Problemas para conversar

Jorge Vargas

En estas notas presentamos algunos problemas cuya solución muestra algunos razonamientos típicos de cursos de matemática.

Un problema que permite distinguir geométricamente al plano del espacio ordinario.
(Convengamos que la afirmación:"una recta corta a un lado de un polígono" significa que la recta intersecta dicho lado en un punto que no es un vértice del polígono.) En el plano es evidente que si dibujamos una recta que corta a un lado de un polígono convexo quizás corta a algún otro lado, pero no a todos. Imagine la situación en triángulos, paralelogramos, rombos, etc. Por cierto, si consideramos el polígono de la figura 1, es claro que la afirmación es falsa para polígonos no convexos.

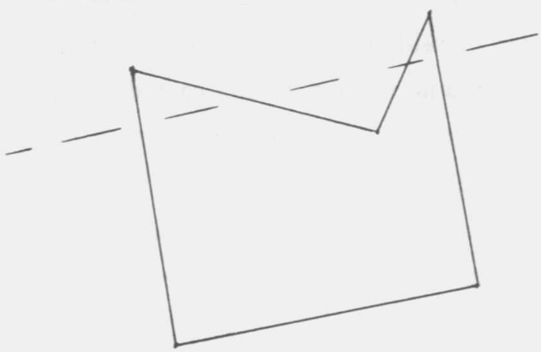

Fig. 1

En el espacio tridimensional la situación es completamente distinta.
Para esto, recordemos que en el espacio el análogo de un polígono es un poliedro y el análogo de una recta es un plano. Como ántes convengamos en decir que un plano *corta una cara* de un poliedro si la intersección del plano con dicha

cara tiene puntos de la cara que no pertenecen a ninguna arista. De acuerdo a esta definición el plano que contiene una cara de un poliedro no corta las caras adyacentes.

Probemos ahora: Para cada paralelepípedo en el espacio es posible encontrar un plano que corta cada una de sus caras. La prueba que daremos requiere el uso de coordenadas.

Comenzemos con el caso más sencillo, a saber el cubo

$$C = \{(x, y, z) \text{tal que} 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

y sea H el plano de ecuación $x + y + z = 3$ los puntos que se obtienen al permutar las coordenadas de $(2, 1/2, 1/2), (3/2, 3/2, 0)$ están en las distintas caras del cubo, no pertenecen a ninguna arista y a su vez pertenecen al plano H. Para el caso general, todo paralelepípedo en el espacio, por álgebra lineal, es la imágen del cubo C, por una transformación lineal biyectiva o una transformación lineal bijectiva compuesta con una traslación. Como dichas transformaciones transportan planos en planos tenemos el resultado general.

Un ejercicio interesante es: Consideremos el subconjunto de puntos x de C tal que todo plano que pasa por x no corta a alguna cara de C. Este subconjunto tiene exactamente catorce puntos, a saber, los ocho vértices de C y el centro de cada cara de C, C tiene seis caras!

Nota: El mismo resultado vale en el espacio de dimensión n, nuevamente el caso a resolver es el multicubo de aristas $0 \leq x_j \leq 2, j = 1, \cdots, n$ y el hiperplano H es el de ecuación $\sum x_i = n$.

Otro hecho que permite distingir al plano del espacio es el siguiente: Pensemos en una regíon poligonal plana convexa S o en un poliedro convexo S y que un empaquetador la quiere poner en una caja, pero como es tacaño coloca a S en la caja más pequeña posible, para simplificar el problema convengamos en aceptar que sólo usa cajas que tengan lados paralelos a las paredes. Ahora, un empaquetador que vive en el mundo plano se dá cuenta de (observa) que siempre el centro de la caja es un punto de S y hace la siguiente demostración, sí el centro de la caja no estuviera en S, entonces, por ser S convexo, podría dibujar una recta por el centro de S, que deja de un lado a S y del otro a un lado de la caja, pero entonces podemos achicar la caja un poquitito, absurdo porque es muy tacaño. Veamos como un empaquetador que vive en el espacio puede encontrar un S de modo que su caja no contenga el centro de S. Retomemos el cubo C y el plano H de la parte anterior, el punto $(1,1,1)$ pertenece a H, movamos paralelamente un poquito a H de modo que $(1,1,1)$ no esté en este nuevo plano P. Es obvio que P corta todas las caras de C. El complemento de P en C es la unión de dos poliedros convexos disjuntos S y T. La caja de cada uno de ellos es C (tanto S como T tienen puntos de todas las caras de C), sin embargo el centro de la caja no está en uno de ellos.

Una relación entre álgebra de tercer año y geometría

Sí x, y, z son números positivos, entonces vale que

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}) \geq 9$$

Una manera de demostrar esto es usar la igualdad

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right) = 9+\left(\sqrt{\frac{y}{z}}-\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$$

Notar que la desigualdad es igualdad sí y sólo sí $x = y = z$ como se deduce de la identidad anterior.

Consideremos ahora un triángulo de lados a, b, c. Denotemos por S su superficie, p su perímetro, s su semiperímetro, R el radio de la circunferencia circunscripta, r el radio de la circunferencia inscripta, d la distancia entre el centro de la circunferencia inscripta y el centro de la circunferencia circunscripta. Se sabe que

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad R = \frac{abc}{4S} \qquad r = \frac{S}{s} \qquad d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

Como el lector recordará que la primera fórmula se debe a Heron, la última a Euler.

Lo que deseamos puntualizar es como usando las información previa, se demuestra:

Teorema (Euler) $R \geq 2r$ y la igualdad sólo vale para triángulos equiláteros.

En realidad la última afirmación de la información presentada nos verifica la desigualdad de Euler, sin embargo se la puede demostrar en forma muy sencilla, por ejemplo así:

$$\frac{R}{r} = \frac{sabc}{4S^2} = \frac{abc}{4s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

ahora escribimos $s - a = x$, $s - b = y$, $s - c = z$, por consiguiente,

$$\frac{R}{r} = \frac{(y+z)(y+x)(z+x)}{4xyz}.$$

en consecuencia la desigualdad de Euler equivale a demostrar que

$$\frac{(y+z)(y+x)(z+x)}{4xyz} \geq 2,$$

el numerador de la última fracción es

$$(y+z)(y+x)(z+x) = (x+y+z)(xy+xz+yx) - xyz.$$

Por tanto, la desigualdad de Euler equivale a verificar

$$\frac{(x+y+z)(xy+xz+yx) - xyz}{4xyz} \geq 2,$$

pero esta última fracción es igual a

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \geq \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Ahora, estudiamos la igualdad en el teorema de Euler. Sí el triángulo es equilátero, entonces $a = b = c$ álgebra elemental nos dice que vale la igualdad.

(Tambien se lo demuestra usando el hecho de que en un triángulo equilátero las medianas, mediatrices, alturas coinciden). Por otro lado, si vale la igualdad, entonces $d = 0$ y por lo tanto las mediatrices coinciden con las alturas, bisectrices etc, en consecuencia es equilátero. Otra demostración (sugerida por D. Penazzi es: si vale la igualdad entonces $x = y = z$, por consiguiente $a = b = c$.

Otras aplicaciones algebraicas del teorema anterior.

Para motivarnos recordemos:

Para el caso de triángulos rectángulos de lados naturales, sabemos que sus lados se describen por las fórmulas,$a = 2mnh, b = h(m^2 - n^2), c = h(m^2 + n^2)$ donde a, b son los catetos, n, m, h naturales, n, m son coprimos y de distinta paridad, además $m > n$. Para una prueba, consultar Vargas, Areas de Triángulos rectángulos, REM Vol. 6.1 (1990), estas fórmulas tienen por consecuencia:

Ejercicio: Para un triángulo rectángulo de lados naturales, el radio de la circunferencia r inscripta es natural, el radio de la circunferencia circunscripta R es un natural o un racional cuyo denominador es dos.

Otro problema relacionado con lo anterior es:

Determinar todos los triángulos de lados racionales y área racional. Parte de la solución de este problema es aclarar que significa determinar.

Notar que un triángulo equilátero de lados naturales, siempre tiene área irracional (es igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ si a es el lado.)

Los triángulos de lados racionales y área racional (TLAR) estan en correspondencia con las cuaternas de números racionales positivos (a, b, c, S) tal que $S^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$ y $a + b > c, a + c > b, b + c > a$ La primera igualdad es porque S es la superficie, las tres desigualdades son las que caracterizan las ternas que son lados de triángulos. Hagamos $(s - a = x), (s - b = y), (s - c = z)$, de esto, $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = x + y + z$ y el sistema de ecuaciones es equivalente a encontrar las cuaternas de racionales (x, y, z, S) tal que

$$S^2 = xyz(x + y + z), x > 0, y > 0, z > 0, S > 0$$

Por otro lado, $r = S/s$, por consiguiente, para un triángulo de lados racionales, se tiene que su área es racional sii el radio de la circunferencia inscripta es racional. Esto es, si a, b, c son racionales, entonces S es racional sii r es racional. Por lo tanto, el último sistema es equivalente a:

Encontrar los racionales positivos (x, y, z, r) tal que $(x + y + z)r^2 = xyz$. Por último hacemos $x = rx, y = ry, z = rz$ y la ecuación se convierte en $(x + y + z) = xyz$ que ahora resolvemos. Despejamos z, obteniendo $z = \frac{x+y}{xy-1}$, ahora escribimos $x = u/w, y = v/q$, por consiguiente, $z = \frac{uq+vw}{uv-wq}$. Después de álgebra de tercer año llegamos a que

$$a = \frac{v}{rq} + \frac{uq + vw}{r(uv - wq)},\ b = \frac{u}{rv} + \frac{uq + vw}{r(uv - wq)},\ c = \frac{u}{rv} + \frac{v}{rq}.$$

donde u, v, w, q son naturales, r es racional positivo y $uv - wq$ es positivo. Ahora queda como ejercicio para el lector definir que significa determinar. Dando valores a u, v, w, q, r podemos obtener listas de TRLAR, calcular sus áreas, los radios de las circunferencias circunscriptas u otros números asociados al triángulo. Proponemos como ejercio, observar las tablas construídas y extraer conclusiones.

Desigualdades arítméticas y geométricas.

Estas desigualdades son

$$\sqrt{xy} \leq \frac{(x + y)}{2} \qquad\qquad \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{(x + y + z)}{3}$$

para x, y, z números positivos arbitrarios. Para la primera desigualdad daremos dos demostraciones distintas, la primera es en base a la igualdad $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, como el miembro derecho es el cuadrado de un número, resulta nonegativo, por tanto, el miembro izquierdo es no negativo, lo que deseabamos demostrar. Notar que la demostración dice que si la desigualdad en realidad es una igualdad, entonces el miembro izquierdo es cero, por consiguiente el derecho es cero, pero entonces tenemos un número cuyo cuadrado es cero, lo cual fuerza que $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$ y como x, y son nonegativos, entonces $x=y$. O sea, si en la desigualdad vale la igualdad entonces los números involucrados en producir la desigualdad son iguales.

Otra demostración se basa en la figura de abajo

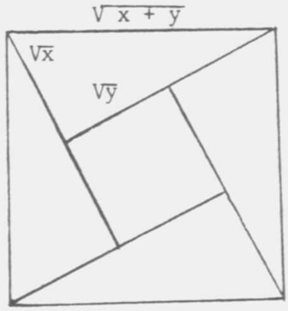

Fig. 2

Como $(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2=(\sqrt{x+y})^2$ cada triángulo es rectángulo (usamos el recíproco del teorema de Pitágoras), por consiguiente el cuadrilátero dibujado es un cuadrado. Su área es mayor que la suma de las áreas de los cuatro triángulos. Por consiguiente, $(x+y)=(\sqrt{x+y})^2 \geq 4.\frac{1}{2}.\sqrt{x}\sqrt{y}=2\sqrt{x}\sqrt{y}$. La igualdad es equivalente a que el cuadrado del medio desaparezca, el lado de este cuadrado es $\sqrt{y}-\sqrt{x}$, por consiguiente la igualdad vale sí y sólo sí $x=y$. No daremos la prueba de la segunda desigualdad.

Aplicaciones de las desigualdades.

Entre todos los paralelogramos de semiperímetro $2c$, el cuadrado de lado c es el de mayor área. En otras palabras debemos demostrar que si a, b son números positivos que satisfacen $a+b=2c$, entonces $ab \leq c^2$ y que la igualdad sólo vale si $a=b=c$. Esto es lo que demostramos en el párrafo anterior, por tanto problema resuelto.

Ahora notemos lo siguiente, si de alguna manera logramos demostrar que entre todos los paralelogramos de semiperímetro $2c$, el de mayor área es el cuadrado de lado c, entonces podemos deducir la desigualdad: media geométrica menor o igual a la media aritmética, porque al expresar en fórmulas lo que estamos afirmando acerca de los paralelogramos, decimos $x + y = 2c \Rightarrow xy \leq c^2$ lo que equivale a $\frac{x+y}{2} = c \Rightarrow \sqrt{xy} \leq c = \frac{x+y}{2}$, lo cual es la desigualdad buscada. Si hacemos una traducción de este razonamiento, podemos "justificar" la desigualdad para tres números. En efecto, en los párrafos anteriores hemos demostrado: si dos números positivos tienen suma constante $2c$, entonces su producto es menor o igual a c^2, por consiguiente, es natural pensar que si la suma de tres números positivos es menor o igual a $3c$, entonces su producto es menor o igual a c^3, al escribir esto en fórmulas obtenemos la desigualdad para tres cantidades. Trabajando en forma análoga a lo que hicimos para cuadriláteros se resuelve: Entre todos los paralelepípedos de área lateral $6c^2$ el de mayor volumen es el cubo de lado c.

Otra aplicación es:
Entre todos los cilindros de volúmen V el de menor área lateral S, es aquel que su diámetro es igual a su altura. En efecto, si denotamos por r el radio de la base y por h la altura de un cilindro, entonces
Volumen $= V = \pi r^2 h$ y $S = 2\pi(r^2 + rh)$, por lo tanto
$S = 2\pi(r^2 + \frac{V}{\pi r}) = 2\pi(r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r})$. Podemos pensar que $\frac{S}{6\pi}$ es la media aritmética de los números $r^2, \frac{V}{2\pi r}, \frac{V}{2\pi r}$, por lo tanto por la desigualdad: media geométrica menor o igual a media aritmética, se tiene que $\sqrt[3]{(\frac{V^2}{4\pi^2})} \leq \frac{S}{6\pi}$ Notemos que el lado izquierdo de la desigualdad no depende del paralelepípedo, por tanto, S tomará el valor más pequeño, cuando tengamos igualdad, esto es, recordando cuando la media geométrica es igual a la media aritmética, se obtiene $r^2 = \frac{V}{2\pi r}$ o $V = 2\pi r^3$, como $V = \pi r h^2$, resulta $2r = h$.

Ejercicio: definir el concepto de media aritmética y media geométrica de varios números.

Algunos problemas útiles para programar computadoras.

1) Euclides fue el primer matemático en demostrar que existen infinitos números primos. Su demostración es por reducción al absurdo. Esto es,

suponemos que sólo hay un número finito de primos $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, p_n$. Ahora formamos el número $Q_n = 1 + 2.3.5.7.11.13. \ldots .p_n$. Q_n es número natural mayor que uno, por consiguiente es divisible por un primo p. Por otro lado, p está en la lista que define Q_n (allí están todos los primos), por consiguiente p divide a $1 = Q_n - (Q_n - 1)$, absurdo. Esta demostración sugiere un problema: ¿ Para que n es Q_n un número primo ?. Por ejemplo $Q_2 = 2.3 + 1 = 7$, $Q_3 = 2.3.5 + 1 = 31$ son primos, se sabe que, y sugerimos verificarlo con una computadora, que el Q_n correspondiente a $n = 13649$ es un número primo de 5862 dígitos.

2) Fijemos un primo q, nos planteamos encontrar un natural d de modo que todos los términos de la progresión aritmética

$$q,\ q + d,\ q + 2d,\ \ldots, q + (q - 1)d$$

son números primos. Notar que $q + qd$ es compuesto.
Para $q = 3$, una respuesta es $d = 2$, la progresión es: $3, 3 + 2 = 5$,
Para $q = 5$ una respuesta es $d = 6$, pues $5, 5 + 6 = 11, 5 + 2.6 = 17, 5 + 3.6 = 23, 5 + 4.6 = 29$ son primos.
Para $q = 7$ el primer d es $d = 150$
Para $q = 11$ el primer d es $d = 1536160080$
Para $q = 13$ el primer d es $d = 9918821194590$.

3) Para cada natural n denotemos por $\pi(n)$ el número de primos menores o iguales a n. De esto, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 3$. Problema, encontrar los naturales n tal que $\pi(n)$ divide a n. Entre tales naturales estan, $\{2, 4, 6, 8, 30, 33, 100, \ldots\}$

Un problema de combinatoria

Este problema, es un ejemplo de un problema que transformado convenientemente en otro problema resulta muy fácil de resolver.
Decimos que un subconjunto $A \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ es *alternante* si al enumerar

sus elementos en forma creciente, el primero es impar, el segundo es par, el tercero es impar, etc. Decimos que un subconjunto $A \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ es *robusto* si cada elemento A es mayor o igual al cardinal de A. Por ejemplo, $\{13, 24, 57, 62\}$ es alternante y robusto. Problema, determinar los subconjuntos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ alternantes y robustos. Conviene pensar que el conjunto vacío es la vez alternante y robusto. Una manera de resolver este problema, es transformarlo en otro equivalente fácil de resolver. Para esto, a cada subconjunto $A = \{a_1, \cdots, a_k\}$ de $\{1, 2, \cdots, n\}$ con k elementos le asociamos un subconjunto $B = \{b_1, \cdots, b_k\}$ de $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$, donde $b_i = a_i + i - 1$. Es fácil verificar que los $k-$subconjuntos alternantes A estan en correspondencia bijectiva con los $k-$subconjuntos $B \subset \{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ que satisfacen: cada elemento de B es impar y el mayor elemento B es menor que $n + k$. Por otro lado, los $k-$subconjuntos robustos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ estan en correspondencia bijectiva con los $k-$subconjuntos $B = \{b_1 < \cdots < b_k\}$ de $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ tal que $b_i \geq k + i - 1\, \forall\, i$. En consecuencia, los $k-$subconjuntos alternantes y robustos estan en correspondencia bijectiva con los $k-$subconjuntos de $\{k, k+1, \cdots, n+k-1\}$ tal que todos sus elementos son impares. El resultado es $\binom{n/2}{k}$ si n es par, $\binom{\frac{n+1}{2}}{k}$ sí ambos son impares y $\binom{\frac{n-1}{2}}{k}$ si n es impar y k es par.

Por tanto, el número de subconjuntos alternantes y robustos es

$$\sum_{k=0}^{k=n/2} \binom{n/2}{k} = 2^{\frac{n}{2}} \qquad \text{n par}$$

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{4}]} \binom{\frac{n-1}{2}}{2k} + \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{4}]} \binom{\frac{n+1}{2}}{k} \qquad \text{n impar}$$

Para $n > 1$ esto es igual a $2^{\frac{n-1}{3}} + 2^{\frac{n-1}{3}} = 3.2^{\frac{n-3}{3}}$

para $n = 1$ es 2

Otro ejercicio: el número de subconjuntos alternantes es igual al número de subconjuntos robustos y también igual a F_{n+2}, donde $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n+1}$ para $n \geq 2$. (Los números de Fibonacci.)

Fa.M.A.F. Universidad Nacional de Córdoba.

Nota

El Profesor Dalmasso nos ha comunicado que ha habido un error al señalar la autoría del trabajo *Computación y Matemática 1* en el V.10.1 de la R.E.M. (transcripción de los Memorandums 16 y 17 de la O.M.A.). Su autor es el Dr. Néstor Aguilera, quien no sólo es responsable de las ideas formuladas en los mismos, sino que además ha trabajado en su implementación, a través de diversos cursos y seminarios a los que asistieron numerosos docentes de todos los niveles e incluso alumnos.

Roberto Miatello