Un viaje recurrente

Samuel Gómez Moreno

EL PROBLEMA

Un conocido problema de entretenimiento matemático dice lo siguiente: Un explorador viaja una distancia D en dirección Norte. Recorre después la misma distancia en dirección Este y, por último, recorre la misma distancia en dirección Sur. Si al final del trayecto el explorador se encuentra en el punto de partida, se desea saber dónde estaba el explorador.

Una marcada tendencia plano-euclidiana en nuestras interpretaciones geométricas dificulta, a veces, el hallazgo de la solución. Pero en el contexto adecuado (el trayecto se realiza sobre la superficie esférica terrestre) la solución es casi evidente: el explorador se encuentra sobre un punto de algún meridiano para el cuál la segunda parte del trayecto (una distancia D hacia el Este) suponga el recorrido completo de un paralelo terrestre; o bien, se encuentra en el Polo Sur.

Existen infinitas soluciones en función de que el tramo de trayecto hacia el Este suponga uno, dos,...recorridos completos de un paralelo. El análisis exhaustivo de todas las soluciones posibles es el objeto del presente escrito.

SU SOLUCION

Puesto que buscamos soluciones en una esfera de radio R (aproximación del globo terrestre) parece lo más adecuado usar coordenadas esféricas θ, φ (se omite R por ser una constante de todos los puntos).

Una restricción necesaria en este problema es:

$$0 < D < \pi R$$

ya que la máxima distancia que se puede recorrer en dirección hacia el Norte es πR. (Si $D = \pi R$ se viajaría de Polo Sur a Polo Norte, desde donde carece de sentido "ir hacia el Este ")

El explorador parte de un punto $P_1 = (\theta_1, \varphi_1)$. Después de recorrer una distancia D hacia el Norte llega al punto $P_2 = (\theta_2, \varphi_1)$.Al finalizar el viaje hacia el Este se encontrará sobre el punto $P_3 = (\theta_2, \varphi_2)$ y terminará, después del recorrido hacia el Sur, sobre el punto $P_4 = (\theta_3, \varphi_2)$. Buscaremos las condiciones para las cuales:

$$P_1 = (\theta_1, \varphi_1) = (\theta_3, \varphi_2) = P_4$$

Hagamos una observación previa respecto de las soluciones: Supongamos que tenemos un punto (θ, φ) solución del problema. Pensemos que se ha dibujado el viaje completo del explorador sobre un globo terráqueo; ahora se gira el globo (respecto del eje que pasa por los polos) un ángulo cualquiera. El punto (θ, φ) anterior se ha transformado en el punto (θ, φ'), que sigue siendo una solución (que tenemos a la vista en el dibujo marcado). Esto significa que si (θ, φ) es solución del problema, también lo serán todos los puntos de primera coordenada θ (puntos situados sobre el mismo paralelo). La solución presenta una invarianza de giro acimutal, debido a la simetría cilíndrica del problema.

Por tanto, encontrar las soluciones es equivalente a encontrar, únicamente, los ángulos polares θ de dichas soluciones.

1) Supongamos $0 < \theta < \pi$ (el caso $\theta = \pi$ se analizará después). De P_1 a P_2 el explorador recorre una distancia D:

$$R(\theta_1 - \theta_2) = D \qquad \text{o bien } \theta_1 = \tfrac{D}{R} + \theta_2$$

De P_2 a P_3 el explorador tiene que haber dado un número natural de vueltas sobre el paralelo de ángulo polar θ_2 (si el inicio del trayecto no se realiza en el Polo Sur, no hay otra manera de que $P_1 = P_4$):

$2\pi n R \sin\theta_2 = D \qquad$ o bien $\theta_{2,n} = \arcsin\frac{D}{2\pi n R}$

(Puede pensarse en elegir valores de la función arcsin comprendidos en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, pero eso conduce a valores de θ_1 mayores que π)

Entonces las soluciones del problema vienen dadas por los ángulos polares:

$\theta_{1,n} = \frac{D}{R} + \arcsin\frac{D}{2\pi n R} \qquad$ para todos los naturales $n \geq n_0$ con $\theta_{1,n_0} < \pi$

(Si D es próximo a πR hay que desestimar las primeras "soluciones" de la expresión anterior, por dar valores mayores que π)

Las soluciones descritas representan paralelos de ángulo polar $\theta_{1,n}$ que se van acumulando hacia $\theta_{1,\infty} = \frac{D}{R}$

2) $\theta_{1,0} = \pi \quad$ (Polo Sur) es también una solución con la particularidad de que en este caso el viaje hacia el Este no supone necesariamente una vuelta completa alrededor de un paralelo.

Universidad Nacional de San Luis
Instituto de Matemática Aplicada
Ejército de los Andes 950.
samuel@imasl.edu.ar