Matrices y determinantes

Traducido por María Isabel Viggiani Rocha

El comienzo del estudio de matrices y determinantes se remonta al segundo siglo A.C., aunque algunos trazos pueden encontrarse en el cuarto siglo A.C.. Sin embargo no es hasta cerca del fin del siglo XVII que estas ideas reaparecen y se desarrollan realmente a partir de ese momento.

No es sorprendente que el comienzo del estudio de matrices y determinantes pudo originarse en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Los babilonios estudiaron problemas los cuales inducen a ecuaciones lineales simultáneas y algunos de ellos son guardados en tablas de arcilla , las cuales existen. Por ejemplo una tabla fechada alrededor de 300 años A.C. contiene el siguiente problema:

> *Hay dos campos cuya área total es de 1.800 yardas cuadradas. Uno produce granos a razón de 2/3 de bushel por yarda cuadrada [(1)], mientras que el otro produce granos a razón de 1/2 bushel por yarda cuadrada. Sistema el total producido es 1.100 bushels, ¿cuál es la medida de cada campo?*

Los chinos, entre 200 A.C. y 100 A.C., estuvieron mas cerca del concepto de matriz que los babilonios. Verdaderamente es claro decir que el texto *Nueve capítulos del arte matemático* escrito durante la dinastía de los Han, ofrece el primer ejemplo conocido de métodos sobre matrices. Un primer problema aparece siendo similar al ejemplo babilonio antedicho:

> *Hay tres tipos de granos, de los cuales tres haces del primero, dos del segundo y uno del tercero pesan 39 medidas. Dos del primero, tres delsegundo y uno del tercero suman 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en un haz de cada tipo?*

Ahora el autor hace algo completamente interesante. El dará los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas como una tabla sobre un "tablero contable".

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

En nuestro siglo XX el método llega a nosotros escribiendo las ecuaciones lineales como las filas de la matriz más bien que como las columnas, pero la aplicación del método es idéntica. Más interesantemente el autor, escribiendo en el 200 A.C., instruye al lector a multiplicar la columna del medio por 3 y restar la columna de la derecha *tantas veces como sea posible*, lo mismo ocurre después sustrayendo la columna de la derecha *tantas veces como sea posible* de 3 veces la primera columna. Esto nos da

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

(1) bushel = medida de áridos equivalente en Inglaterra a 36,35 litros y en E.E.U.U. a 35 litros

Luego la nueva columna de la izquierda es multiplicada por 5 y después la columna del medio es sustraída *tantas veces como sea posible*. Esto nos da

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

desde la cual se puede encontrar la solución para el tercer tipo de grano, luego para el segundo, después para el primero por sustitución hacia atrás. Este método, ahora se conoce como eliminación de Gauss (o gaussiana), lo cual no fue conocido hasta principios del siglo XIX

Cardano, in *Ars Magna* (1.545) da las reglas para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, el cual lo llamó *regula de modo*, el que se transformó en ¡la *regla madre*!. *Esta regla madre* nos dice que esencial es la regla de Cramer para resolver un sistema 2x2, aunque Cardano no da el paso final. Cardano no alcanza la definición de determinante pero, en una mirada retrospectiva, podemos ver que su método induce a la definición.

Algunos resultados estándares sobre la teoría de matrices elementales aparecen largo tiempo antes de las matrices que son objetos de investigaciones matemáticas. Por ejemplo de Witt en *Elementos de curvas*, publicado como una parte de los comentarios sobre la versión en latín (1.660) de la *Geometría de Descartes*, muestra que una transformación de los ejes reduce a dar una ecuación de una cónica dada en su forma canónica. Esto se logra diagonalizando una matriz simétrica pero de Witt nunca pensó en estos términos.

La idea de determinante aparece en Japón y Europa casi exactamente al mismo tiempo aunque Seki en Japón ciertamente publicó primero. En 1.683 Seki escribió *Método de resolver los problemas disimulados*, el cual contiene métodos sobre matrices escritos como tablas exactamente en la forma que los métodos chinos descriptos anteriormente son construidos. Sin tener ninguna palabra que corresponda a "determinante" Seki sin embargo introduce determinantes y dio un método general para calcularlos basados en ejemplos. Usando sus "determinantes" Seki pudo encontrar determinantes de matrices 2x2, 3x3, 4x4 y 5x5 y los aplicó para resolver ecuaciones pero no sistemas de ecuaciones lineales.

Quizás notablemente la primera aparición de un determinante en Europa es también en el mismo año 1.683. En ese año Leibniz escribió a de L'Hôpital. Leibniz explicaba el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}10 + 11x + 12\,y = 0\\20 + 21x + 22\,y = 0\\30 + 31x + 32\,y = 0\end{aligned}$$

tenía una solución porque

$$10.21.32 + 11.22.30 + 12.30.31 = 10.22.31 + 11.20.32 + 12.21.30$$

lo cual es exactamente la condición de que la matriz de los coeficientes tiene determinante **0**. Nótese que acá no está usando numéricos, pero

> *dos caracteres, el primero marcando en qué ecuación ello ocurre y el segundo que letra representa.*

En consecuencia 21 denota que podríamos escribir como un a_{21}.

Leibniz estuvo convencido que una buena notación matemática sería la llave del progreso aunque él experimentó diferentes caminos de escritura para coeficientes de sistemas con los cuales había trabajado durante un período de 50 años comenzando en 1.678. Solo dos publicaciones (1.700 y 1.710) contienen resultados sobre coeficientes de sistemas y estos usan la misma notación que en su carta a de L'Hôpital mencionada anteriormente.

Leibniz usó la palabra "resultante" para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante. El probó varios resultados sobre resultantes comprendiendo que es la regla de Cramer esencialmente. También conoció que un determinante podrá ser expandido usando cualquier columna, lo cual es ahora llamado, la expansión de Laplace. Así como había estudiado coeficientes de sistemas de ecuaciones, los cuales lo indujeron hacia los determinantes, Leibniz también estudió los coeficientes de formas cuadráticas los cuales lo indujeron naturalmente hacia la teoría de matrices.

Alrededor de 1.730 Mac Laurin escribió *Tratado de álgebra*, sin embargo no fue publicado hasta 1.748, dos años después de su muerte. Este contiene los primeros resultados publicados sobre determinantes provenientes de la regla de Cramer para sistemas 2x2 y 3x3 e indicaciones como el caso 4x4 debe ser trabajado. Cramer dio una regla general para sistemas nxn en un trabajo llamado *Introducción para el análisis de curvas algebraicas* (1.750). El cual originó el deseo de encontrar la ecuación de una curva plana que pase a través de un número de puntos dados. La regla de Laplace aparece en un Apéndice de dicho trabajo pero no dio ninguna demostración:

> *Uno encuentra el valor de cada incógnita por la formación de n fracciones cuyos común denominador tiene tantos factores como hay permutaciones de n cosas.*

Cramer continúa explicando precisamente como se calcula esos factores como producto de algunos coeficientes en las ecuaciones y como se determina el signo. También se dice como los n numeradores de las fracciones pueden ser encontrados remplazando ciertos coeficientes en esos cálculos por factores constantes del sistema.

Trabajos sobre determinantes comenzaron a aparecer regularmente a partir de este momento. En 1.764 Bezout dio métodos para calcular determinantes como lo hizo Vandermonde en 1.771. En 1.772 Laplace demandó que los métodos introducidos por Cramer y Bezout eran impracticables y, en un trabajo donde estudió las órbitas de los planetas, discutió la solución de sistemas de ecuaciones lineales sin realmente calcularla. Quizás sorprendentemente Laplace usó la palabra "resultante" para lo que llamamos ahora determinantes: sorprendente puesto que es la misma palabra usada por Leibniz, sin embargo Laplace debe haber ignorado el trabajo de Leibniz.

Laplace dio la expansión de un determinante el cual es ahora nombrado después de él.

Lagrange, en un trabajo de 1.773, estudió identidades para determinantes funcionales de 3x3. De cualquier modo este comentario es hecho con mirada retrospectiva desde que Lagrange, él mismo observó la no conexión entre su palabra y la de Laplace y Vandermonde. Este Trabajo sobre mecánica (1.773), contiene lo que conocemos ahora de la interpretación de un determinante como volúmen. Lagrange mostró que el tetraedro formado por O(0,0,0) y 3 puntos M(x,y,z), M'(x',y',z') M"(x",y",z") tiene volumen de:

$$\frac{1}{6}[\, z(x'y''-y'z'') + z'(yx''-xy'') + z''(xy'-yx')]$$

El término "determinante" fue por primera vez introducido por Gauss en *Disquisitiones arithmeticæ* (1.801) mientras discutía sobre formas cuadráticas. Sin embargo el concepto no es el mismo que el de nuestro determinante. En el mismo trabajo Gauss escribe los coeficientes de sus formas cuadráticas en un arreglo rectangular. Describe la multiplicación de matrices (la cual él piensa que es una composición, puesto que aún no se había extendido el concepto de álgebra de matrices) y la inversa de una matriz en el particular contexto de los arreglos de coeficientes de formas cuadráticas. La eliminación de Gauss, la cual aparece por primera vez en el texto *Nueve capítulos del arte matemático* escrito 200 A.C., fue usado por Gauss en este trabajo, en el cual estudió la órbita del asteroide Pallas. Usando observaciones de Pallas tomadas entre 1.803 y 1.809, Gauss obtiene un sistema de 6 ecuaciones lineales en 6 incógnitas. Gauss dio un método sistemático para resolver tales ecuaciones, con las cuales es necesaria la eliminación de Gauss sobre los coeficientes de la matriz.

Fue Cauchy en 1.812 quien usó "determinante" en el sentido moderno. El trabajo de Cauchy es el más completo de los primeros trabajos sobre determinantes. Reprobó los primeros resultados y dio nuevos resultados de su propiedad sobre menores y adjuntos. En el 1.812 el teorema sobre multiplicación de determinantes es probado por primera vez aunque, en el mismo encuentro en el Instituto de Francia, Binet también leyó un trabajo que contenía una prueba sobre el teorema de multiplicación pero fue menos satisfactorio que el ofrecido por Cauchy.

En 1.826 Cauchy en el contexto de las formas cuadráticas en n variables, usó el término "tableau" para la matriz de los coeficientes. Encontró los valores propios y dio resultados sobre diagonalización de una matriz en el contexto de convertir una forma en suma de cuadrados. Cauchy también introdujo la idea de matrices semejantes (pero no el término) y mostró que si dos matrices son semejantes, ellas tienen la misma ecuación característica: Además, nuevamente en el contexto de formas cuadráticas, probó que cada matriz simétrica real es diagonalizable.

Jacques Sturm dio una generalización del problema de los valores propios en el contexto de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En realidad el concepto de un valor propio apareció 80 años antes, nuevamente en trabajos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, con D'Alembert estudiando el movimiento de una cuerda con pesas adheridas en varios puntos.

Sin embargo, estarían en aprietos pues ni Cauchy ni Jacques Sturm realizaron la generalización de las ideas que ellos introdujeron y vieron solamente en los contextos específicos en los cuales habían trabajado. Jacobi desde alrededor del 1.830 y luego Kronecker y Weierstrass en los años siguientes a 1.850 y 1.860 también estudiaron los resultados sobre matrices pero nuevamente en un contexto especial: esta vez usando la noción de una transformación lineal. Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes en 1.841. Fueron muy importantes porque fue la primera vez que la definición de determinantes fue hecha usando una forma algorítmica y las entradas en los determinantes no fueron especificadas, por lo tanto fueron igualmente bien aplicados a casos donde las entradas eran números o bien donde eran funciones. Estos tres trabajos de Jacobi dan la idea de un determinante holgadamente conocido.

Cayley, también escribiendo en 1.841, publicó la primera contribución inglesa a la teoría de determinantes. En este trabajo usó dos líneas verticales a los lados del arreglo para denotar el determinante, una notación la cual se convirtió ahora en estándar.

Einsenstein en 1.844 denotó a las sustituciones lineales con solo una letra y mostró que al sumarlas y multiplicarlas parecían números ordinarios excepto por la falta de conmutabilidad. Esto claramente nos permite decir que Einsenstein fue el primero en pensar sobre las sustituciones lineales de la misma forma que en álgebra, lo cual se puede ver en esta cita extraída de su trabajo de 1.844:

> *Un algoritmo para calcular puede basarse en esto, consiste en la aplicación de las reglas usuales entre sistemas lineales, ecuaciones simbólicas correctas son obtenidas siempre, la única consideración que se debe hacer es que el orden de los factores no debe ser alterado.*

Cauchy en 1.858 publicó *Memorias sobre teorías de matrices* en la cual está remarcada la inclusión de la primera definición de matriz en forma abstracta. Mostró que los arreglos de coeficientes estudiados anteriormente sobre formas cuadráticas y transformaciones lineales eran casos especiales de su concepto general. Cayley dio las definiciones sobre el álgebra de matrices: suma, producto, multiplicación por un escalar e inversas. Dio una construcción explícita de la inversa de una matriz en términos del determinante de la matriz. Cayley también probó que en el caso de matrices 2x2, esa matriz satisface su propia ecuación característica. Manifestó que había examinado el resultado para matrices 3x3, indicando su prueba, pero dice:

> *No he pensado lo necesario para intentar la labor de una prueba formal del teorema en el caso general de una matriz de cualquier grado.*

Así el hecho de que una matriz satisface su propia ecuación característica, es nombrado como el teorema Cayley –Hamilton. Suena razonable preguntar qué hizo Hamilton. En realidad, probó un caso especial del teorema: el caso 4x4, en el curso de su investigación sobre cuaterniones.

En 1.870 la forma canónica de Jordan apareció en *Tratado sobre sustituciones y ecuaciones algebraicas* de Jordan. Aparece en el contexto de una forma canónica para sustituciones lineales sobre campos finitos de orden primo.

Frobenius en 1.878, escribió un importante trabajo sobre matrices: *Sobre sustituciones lineales y formas bilineales,* aunque se parecía sin dudar a un trabajo de Cayley. Frobenius en este trabajo trata con coeficientes de formas y no usa el término matriz. Sin embargo probó importantes resultados sobre matrices canónicas como representantes de clases equivalentes de matrices. Citó a Kronecker y a Weierstrass como considerando casos especiales de sus resultados en 1.874 y 1.868 respectivamente. Frobenius también probó el resultado general Cayley -Hamilton y después rango de una matriz, la cual usó en su trabajo sobre formas canónicas y la definición de matrices ortogonales.

La nulidad de una matriz cuadrada fue definida por Sylvester en 1.884. El definió la nulidad n(A), de A como el mayor i tal que cada menor de A de orden (n-i+1) es cero. Sylvester estuvo interesado en invariantes de matrices, esto es, propiedad que no varían por algún tipo de transformaciones. Sylvester probó que:

$$\max(n(A), n(B)) \leq n(A.B) \leq n(A) + n(B).$$

En 1.896 Frobenius leyó *Memorias sobre la teoría de matrices* de Cayley (1.858) y allí comenzó a usar el término "matriz". A pesar de que en realidad Cayley sólo probó para matrices 2x2 y 3x3 el teorema Cayley-Hamilton, Frobenius generosamente atribuyó el resultado a Cayley aunque en realidad fue Frobenius el primero en probar el teorema en general.

Una definición axiomática de un determinante fue usada por Weierstrass en sus clases y, después de su muerte, fue publicada en 1.903 en la nota *Sobre la teoría de determinantes*. En el mismo año notas de Kronecker sobre determinantes fueron también publicadas, nuevamente después de su muerte. Con estas dos publicaciones la moderna teoría de determinantes se estableció, pero la teoría de matrices tomó escasamente más tiempo para convertirse en una teoría aceptada completamente. Un texto importante del comienzo, el cual comprometió a las matrices dentro de su propio lugar en la matemática fue *Introducción al álgebra superior* por Bôcher en 1.907. Turnibull y Aitken escribieron textos de influencia en el 1.930 y Mirsky en 1.955: *Una introducción de álgebra lineal*, vislumbró que la teoría de matrices alcanzaría el rol de ser uno de los más importantes tópicos matemáticos.

Bibliografía.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Matrices_and_determinants.htm