Un Enfoque Alternativo de la Enseñanza de las figuras del Plano en la E.G.B.[1]

Rosa Martínez - Marta Porras

En la enseñanza los conocimientos pueden adquirir sentido si se organizan *situaciones didácticas* que permitan un juego efectivo con el *medio* (Brousseau, 1986), donde el sujeto deba decidir, formular y conjeturar[1], ...

La geometría de la escolaridad obligatoria estudia fundamentalmente las figuras, en particular las del plano. Se privilegian acciones tendientes a describir, reproducir y construir polígonos. La economía en la gestión de la enseñanza favorece la *presentación ostensiva.* En esta presentación los argumentos fundamentados en la evidencia sobre la figura sustituyen a las pruebas en las cuales la figura es sólo un soporte.

En este trabajo intentamos reproducir en la enseñanza algunos tópicos de la actividad matemática. Para ello proponemos que el alumno disponga de herramientas que denominamos *"construcciones básicas"*, operaciones elementales con regla no graduada y compás, que al estilo de la escuela griega permiten ampliar el campo de construcciones a todos los problemas de geometría plana previstos en la E.G.B.. En la selección de estas operaciones elementales hemos tenido en cuenta que su utilización favorezca la reflexión sobre las propiedades, las definiciones, etc. involucradas en situaciones de enseñanza. Dichas construcciones son: transporte de segmentos y ángulos (para el primer ciclo podría utilizarse papel); construcción de la mediatriz de un segmento; construcción de la bisectriz de un ángulo; y trazado de rectas paralelas (a través de ángulos congruentes, construcción de mediatrices, etc.).

Observaciones en relación al estado actual de la enseñanza de las figuras del plano

En nuestra experiencia en la formación y actualización de docentes de primero y segundo ciclo de E.G.B. hemos constatado que generalmente los maestros tienen una relación algorítmica con las construcciones geométricas. Esta relación se manifiesta en la enseñanza e impide la simulación de una actividad matemática en ese tipo de problemas. El algoritmo y el *contrato didáctico* que se teje en torno a esos contenidos dan lugar a *interacciones ficticias* de los alumnos con su medio, y ello desvirtúa el sentido de las construcciones geométricas. En esas prácticas ostensivas la confrontación se hace a través de la evidencia perceptiva: la figura obtenida en la construcción es correcta si coincide con la imagen que corresponde a la figura prototípica en cuestión. Es así que las construcciones geométricas se apoyan en la evidencia como fuente de justificación en lugar de elaborar argumentos con las propiedades usadas.

Esas prácticas ostensivas se manifiestan también en la elección de las definiciones. Por ejemplo en un texto de matemática para la escuela primaria[2] se define rectas paralelas como: "Dos rectas que tienen la misma dirección son paralelas". En el texto del que se la extrajo, la "dirección" no está definida; el alumno debe "ver" en dibujos los casos particulares mostrados. Además esta definición no permite tomar decisiones para construir rectas paralelas. En el texto este procedimiento está más adelante y obviamente no está vinculado con la definición. En consecuencia, aún si los alumnos "ven" que dos rectas tienen igual inclinación con respecto a una tercera y verifican que los ángulos correspondientes son congruentes, no infieren que las rectas son paralelas.

Si definimos el paralelismo a través de la congruencia de ángulos correspondientes, ese objeto nuevo exige el funcionamiento de nociones (ángulo, congruencia de ángulos, etc.) ya institucionalizadas.

Resolución de un problema de construcción en geometría

El problema tiene que ofrecer resistencia al sujeto en relación a sus conocimientos. Es necesario prever las *variables didácticas*[3] (cf. discusión sobre la elección de la longitud del lado y la diagonal del paralelogramo) que se deben hacer jugar para favorecer un enunciado que plantee realmente un problema de construcción. En su resolución se toman decisiones en las que intervienen, entre otras cosas, la interpretación que se haga del enunciado, el conocimiento de las propiedades; la disponibilidad de construcciones básicas.

En la resolución de un problema de construcción en geometría donde se simule la actividad de los matemáticos se pueden distinguir cuatro fases no lineales en términos de las exigencias que plantean al resolutor:

- plantear la posibilidad de existencia de un objeto que reúna las condiciones del enunciado;
- obtener una representación de dicho objeto;
- poder construir;
- poder formular y justificar la construcción.

Balacheff (1982) considera que en los procesos de *resolución*[4] de problemas se da una estructura cíclica y que al término de cada ciclo se da la verificación. Las sucesivas verificaciones dan lugar a procesos de validación que resultan ser un motor de la *resolución* de problemas. En los procesos de *resolución* de problemas se observa un conjunto de comportamientos posibles entre la generación de pruebas y su contradicción tales como la formulación de conjeturas, el rechazo de algunas de ellas, la explicitación de hipótesis implícitas, la recusación de la/s contradicción/es, la comprensión del valor de contraejemplos y de casos particulares, la formulación de condiciones...

Las "construcciones básicas"

Para que en la resolución de una construcción geométrica el esfuerzo esté centrado en el juego efectivo entre propiedades, definiciones, etc. se debería disponer de las nociones de congruencia de segmentos y ángulos, punto medio de un segmento, perpendicularidad y paralelismo.

Proponemos que el estudio de estas nociones, en los primeros años de escolaridad obligatoria, no se efectúe a través de presentaciones formales, sino que se disponga de herramientas que permitan involucrar a esas nociones.

Consideramos que para el estudio de las figuras del plano en este nivel de escolaridad, es deseable disponer como mínimo de las siguientes *"construcciones básicas"* con regla y compás:

* Transporte de segmentos y ángulos (para el primer ciclo podría utilizarse papel).
* Construcción de la mediatriz de un segmento.
* Construcción de la bisectriz de un ángulo.
* Trazado de rectas paralelas (a través de ángulos congruentes, mediante la construcción de mediatrices, ...).

Estas construcciones permiten la realización de una amplia gama de problemas previstos en la E.G.B. y posibilitan involucrar nociones de alto grado de abstracción.

No es ésta la instancia de estudio del concepto de las nociones que comprenden las *construcciones básicas.* Su status está dado por el reconocimiento de su empleo y la posibilidad de la introducción de nuevos conocimientos donde éstas estén presentes.

Análisis de una construcción

Vamos a analizar un problema de construcción geométrica:

¿Es posible construir con regla y compás un paralelogramo dados un ángulo agudo α, la diagonal D de mayor longitud y el lado ab?

Elegimos esta construcción porque la necesidad de incluir el paralelismo para resolverla y por consiguiente, la necesidad de disponer de una herramienta adecuada exige la funcionalidad de las nociones visualizadas.

Según las cuatro exigencias propuestas en la página 3, distinguimos cuatro etapas.

Primera etapa:

Consiste en plantearse la posibilidad de existencia de un paralelogramo que reúna las condiciones del enunciado. Tal paralelogramo existe puesto que la longitud de D es mayor que la longitud de ab, requisito que se verifica según los datos. Como el ángulo dado es agudo y la diagonal dada es la de mayor longitud, la única posibilidad de ubicar la diagonal es que uno de sus extremos coincida con el vértice del ángulo dado ("En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo."[5]).

Generalmente los enunciados de construcciones geométricas en la escuela no dan oportunidad de poner en duda la existencia del objeto involucrado. En este problema el planteo de la pregunta cuestiona sobre la posibilidad de existencia de un paralelogramo con esas condiciones. Para dar respuesta es necesario involucrar las propiedades pertinentes respetando los datos. Los alumnos (11, 12, 13 años) seguramente intentarán primero efectuar la construcción para contestar.

Es importante, además, destacar algunas condiciones del enunciado del problema seleccionado que inciden en la *resolución*. La limitación de los instrumentos a la regla no graduada y al compás impide la intervención de la medida, lo que nos aproxima a las construcciones de la escuela griega. El uso de papel liso obliga a tener recursos para controlar, en particular, el paralelismo y la perpendicularidad. La lectura del enunciado indica cuál es la figura que se debe obtener, aunque no deja entrever pistas de *resolución*. La palabra paralelogramo pone en funcionamiento una representación mental de la figura. Para ello se puede recurrir a la figura prototípica del paralelogramo, servirse de ella para identificar los datos en función de las relaciones que se establezcan. Así, una decisión será elegir a cuál de los lados de la figura prototípica conviene atribuirle el lado dado, previendo el posterior trazado de paralelas.

Segunda etapa:

Consiste en obtener una representación. Una estrategia para representar gráficamente el objeto buscado es utilizar la figura de análisis.

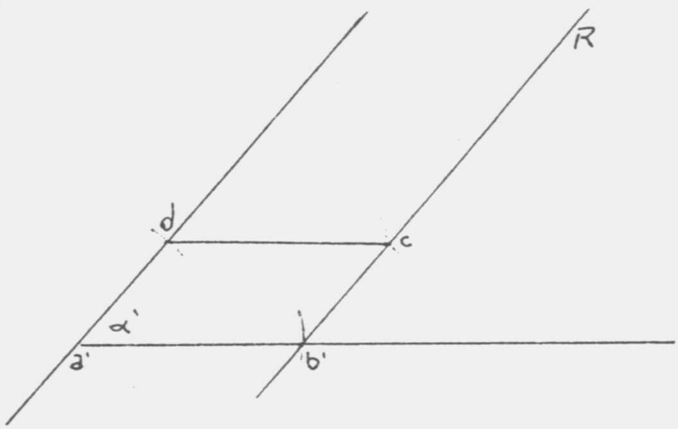
El hecho de seleccionar la propiedad que permite la construcción (en este caso, el paralelismo de los lados opuestos) es una operación intelectual no trivial. En muchos casos el resolutor tiene presente únicamente la figura prototípica lo que lo conduce a que la construcción se produzca por una acomodación forzada a través de tanteos de los datos del problema a la "forma" de tal figura.

En esta etapa, el objetivo es encontrar una caracterización geométrica que permita la construcción final. En esa caracterización juega un rol importante la aprehensión perceptiva.

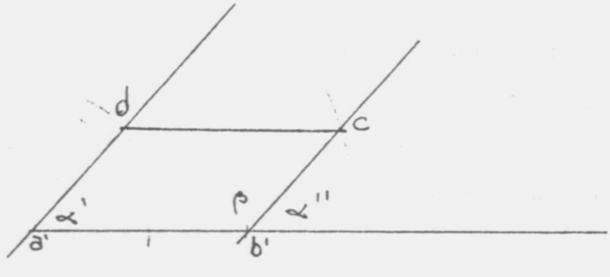
En toda representación de una figura hay información en relación a un objeto geométrico. Pero en las prácticas ostensivas se utiliza exclusivamente la figura prototípica para transmitir el saber concerniente a tal objeto. En esas condiciones no se dispondría de la propiedad del paralelismo de los lados opuestos del paralelogramo. Fácilmente se incurriría en el error de atribuirle a la diagonal la propiedad de ser bisectriz del ángulo dado[6]. Se arribaría a una solución si los datos correspondieran a un rombo (no es este caso). Justamente las longitudes del lado y la diagonal han sido elegidas de modo de no caer en este caso particular. Limitarnos a la construcción de paralelogramos especiales no favorece la puesta en juego del paralelismo de los lados opuestos. La construcción de paralelogramos especiales bien puede resolverse usando la noción de rectas perpendiculares o ángulo recto y la de congruencia de segmento o el conocimiento de que la diagonal es bisectriz de los ángulos que sus vértices une, quedando excluida la construcción del paralelogramo propiamente dicho.

Tercera etapa:

Se trata ahora de construir la figura de la que se obtuvo una representación. Un procedimiento de construcción es el siguiente:
- se transporta el ángulo α dado (obteniendo α' de vértice a');
- sobre uno de sus lados se transporta el segmento correspondiente al lado dado, haciendo coincidir uno de sus extremos con a', determinando $a'b'$;
- se traza una paralela R al otro lado del ángulo dado que pase por el punto b';
- se transporta la diagonal dada haciendo coincidir uno de sus extremos con a', de modo que el otro extremo corte a R en el mismo semiplano con respecto a $a'b'$ que contiene al ángulo α', determinando el punto c;
- se determina d, sobre el lado de α' que no contiene a b', de modo que $a'd$ sea congruente a $b'c$;
- se une c con d.



Habiendo concebido que una figura con esas condiciones existe y decidido a cuál de los lados de la figura prototípica conviene atribuirle el lado dado, se debe prever buscar los medios para determinar el otro par de lados. Se puede conjugar la representación mental de la figura de paralelogramo con las herramientas: "transporte de ángulo" y "trazado de rectas paralelas". Para completar la figura, luego de haber transportado α (obteniendo $\alpha' \equiv \alpha$) y construído sobre uno de sus lados el $a'b'$ congruente al lado dado, se podría utilizar distintos procedimientos:



a) construir α'' congruente con α' en el mismo semiplano que éste con respecto a $a'b'$. La consecuencia de esta última operación es determinar la semirrecta que contiene al lado $b'c$. La diagonal permitirá determinar la longitud de ese lado;

b) o construir β suplementario de α', lo que trae como consecuencia la determinación de la semirrecta que contiene al lado $b'c$ como en el caso anterior. Aquí se deberá tener en cuenta la construcción de β con vértice en b', consecutivo de α';

c) o realizar la construcción de la recta paralela a la semirrecta de origen a', que pase por b'. Esta recta contendrá el lado $b'c$, luego se determinará su longitud en función de la diagonal.

Estos procedimientos posibilitan la construcción y en ellos se involucran el paralelismo, aunque las relaciones establecidas en uno u otro caso son de distinta envergadura. En a) y en c) se está pensando en el paralelismo de los lados opuestos, aunque los procedimientos son diferentes; en el primero basta trazar ángulos correspondientes congruentes para garantizar el paralelismo, en el último la garantía está dada por la *"construcción básica"* de rectas paralelas con regla no graduada y compás. En b) se pone en juego la propiedad de los ángulos consecutivos suplementarios en un paralelogramo.

Cuarta etapa:

Hace referencia a la formulación y justificación de dicha construcción.

El cuadrilátero $a'b'cd$ es un paralelogramo. Tal afirmación proviene de que cumple con las condiciones de la propiedad: *"si dos lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, el cuadrilátero es paralelogramo"*[7]; puesto que el segmento $a'd$ es congruente y paralelo al segmento $b'c$ por construcción.

La formulación del procedimiento que permite la construcción del paralelogramo hace explicitar los "conocimientos" implícitos. Exige un recuento de los pasos de la construcción y una organización de los mismos. En tal revisión se hace necesario el reconocimiento de los elementos intermediarios para dar cuenta del procedimiento utilizado. En el ejemplo presentado, se debe distinguir el procedimiento que da como resultado el paralelogramo del procedimiento de las *construcciones básicas* utilizadas (transporte de ángulo, transporte de segmentos, trazado de rectas paralelas). En la enseñanza elemental generalmente se obtiene la construcción de la figura y luego se centra la mirada sobre ella sin visualizar las propiedades que permiten conseguirla. ¿Cómo simular, en este nivel de escolaridad, una actividad matemática con este tipo de problemas? Si se confronta los "hacer" con la información disponible del objeto en cuestión es posible precisar las propiedades que permiten alcanzar el resultado. Cuando "se logra esbozar un procedimiento, cada etapa de la construcción esclarece poco a poco el trazo que sigue" (Rival, 1994), o de lo contrario el procedimiento inicial sufre modificaciones porque se "pierde" de la memoria los trazos subsiguientes. Es costoso utilizar las propiedades matemáticas para la caracterización de la figura. Situados en la explicitación se tiende a describir cronológicamente de los "hacer" realizados; suele enunciarse los pasos efectuados pero sin utilizar un vocabulario matemático pertinente. En este caso suele enumerarse lo que se hizo 'construyo α'' congruente con α' '(sin tener en cuenta que la finalidad de este paso es la obtención de rectas paralelas. De manera implícita, es necesario utilizar el sentido directo de los procedimientos para construir la figura y el sentido recíproco para explicitar el procedimiento -construyo α'' congruente α' para obtener lados opuestos paralelos (sentido directo); cb' es paralelo a $a'd$ porque α'' es congruente a $alpha'$ (sentido recíproco). "Una dificultad es pues, aprehender esta diferencia, porque esta inversión, inducción-deducción, no es identificada..." (Rival, 1994). La explicitación del procedimiento de construcción de la figura es una primera aproximación a la formulación; ya supone una selección entre las informaciones disponibles -despreciar, en la explicitación, los trazos para obtener α' congruente α, enunciando únicamente la *construcción básica* correspondiente. Encontrar el vocabulario y las construcciones lingüísticas adaptadas a eso que se va a decir contribuye a la puesta a punto de los repertorios y concepciones disponibles.

La explicación de un procedimiento es una actividad importante que está ligada a la formulación de argumentos; pero ella no da lugar a garantizar la legitimidad de los resultados obtenidos. La explicación contribuye a presentar las propiedades, definiciones, algunas relaciones que se dan entre ellas. Por el contrario, la justificación es importante tanto por la producción de argumentos como por el examen de aceptabilidad de ellos. (En este trabajo usamos la palabra "justificación" y no "demostración", dado que esta última exige mayor rigor que la primera y estamos pensando en alumnos cuyas edades oscilan entre 11 y 13 años aproximadamente.) La pertinencia de las propiedades seleccionadas y la resistencia que ofrece a contra-argumentos, entre otras cosas, avalan la aceptación de argumentos. Es común que los alumnos a la hora de explicitar por qué es un paralelogramo aludan también a la congruencia de los ángulos opuestos, a la propiedad de las diagonales; siendo éstas, propiedades que no intervinieron en la *resolución*. Hacer referencia a estas propiedades para la argumentación, las que no son pertinentes ni se apoyan en los datos, no concierne a la justificación matemática sino a un dominio de opinión.

Frecuentemente para justificar la construcción se enumeran muchas proposiciones sin buscar su articulación e ignorando los argumentos en favor de una posición contraria a ella. Para avanzar en la justificación, estas proposiciones deben ser estructuradas lógicamente utilizando instrumentos que tengan status matemático. No se puede prescindir de utilizar el sentido recíproco -citado precedentemente. Tampoco se puede obviar indicar las implicaciones -lados opuestos paralelos y lados opuestos congruentes, entonces se está en las condiciones de acceso a la propiedad: *"Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, el cuadrilátero es paralelogramo.", con lo que se puede concluir: a'b'cd es un paralelogramo."*, La utilización del lenguaje matemático generalmente acarrea dificultades en la escuela; en la enseñanza se debe dedicar espacio especial para su tratamiento. La justificación no es un simple pasaje al simbolismo, sino que está ligada a las exigencias cognitivas de la situación y a la identificación que el alumno hace asimismo del conocimiento en juego.

Conclusiones

Como vemos en el juego de relaciones intervienen conocimientos que permiten:

- disponer de una representación mental del paralelogramo que se pueda utilizar;
- reconocer en esa figura de análisis los datos;
- buscar vinculaciones entre los datos (ensayar - conjeturar - rechazar conjeturas...);
- identificar la/s propiedad/es que logran completarlo;
- formular, en base al procedimiento empleado, las condiciones que garantizan que la figura obtenida es efectivamente un paralelogramo.

Para que los conocimientos geométricos adquieran sentido es necesario que permitan un juego efectivo con el espacio definido por la hoja lisa, donde el sujeto sea puesto en la coyuntura de elegir. Desde este punto de vista es fundamental propiciar en la enseñanza la confrontación entre los alumnos y por consiguiente la formulación de argumentos que aseguren la veracidad del procedimiento empleado en una construcción.

Para ello el alumno debe establecer relaciones entre propiedades, definiciones, herramientas disponibles *("construcciones básicas")*. Las herramientas le permiten involucrar nociones de alto grado de complejidad y le brindan elementos de los cuales puede valerse. De modo que nociones como ángulo, paralelismo, perpendicularidad, etc. pueden involucrarse mediante el manejo seguro y fluido de *"construcciones básicas"* que favorezcan el juego de relaciones entre propiedades y permitan el control de la situación de la construcción planteada. Ese control da lugar a la formulación de conjeturas, al rechazo de algunas de ellas, a la explicitación de propiedades, a la formulación de condiciones... lo que significa un trabajo más reflexivo.

BIBLIOGRAFIA

ARSAC, G., (1987), "L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 8, No. 3, pp. 267-312, La Pensée Sauvage, Grenoble, France.

ARSAC, G., (1989), La construction du concept de figure chez les éléves de 12 ans, *Actes de la 13éme conférence* PME, pp. 85-92, París.

BALACHEFF, N., (1982), "Prueve et demonstration en mathématiques au college", en Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 3, No. 3, pp. 261-304, La Pensée Sauvage, Grenoble, France.

BERTHELOT, R. et SALIN, M. H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire, Thése, Université Bordeaux I.*

BROUSSEAU, G., (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", Recherches en Didactique des mathématiques, Vol. 7/2, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, traducción publicada en Trabajos de Matemática, Serie B, No. 19, Argentina, 1993, I.M.A.F., U.N. de Córdoba.

CHEVALLARD, Y., (1985), La transposition didactique. Du savoir savant *au savoir enseigné, deuxiéme édition, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.*

CHEVALLARD, Y., JULLIEN, M., (1990 - 1991), "Autour de l'enseignement de la géométrie au collége, deuxieme partie", en Petit X No. 27 pp. 41 á 76, Francia.

COURANT, R., ROBBINS, (1971), ¿Qué es la matemática?, Aguilar, Madrid.

DOUADY, R., (1986), "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", en Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7, No. 2, pp. 5-31, La Pensée Sauvage, Grenoble, France.

DUVAL, R., (1992 - 1993), "Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?", en Petit X No. 31 pp. 37 á 61, Francia.

FREGONA, D., (1995), Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques. Thése Université Bordeaux I.

LAKATOS, I., (1976), Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático, Alianza Editorial, España.

PUIG ADAM, P. (1969), Curso de geometría métrica, Tomo I Fundamentos, Biblioteca Matemática, S. L. Madrid.

RIVAL, N., (1993-94), "Problémes de construction et de redaction de procedes", en Petit X No. 36 pp. 5 á 36, Francia.

TIRAO, J. (1985), Matemática 1, Kapelusz, Argentina.

---

[1] Agradecemos la valiosa colaboración del Dr. Juan Tirao y de la Dra. Dilma Fregona. Una versión ampliada y modificada de este artículo fué enviada para su publicación a Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage.

[2] Rey, Nocera, Saggese, (1981), *Aprendizaje y matemática 5to. y 7mo.*, Libros para el alumno, ed. Plus Ultra.

[3] Brousseau (1995), Glossaire de didactique des mathématiques, en *Thémes mathématiques*, Copirilen, IREM d'Aquitaine, pp.141-142.

[4] Balacheff, N. (1982). "Es frecuente, en situación escolar, considerar la redacción de la solución de un problema fuera de la resolución, eso no nos parece pertinente. Los procesos de resolución de una actividad se apoyan sobre una dialéctica investigación-validación, que implica la formulación y comprende la solución: redactar la solución de un problema conduce a su análisis y a su eventual puesta en causa, la formulación es asociada a la administración de la prueba."

[5] Tirao, J. (1985), p. 273.

[6] Este procedimiento fue observado reiteradas veces en la resolución de dicha construcción planteada a maestros de los dos primeros ciclos de la E.G.B., en cursos de perfeccionamiento docente.

[7] Adam, P. P. (1969).

Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad Nacional del Comahue.