. Se puede probar que el área de la figura imagen es el área de la figura original multiplicada por el módulo de la afinidad.

Si consideramos la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{e^2}=1$, la afinidad definida por las ecuaciones $x' = \frac{x}{a}$; $y' = \frac{y}{e}$, la transforman en la circunferencia de radio 1. El área del círculo ($\pi$), será el área F de la elipse por el determinante de la afinidad, es decir,

$$\pi = \frac{F}{ae}$$

El área de la elipse de semiejes a y e vale, por ello, $F=\pi ae$.

**Transformaciones métricas o isometrías.**

Las isometrías son las colineaciones que conservan longitudes.

Es decir, si tomamos los puntos $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$, $Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$, sabemos calcular el cuadrado de la distancia entre X e Y como $(X-Y)^t(X-Y)$.

Como la distancia entre las imágenes debe ser la misma, resulta

$$(X-Y)^t A^t A(X-Y) = (X-Y)^t(X-Y), \text{ de donde } A^tA=Id.$$

Las matrices que multiplicadas por su traspuesta dan la identidad se llaman *matrices ortogonales*. Para matrices ortogonales es $\det A=1$ ó $\det A= -1$. Las isometrías son un subgrupo de las afinidades.

Desarrollando, resultan sobre los coeficientes las condiciones

$$a^2 + p^2 = b^2 + q^2 = 1 \text{ y } ab + pq =0$$

Utilizando senos y cosenos (ya que la primera es una relación pitagórica), resulta que las matrices asociadas a las isometrías son $A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ o bien

$A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$. La primera tiene determinante igual a 1, responde a los movimientos llamados propios, como por ejemplo las rotaciones. La segunda tiene determinante igual a -1, responde a los movimientos impropios como por ejemplo las simetrías axiales.

El conjunto de movimientos del plano tiene 3 parámetros, conserva distancias y ángulos, y los movimientos pueden clasificarse en directos o inversos según sea positivo o negativo el determinante de la matriz asociada.

Las tralaciones son las afinidades que tienen A=Id. Su ecuación será X'=X+B. Las traslaciones son un caso particular de movimiento rígido o isometría, tienen 2 parámetros y forman grupo.

En realidad, como a las isometrías sólo les pedimos que conserven distancias, debemos probar que también conservan ángulos.

Para ello, consideremos un ángulo $\alpha$ y sobre cada uno de sus lados un punto distinto del vértice O ($\alpha = A\hat{O}B$ ). Una isometría mandará el triángulos AOB en un triángulo A'O'B' congruente con él (ya que dos triángulos que tienen sus 3 lados congruentes, son congruentes), es decir al ángulo $\alpha$ en el A'O'B' congruente con él.

Pero la recíproca no es cierta, es decir que podemos considerar transformaciones que conserven ángulos pero no necesariamente distancias.

**Semejanzas**

Si conserva ángulos (o si conserva ángulos rectos, o si manda circunferencias en circunferencias) es una semejanza (y manda paralelas en paralelas, así que es una afinidad). Las semejanzas sí conservan las formas (pero no el tamaño), así que no las áreas (el módulo de la afinidad es el cuadrado de la razón de semejanza). Además conserva la proporcionalidad de los lados.

Las semejanzas, es decir las transformaciones del plano que conservan ángulos, se obtienen con las ecuaciones $X'=\lambda AX+B$, con A una matriz ortogonal, y $\lambda\neq 0$ una constante llamada la razón de semejanza. Tienen 4 parámetros y conservan ángulos. También son un subgrupo de las afinidades

**Trabajo práctico**

**1.** ¿Conoce distintas maneras de clasificar las geometrías? ¿Cuáles?

**2.** ¿En qué siglo y asociadas a qué nombres se desarrollaron la geometría proyectiva y las geometrías no euclidianas? ¿En qué se diferencian de la geometría de Euclides?

**3.** ¿En qué época vivió Félix Klein? ¿De qué nacionalidad era? ¿Vivió antes o después que Galois? ¿Por qué se lo relaciona con la didáctica de la matemática?

**4.** ¿Qué es el "Programa de Erlangen"? ¿Puede describir brevemente la clasificación de las geometrías que incluye? ¿Qué tiene de diferente respecto de clasificaciones anteriores?

**5.** ¿Qué es un grupo y qué es un grupo de transformaciones?

**6.** Pruebe que el conjunto de las afinidades sobre la recta, es decir el conjunto de transformaciones de **R** en **R** definido como $\sigma(x) = ax+b$; $a \neq 0$; $a,b \in \mathbf{R}$, es un grupo de transformaciones y que conserva proporciones.

**7.** ¿Por qué el conjunto de transformaciones proyectivas de **R** en **R**, dado por $\sigma(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $a,b,c,d \in \mathbf{R}$, $ad-bc\neq 0$ no es un grupo de transformaciones?

**8.** ¿Qué son las transformaciones topológicas? Los movimientos rígidos del plano (simetrías, rotaciones y traslaciones), ¿son transformaciones topológicas? ¿Por qué?

**9.** ¿A qué llamaría un invariante topológico? Nombre dos invariantes topológicos. El paralelismo, ¿es un invariante topológico? ¿Por qué?

**10.** ¿Cómo definiría una transformación proyectiva del plano? Nombre algún invariante proyectivo. El paralelismo, ¿es un invariante proyectivo? ¿Por qué?

**11.** ¿Cómo justificaría que las cónicas son todas proyectivamente equivalentes?

**12.** ¿Por qué las afinidades son un subconjunto de las proyectividades? El paralelismo, ¿es un invariante afín? ¿Por qué?

**13.** Demuestre que la mediana de un triángulo es un concepto afín.

**14.** Una elipse y una circunferencia, ¿son siempre afínmente equivalentes? ¿Por qué?

**15.** ¿Cómo se puede probar que las afinidades tienen 6 parámetros? ¿Cómo se deduce de ello que una afinidad queda determinada por 3 puntos y sus homólogos, las dos ternas no alineadas?

**16.** Encuentre los valores de α, b y c para que la transformación X'=AX+B, con $A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ sea una rotación de 30°, y para que sea una traslación según el vector (2,3).

**17.** Encuentre los valores de α, b y c para que la transformación X'=AX+B, con $A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$ sea una simetría axial respecto del eje de las ordenadas.

**18.** Pruebe que las homotecias son un caso particular de semejanzas. ¿Qué relación hay entre la razón de la homotecia y el módulo de la afinidad definida por la semejanza correspondiente? Justifique.

**19.** Pruebe que para que dos exágonos sean semejantes basta con pedirles que tengan 5 ángulos respectivamente congruentes y 4 lados respectivamente proporcionales. ¿Bastaría con pedirles 4 ángulos congruentes y 4 lados proporcionales? ¿Y 5 ángulos congruentes y 3 lados proporcionales? ¿Y 4 ángulos congruentes y 5 lados proporcionales?

**20.** Hallen la afinidad que manda el paralelogramos de vértices (1,1),(3,1),(2,2),(4,2) en el cuadrado de vértices (0,0),(1,0),(0,1),(1,1).

**Relaciones con los contenidos de EGB3 y Polimodal.**

La idea en este apartado no es hacer un listado exhaustivo de aquellos contenidos que puntualmente utilizan o necesitan de este desarrollo, sino mostrar una manera diferente de conocer o definir las relaciones entre objetos geométricos a partir de las transformaciones geométricas y la clasificación desarrollada.

Por ejemplo, las transformaciones geométricas que tradicionalmente se trabajan en la escuela son los movimientos rígidos (las isometrías) y las homotecias. Los movimientos rígidos mandan una figura en otra congruente con ella, y las homotecias mandan una figura en otra semejante con ella. ¿Qué relación tienen las homotecias con las semejanzas como transformaciones? Podemos decir que, en el plano euclídeo, toda semejanza es composición de una homotecia con una isometría. Esto es inmediato si analizamos la escritura matricial desarrollada, ya que las semejanzas son las transformaciones de ecuación $X'=\lambda AX+B$, con A una matriz ortogonal, y $\lambda\neq 0$ una constante llamada la razón de semejanza, que podemos escribir como $X'=\lambda[AX+B/\lambda]$.

Otra mirada que tiene que ver con los contenidos es que a partir de estas transformaciones podemos definir relaciones entre figuras. Definimos que dos figuras del plano son *congruentes* si existe una isometría que manda una en otra. Dos figuras se definen como *semejantes*, si existe una semejanza que manda una en otra. ¿Qué ventajas tiene esta definición sobre la tradicional, que utiliza relaciones entre ángulos y lados? Por ejemplo:

- Sirven para cualquier figura y no sólo para polígonos. Si definimos que dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos congruentes y sus lados proporcionales, ¿qué sentido tiene decir que dos círculos siempre son semejantes? ¿O cuándo dos círculos son congruentes? Debemos dar nuevas definiciones para estas u otras figuras.

- Algo parecido sucede cuando queremos extender las definiciones de congruencia y semejanza al espacio.
- Para las semejanzas en particular, salvo para el caso de triángulos, en que nos basta pedir que se conserven los ángulos, ya que dos triángulos con ángulos respectivamente congruentes siempre tienen sus lados proporcionales; en polígonos con mayor número de lados debemos pedir que los lados homólogos sean proporcionales (en realidad, basta con pedir n-1 ángulos congruentes y n-2 lados proporcionales). Por ejemplo un cuadrado y un rectángulo no cuadrado tienen los mismos ángulos, pero sus lados no son proporcionales. Si utilizamos las semejanza como función para definir la relación, como se conservan todos los ángulos, también se conservan los formados por los lados y las diagonales, o los formados por las diagonales entre sí, de donde se puede deducir la proporcionalidad de los lados.

Cuando los CBC de EGB3 nos hablan de "propiedades globales" de los movimientos rígidos, están haciendo referencia a los invariantes (en este caso, longitudes, formas y ángulos). Otros contenidos (de EGB3 y Polimodal) que podemos mencionar son:

- Identificación y construcción de figuras semejantes o congruentes. [Para las construcciones es importante saber qué debemos reproducir; por ejemplo, para saber si nos bastan los datos, si hay una o más soluciones, etc.]
- Utilización de propiedades de los movimientos para clasificar, generar y analizar figuras.
- Denominación, explicación y definición de conceptos, relaciones y propiedades, utilizando el vocabulario adecuado.
- Verificación de si las herramientas que se tienen son suficientes para la resolución del problema. Generalización de soluciones y resultados.

- Realización de demostraciones matemáticas sencillas. Interpetación y representación de conceptos y relaciones en distintos marcos.
- Cónicas. Resolución de ecuaciones. Modelización.
- Elaboración de definiciones.
- Relaciones, generalizaciones, particularizaciones y aplicaciones de resultados.
- Relaciones entre representaciones.

**Bibliografía**


- Boyer, C. – *Historia de la Matemática* – Alianza, Madrid, 1985
- Courant, R. y Robbins, H. - *¿Qué es la Matemática?* –Aguilar, Madrid, 1955
- Santaló, L. – *Geometría en la formación de profesores* – Red Olímpica, Buenos Aires, 1993
- Santaló, L. – *Geometría Proyectiva* –Eudeba, Buenos Aires, 1955.



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Pabellón I. Ciudad Universitaria. 1428- Buenos Aires.