Olimpíada Matemática Argentina

Torneo de las ciudades. Problemas.

- Es una competencia de Matemática para estudiantes secundarios que se realiza dos veces por año: Octubre y Marzo, con pruebas universales, elaboradas por el Comité Organizador Central (COC), con sede en Moscú, Rusia.

- Cada país interesado en participar constituye un Comité Organizador Nacional (CON) que se encarga de traducir y aplicar las pruebas y designa jurados locales que califican las pruebas con las pautas establecidas por el COC.

- La competencia tiene dos niveles, según el año de escolaridad de los participantes. En ambos casos se trata de competencias de muy alto nivel de dificultad.

- Para preparar esta participación se han establecido cinco centros geográficos (ciudades) en los que se realizan dos **pretorneos:** uno en otoño y otro en primavera. Dichas ciudades son: Bahía Blanca, Buenos Aires, Córdoba, Rosario y Tucumán. El CON asigna cada zona del paíz a una de estas cinco ciudades.

  Utilizando pautas análogas a las del COC, se seleccionan las dos mejores ciudades (entre las cinco originales) e inscriben en el Torneo de octubre del año en curso y en el de marzo del año siguiente

- En octubre y en marzo representan a esas dos ciudades los estudiantes de todo el país que hayan obtenido los mejores puntajes en los pretorneos. El CON asigna a cada ciudad sus representantes.

- Las pruebas del Torneo de las Ciudades constan de seis problemas para resolver en cinco horas. En los pretorneos las pruebas serán de cuatro

problemas para resolver en cuatro horas y se realizan el mismo día y a la misma hora en todas las sedes.
* Un alumno puede participar en los dos pretorneos o en uno solo de ellos. Hay dos categorías:

-Juveniles: alumnos de 1° 2° y 3°. año.

-Mayores: alumnos de 4°, 5° y 6° años.

* el puntaje total del alumno es la suma de los tres mejores puntajes parciales.

- El CON otorga, a propuesta del jurado, diplomas a los participantes cuyas pruebas se destaquen por su originalidad, claridad, belleza, etc., publica después de cada pretorneo el puntaje de cada ciudad y el puntaje final de cada alumno; publica después del pretorneo de primavera la lista de alumnos seleccionados para el Torneo de las Ciudades ordenada por mérito, indicando a qué ciudad representará cada uno en el Torneo.

- Para mayor información dirigirse a las Secretarías Regionales de la O.M.A.

Los siguientes problemas formaron parte del Pretorneo de Otoño (27 – 4 – 1994).

Problema 1 (nivel juvenil).
Se ha escrito un número en cada lado y en cada vértice de un hexágono de modo que el número de cada vértice es igual a la suma de los números de los dos lados que concurren en dicho vértice. Luego se han borrado todos los números de los lados y uno de los números de los vértices. ¿Se puede deducir cuál es el número que se borró del vértice?
Solución.
Supongamos que el vértice al que se le borró el número es v_1. Sean a, b, c, d,

e, f los números asignados a los lados y $v_1 = a + b, v_2 = b + c, v_3 = c + d$, $v_1 = d + e, v_5 = e + f, v_6 = f + a$ los vértices. Por lo tanto

$$v_1 + v_3 + v_5 = a + b + c + d + e + f \qquad v_2 + v_4 + v_6 = b + c + d + e + f + a \Rightarrow$$

$$v_1 = v_2 + v_4 + v_6 - (v_3 + v_5)$$

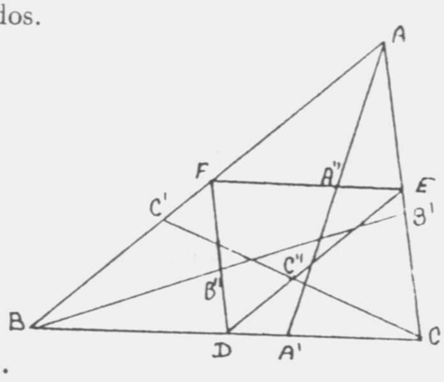
Problema 2 (nivel juvenil).

Se unen los vértices A, B, C de un triángulo con los puntos A', B', C' del lado opuesto (respectivamente). ¿Puede ocurrir que los puntos medios de los segmentos AA', BB' y CC' estén alineados?

Solución.

Sean D, E, F puntos medios de BC, AC y AB; A'', B'', C'' puntos medios de AA', BB' y CC'. Entonces $A'' \in FE, B'' \in DF, C'' \in ED$.

A'', B'' y C'' son puntos del triángulo DEF y ninguno es vértice. Por lo tanto es imposible que estén alineados.



Problema 3 (nivel juvenil).

Dado un número natural A, la operación permitida es sumarle uno de sus divisores $d(1 < d < A)$. Se repite esta operación con el número $A + d$ y así sucesivamente. Demostrar que si se empieza con $A = 4$ se puede obtener, eligiendo convenientemente las operaciones permitidas, cualquier número compuesto.

Nota: Un número mayor que uno es compuesto si no es primo.

Solución.

Sea N un número compuesto y p un divisor primo. Entonces $4 \leq 2p \leq N$.

2p es par y mayor que 4, luego 2p = 4+2+ ... + 2. Así obtenemos 2p por una secuencia de operaciones permitidas.

Si $N = kp$ y $k \geq 2$, luego $N = 2p+p+...+p$, y obtenemos N por una secuencia de operaciones permitidas.

Si $N = kp$ y $k \leq 2$, luego $N = 2p+p+...+p$, y obtenemos N por una secuencia de operaciones permitidas.

Problema 4 (nivel juvenil).

Tres equipos de fútbol, A, B y C, participan en un torneo: cada equipo juega varias veces contra cada uno de los restantes, pero juega la misma cantidad de partidos con cada uno de los otros dos. ¿Es posible que el equipo A quede primero absoluto y el equipo C quede último absoluto pero el equipo A sea el que tiene menos partidos ganados (de los tres) y el equipo C sea el que tiene más partidos ganados (de los tres)?

Nota: En cada partido, el ganador obtiene 2 puntos y el perdedor 0 puntos. En caso de empate, obtienen 1 punto cada uno.

Solución.

Si A, B y C juegan 6 veces uno contra otro. A y B siempre empatan. B y C ganan 3 veces cada uno cuando juegan uno contra otro. A le gana 2 veces a C, pierde una y empata las demás. Resulta la siguiente tabla:

	PUNTOS	GANA
A	13	2
B	12	3
C	11	4

Problema 1 (nivel Mayor).

Considere el conjunto de soluciones de la ecuación

$$x^2 + y^3 = z^2$$

en los enteros positivos. ¿Es finito o infinito?

Solución.

Si $z^2 - x^2 = y^3$, entonces $z + x = y^2$ y $z - x = y$. Por lo tanto

$$z = \frac{t(y+1)}{2} \qquad\qquad x = \frac{y(y-1)}{2}$$

es un conjunto infinito de soluciones enteras de la ecuación.

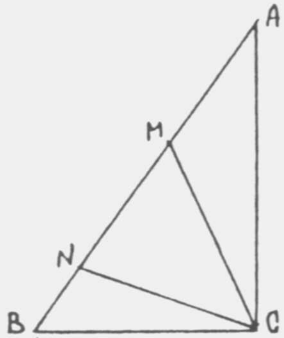
Problema 2 (nivel Mayor).

Sean M y N puntos de la hipotenusa del triángulo rectángulo $ABC(\widehat{C} = 90^0)$ tales que $BC = BM$ y $AC = AN$. Demostrar que el ángulo $M\widehat{C}N$ es de 45^0.

Solución.

Los triángulos BMC y ANC son isósceles.

$$\left.\begin{array}{rl} B\widehat{MC} = & 90^0 - \frac{\widehat{B}}{2} \\ A\widehat{N}C = & 90^0 - \frac{\widehat{A}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow M\widehat{C}N = 180^0 - B\widehat{MC} - A\widehat{N}C = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 45^0$$



Problema 3 (nivel Mayor).

Se colocan los números 1, 2, 3, ..., 25 en una tabla de 5×5. En cada fila aparecen en orden creciente (de izquierda a derecha). Hallar el valor máximo y el valor mínimo que puede tener la suma de los números ubicados en la tercera columna.

Solución.

a(i, j) es el número de la fila i, y la columna j.

$$a(i,j) < a(i,k) \quad \text{si } j < k.$$

Vamos a suponer que la tabla está ordenada por la tercer columna:

$a(i,3) < a(k,3)$ si $i < k$. Esto no resta generalidad.

$a(5,3) < a(5,4) < a(5,5) \Rightarrow a(5,3) \leq 23.$

$a(4,3) < a(4,4) < a(4,5)$ y $a(4,3) < a(5,3) \Rightarrow a(4,3) \leq 20.$

Análogamente, $a(3,3) \leq 17; a(2,3) \leq 14; a(1,3) \leq 11.$

La suma de la tercer columna es menor o igual que:

$$23 + 20 + 17 + 14 + 11 = 85.$$

Con argumentos similares se ve que la suma de la tercer columna es mayor o igual que:

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45.$$

Ambos valores son alcanzables.

1	6	11	12	13
2	7	14	15	16
3	8	17	18	19
4	9	20	21	22
5	10	23	24	25

1	2	3	16	21
4	5	6	17	22
7	8	9	18	23
10	11	12	19	24
13	14	15	20	25

Problema 4 (nivel Mayor).

Luis quiere fabricar un dado insólito que tenga en cada cara un número entero distinto: los números de las caras vecinas deben diferir por lo menos en 2. Hallar el valor mínimo que puede tener la suma de los seis números.

Nota: Las caras vecinas son las que tienen una arista común o un vértice común.

Solución.

Luis no puede usar 3 números consecutivos, n-1, n y n+1 pues tanto n-1 como n+1 deberían estar en la cara opuesta a n. Lo mejor para Luis es 1,2,4,5,7 y 8, poniendo los consecutivos en caras opuestas. El mínimo de la suma es 27.