Ecuaciones Funcionales Involucrando Funciones Trigonométricas y Exponenciales

Alexandra Kurepa

Abstract

Este artículo puede servir como una introducción al área de ecuaciones funcionales dando los ejemplos mas "naturales", aquellos involucrando funciones exponenciales y trigonométricas familiares para los estudiantes. Presentamos aquí una prueba alternativa del hecho de que el sistema de ecuaciones funcionales (1.1) y (1.2) en el conjunto de funciones continuas tiene las soluciones dadas por (1.3). La prueba es elemental, pero matemáticamente rigurosa, y por lo tanto, particularmente apropiada para estudiantes (secundarios) avanzados.

En este artículo consideramos funciones a valores reales C y S definidas sobre el conjunto de números reales $\mathcal{R}$ satisfaciendo las siguientes ecuaciones funcionales

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y) \tag{1.1}$$

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y) \tag{1.2}$$

para todo $x, y \in \mathcal{R}$. El nombre funcional proviene del hecho de que tanto en (1.1) como en (1.2) las incógnitas son funciones C y S.

Probamos el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Supongamos que $C, S: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ satisfacen (1.1), (1.2) y sea $C \neq 0$. Si C y S son funciones continuas sobre $\mathcal{R}$, entonces existen números reales*

$a > 0$ y α tales que

$$\begin{aligned} C(x) &= a^x \cos \alpha x \\ S(x) &= a^x \operatorname{sen} \alpha x \end{aligned} \tag{1.3}$$

para todo número real x.

Resultados Preliminares: La idea para el teorema proviene de un hecho fácilmente verificable que (1.3) satisface (1.1) y (1.2). A saber,

$$\begin{aligned} C(x+y) &= a^{x+y} \cos \alpha(x+y) = a^x a^y (\cos \alpha x \cos \alpha y - \operatorname{sen}\alpha x \operatorname{sen}\alpha y) \\ &= C(x)C(y) - S(x)S(y). \end{aligned}$$

Similarmente $S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$.

Ahora definimos una función $E: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ con la siguiente fórmula:

$$E(x) = \sqrt{C(x)^2 + S(x)^2}. \tag{1.4}$$

De (1.1) y (1.2) para todo x, $y \in \mathcal{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} E(x+y)^2 &= (C(x)C(y) - S(x)S(y))^2 + (S(x)C(y) + C(x)S(y))^2 \\ &= C(x)^2(C(y)^2 + S(y)^2) + S(x)^2(C(y)^2 + S(y)^2) \\ &= E(x)^2 E(y)^2. \end{aligned}$$

Así

$$E(x+y) = E(x)E(y) \tag{1.5}$$

para todo x, $y \in \mathcal{R}$. Tomando $x = y = 0$ en (1.5) vemos que $E(0) = E(0)^2$. Por lo tanto, o bien $E(0) = 0$ o $E(0) = 1$. Si $E(0) = 0$ entonces de (1.5) para $y = 0$ tenemos que para todo $x \in \mathcal{R}$, $E(x) = E(x+0) = E(x)E(0) = 0$. Así $E(x) = 0$. Por lo tanto $E(0) = 0$ implica que $C(x) = 0$ y $S(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$. Este caso trivial no es interesante así que asumiremos que por lo menos una de las funciones C, S no es idénticamente igual a 0, por lo tanto $E \neq 0$.

Supongamos que las funciones $C, S: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ satisfacen las ecuaciones funcionales (1.1) y (1.2) y que por lo menos una de las funciones C, S no es cero. Como $E(0) \neq 0$ y $E(0) = E(0)^2$ vemos que $E(0) = 1$. Así, de (1.1) y (1.2) para $x = y = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} C(0)^2 + S(0)^2 &= 1 \\ C(0)^2 - S(0)^2 &= C(0) \\ 2C(0)S(0) &= S(0) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Si asumimos que $S(0) \neq 0$, entonces de la última ecuación en (1.6) vemos que $C(0) = \frac{1}{2}$, y la segunda ecuación en (1.6) nos da $S(0)^2 = -\frac{1}{4}$ lo cual no es posible, pues $S(0)$ es un número real. Asi $S(0) = 0$. Consecuentemente, las dos primeras ecuaciones en (1.6) implican $C(0) = 1$. Luego

$$C(0) = 1, \quad S(0) = 0. \tag{1.7}$$

Si en (1.5) tomamos $y = -x$, obtenemos $E(x)E(-x) = 1$, por lo tanto $E(x) \neq 0$ y

$$(C(x)^2 + S(x)^2)(C(-x)^2 + S(-x)^2) = 1. \tag{1.8}$$

Por otro lado, si en (1.1) y (1.2) tomamos $y = -x$, entonces usando (1.7) inferimos

$$\begin{aligned} C(x)X - S(x)Y &= 1 \\ S(x)X + C(x)Y &= 0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde $X = C(-x)$ y $Y = S(-x)$.

La solución de (1.9) esta dada por

$$C(-x) = \frac{C(x)}{C(x)^2 + S(x)^2}, \quad S(-x) = -\frac{S(x)}{C(x)^2 + S(x)^2}. \tag{1.10}$$

Usando el hecho de que $E(x) = \sqrt{C(x)^2 + S(x)^2} > 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$, definimos las siguientes funciones

$$c(x) = \frac{C(x)}{\sqrt{C(x)^2 + S(x)^2}}, \quad s(x) = \frac{S(x)}{\sqrt{C(x)^2 + S(x)^2}}. \tag{1.11}$$

Puede verse fácilmente que c es par y s es impar, es decir $c(-x) = c(x)$, $s(-x) = -s(x)$. Además de (1.4) obtenemos que $c(x) = \frac{C(x)}{E(x)}$ y $s(x) = \frac{S(x)}{E(x)}$. Por lo tanto

$$c(x+y) = \frac{C(x+y)}{E(x+y)} = \frac{C(x)C(y) - S(x)S(y)}{E(x)E(y)} = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

Similarmente, se prueba que $s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$.

Por lo tanto,

$$C(x) = E(x)c(x), \quad S(x) = E(x)s(x) \tag{1.12}$$

donde $E, c, s \colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ satisfacen las siguientes ecuaciones funcionales

$$E(x+y) = E(x)E(y), E(0) = 1 \tag{1.13}$$

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y), \quad c(0) = 1 \tag{1.14}$$

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y), \quad s(0) = 0 \tag{1.15}$$

$$c(-x) = c(x), s(-x) = -s(x) \tag{1.16}$$

para cualesquiera x, $y \in \mathcal{R}$

Proposicion 1.2. *Si una función $E \colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ satisface (1.13) y si $E \neq 0$, entonces para todo número racional r tenemos*

$$E(r) = a^r,$$

donde $a = E(1)$. Además, si E es una función continua sobre $\mathcal{R}$, entonces $E(x) = a^x$ para todo $x \in \mathcal{R}$.

Prueba. Sea $a = E(1)$. Como $E \neq 0$ existe $x_0 \in \mathcal{R}$ tal que $E(x_0) \neq 0$. Así $E(0) = 1$. Usando inducción matemática se prueba que

$$E(nx) = E(x)^n \tag{1.17}$$

para todo número natural n y para cualquier número real x. De (1.17) para $x = 1$ obtenemos $E(n) = E(1)^n$, o

$$E(n) = a^n. \tag{1.18}$$

Además, de $E(x) = E\left(n\frac{x}{n}\right) = E\left(\frac{x}{n}\right)^n$ para todo número natural n obtenemos que $E(x) > 0$ y

$$E\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{E(x)}. \tag{1.19}$$

En particular para $x = 1$ inferimos que

$$E\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}. \tag{1.20}$$

Si $r = \frac{m}{n}$ es un número racional y m y n son números naturales entonces (1.17) y (1.20) implican que

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = E\left(m\frac{1}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}.$$

Así $E(r) = a^r$ para todo número racional $r > 0$. Si $r < 0$, entonces $E(-r)E(r) = E(0) = 1$ implica que $E(r) = \frac{1}{E(-r)} = \frac{1}{a^{-r}} = a^r$. Junto con $E(0) = 1 = a^0$, esto prueba que para todo número racional tenemos

$$E(r) = a^r. \tag{1.21}$$

Sea, ahora, x un número real cualquiera. Entonces existe una sucesión $\{r_n\}$ de números racionales tales que $x = \lim_{n\to\infty} r_n$. Si $x \mapsto E(x)$ es una función continua sobre $\mathcal{R}$ entonces usando la continuidad de $x \mapsto a^x$ y (1.21) tenemos

$$E(x) = \lim_{n\to\infty} E(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x.\square$$

Sean $c, s: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ funciones tales que para todo x, $y \in \mathcal{R}$ satisfacen (1.14), (1.15) y (1.16). Reemplazando y por $-y$ en (1.14) inferimos

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y). \tag{1.22}$$

Sumando (1.14) y (1.22) obtenemos

$$c(x+y) + c(x-y) = 2c(x)c(y) \tag{1.23}$$

para todo x, $y \in \mathcal{R}$. Es fácil de verificar que una función del tipo $c(x) = \cos \alpha x$ satisface la ecuación funcional (1.23) para cualquier $\alpha \in \mathcal{R}$.

Proposicion 1.3. *Si una función $c: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ satisface las ecuaciones funcionales (1.23), $c(0) = 1$ y si existe un número natural n_0 tal que para todo entero $n \geq n_0$ se tenga $c\left(\frac{1}{2^n}\right) > 0$ y $c\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) \leq 1$ entonces existe un número real α tal que*

$$c\left(\frac{m}{2^n}\right) = \cos\left(\alpha \frac{m}{2^n}\right) \tag{1.24}$$

para todos los enteros m y n.

Prueba. De (1.23) vemos que c es una función par, y que para $x = y$ tenemos

$$c(x)^2 = \frac{1 + c(2x)}{2}. \tag{1.25}$$

Como la función $x \mapsto \cos x$ mapea el intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$ sobre $(0, 1]$ y $1 \geq c\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) > 0$, entonces existe un número real $\beta \in [0, \frac{\pi}{2})$ tal que $c\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = \cos \beta$. Por otro lado, si en (1.25) tomamos $x = \frac{1}{2^{n_0+1}}$ vemos que

$$c\left(\frac{1}{2^{n_0+1}}\right)^2 = \frac{1 + c(\frac{1}{2^{n_0}})}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{2} = \cos^2 \frac{\beta}{2}.$$

Como $c\left(\frac{1}{2^{n_0+1}}\right) > 0$ y $\cos \frac{\beta}{2} > 0$ entonces $c\left(\frac{1}{2^{n_0+1}}\right) = \cos \frac{\beta}{2}$.

Supongamos que para un número natural k tenemos

$$c\left(\frac{1}{2^{n_0+k}}\right) = \cos \frac{\beta}{2^k}. \tag{1.26}$$

Entonces, de (1.25) para $x = \frac{1}{2^{n_0+k+1}}$ obtenemos

$$c\left(\frac{1}{2^{n_0+k+1}}\right)^2 = \frac{1 + c(\frac{1}{2^{n_0+k}})}{2} = \frac{1 + \cos\frac{\beta}{2^k}}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2^{k+1}}.$$

Así, $c\left(\frac{1}{2^{n_0+k+1}}\right) = \cos\frac{\beta}{2^{k+1}}$, lo cual prueba por inducción matemática que (1.26) se cumple para todo número natural k.

Como $c(2x) = 2c(x)^2 - 1$, para $x = \frac{1}{2^{n_0+k}}$ tenemos

$$c\left(\frac{2}{2^{n_0+k}}\right) = 2c\left(\frac{1}{2^{n_0+k}}\right)^2 - 1 = 2\cos^2\frac{\beta}{2^k} - 1 = \cos\left(\frac{2}{2^k}\beta\right).$$

Supongamos que $c\left(\frac{p}{2^{n_0+k}}\right) = \cos\left(\frac{p}{2^k}\beta\right)$ para todo número natural $1 < p \le m$. De (1.23) para $x = \frac{m}{2^{n_0+k}}$, $y = \frac{1}{2^{n_0+k}}$ vemos que

$$\begin{aligned} c\left(\frac{m+1}{2^{n_0+k}}\right) &= 2c\left(\frac{m}{2^{n_0+k}}\right)c\left(\frac{1}{2^{n_0+k}}\right) - c\left(\frac{m-1}{2^{n_0+k}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{m}{2^k}\beta\right)\cos\frac{\beta}{2^k} - \cos\left(\frac{m-1}{2^k}\beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{m+1}{2^k}\beta\right). \end{aligned}$$

Así $c\left(\frac{m}{2^{n_0+k}}\right) = \cos\left(\beta\frac{m}{2^k}\right)$, para todo número natural m. Reemplazando m por $2^{n_0}m$, obtenemos $c\left(\frac{m}{2^n}\right) = \cos\left(\alpha\frac{m}{2^n}\right)$, donde $\alpha = 2^{n_0}\beta$ y m, k son números naturales cualesquiera. Como $c(0) = 1$ y c es función una función par, concluimos que

$$c(r) = \cos\alpha r \tag{1.27}$$

para todo número real r de la forma $r = \frac{m}{2^n}$ donde m y n son enteros. □

Corolario 1.4. *Si una función $c: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ satisface la ecuación funcional (1.23), $c(0) = 1$, $|c(x)| \le 1$ y si c es una función continua sobre $\mathcal{R}$ entonces para todo $x \in \mathcal{R}$ existe $\alpha \in \mathcal{R}$ tal que*

$$c(x) = \cos\alpha x.$$

Prueba. Como c es continua, vemos que $\lim_{n\to\infty} c\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1$. Así, existe un número natural n_0 tal que $c\left(\frac{1}{2^n}\right) > 0$ para todo $n \geq n_0$. Además, como $|c(x)| \leq 1$, implica que $c\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq 1$, por Proposición 1.3 existe un número real α tal que $c(r) = \cos \alpha r$ para todo número real r de la forma $r = \frac{m}{2^n}$ donde m y n son enteros (ver (1.27)). Si x es un número real cualquiera entonces existe una secuencia $\{x_k\}$ de números de la forma $\frac{m}{2^n}$ tales que $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Por lo tanto,

$$c(x) = \lim_{k\to\infty} c(x_k) = \lim_{k\to\infty} \cos \alpha x_k = \cos(\alpha \lim_{k\to\infty} x_m) = \cos \alpha x$$

para todo $x \in \mathcal{R}$. □

Corolario 1.5. *Si las funciones $c, s\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ satisfacen las ecuaciones (1.14), (1.15), (1.16) y si c es una función continua sobre $\mathcal{R}$ entonces existe un número real α tal que*

$$c(x) = \cos \alpha x, \quad s(x) = \operatorname{sen} \alpha x$$

para cualquier $x \in \mathcal{R}$.

Prueba. De (1.14) y (1.16) para $y = -x$ vemos que $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$, por lo tanto $|c(x)| \leq 1$. Por el Corolario 1.4 existe un número $\gamma \in \mathcal{R}$ tal que $c(x) = \cos \gamma x$ para todo $x \in \mathcal{R}$. Si $s(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$, entonces $c(x)^2 = 1$ para todo $x \in \mathcal{R}$. Como $c(0) = 1$ y c es una función continua sobre $\mathcal{R}$ de $c(x) = \pm 1$ concluimos que $c(x) = 1$ para todo $x \in \mathcal{R}$. Así, $c(x) = \cos \alpha x$, $s(x) = \operatorname{sen} \alpha x$ para $\alpha = 0$ y para todo $x \in \mathcal{R}$.

Si existe $y \in \mathcal{R}$ tal que $s(y) \neq 0$ entonces de (1.14) inferimos que

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{c(x)c(y) - c(x+y)}{s(y)} = \frac{\cos \gamma x \cos \gamma y - \cos \gamma (x+y)}{s(y)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \gamma y}{s(y)} \operatorname{sen} \gamma x \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{R}$.

Por otro lado, $s(x)^2 = 1 - c(x)^2 = 1 - \cos^2 \gamma x = \operatorname{sen}^2 \gamma x$. Así, $\operatorname{sen}^2 \gamma x = \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \gamma x$ para todo $x \in \mathcal{R}$, donde $\lambda = \frac{\operatorname{sen} \gamma y}{s(y)}$. Por lo tanto, $\lambda^2 = 1$.

Así, para $\lambda = 1$, vemos que $s(x) = \text{sen}\gamma x$ para todo $x \in \mathcal{R}$, y para $\lambda = -1$ tenemos $s(x) = -\text{sen}\gamma x = \text{sen}(-\gamma x)$ para todo $x \in \mathcal{R}$. Si tomamos $\alpha = \gamma$ en el primer caso y $\alpha = -\gamma$ en el segundo obtenemos

$$c(x) = \cos \alpha x \quad \text{and } s(x) = \text{sen}\alpha x$$

para todo $x \in \mathcal{R}$. □

Teorema 1.1 sigue de (1.12), Proposición 1.2 y Corolario 1.5.

Observación 1.6. *En el Teorema 1.1 es suficiente asumir que C es continua sobre $\mathcal{R}$. Si $S = 0$ entonces S también es continua sobre $\mathcal{R}$, y consecuentemente $\alpha = 0$. Si $S \neq 0$ entonces existe $y \in \mathcal{R}$ tal que $S(y) \neq 0$, así de $C(x + y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$ vemos que*

$$S(x) = \frac{C(x)C(y) - C(x + y)}{S(y)}.$$

Esta ecuación junto con la continuidad de C sobre $\mathcal{R}$, implica que la función S es continua sobre $\mathcal{R}$.

Observación 1.7. *El resultado en el Teorema 1.1 puede también ser obtenido asumiendo la continuidad de C y S en un punto, digamos x_0. De hecho, tenemos*

$$C(x + h) = C(x - x_0 + x_0 + h) = C(x - x_0)C(x_0 + h) - S(x - x_0)S(x_0 + h),$$

así

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} C(x + h) &= C(x - x_0) \lim_{h\to 0} C(x_0 + h) - S(x - x_0) \lim_{h\to 0} S(x_0 + h) \\ &= C(x - x_0)C(x_0) - S(x - x_0) = C(x). \end{aligned}$$

La autora desea agradecer al referee por la Observación 1.7.

Referencias

1. J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications,* Academic Press, New York y London 1966.

2. J. Aczél y J. Dhombres, *Funcional Equations in several variables,* Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne y Sidney 1989.

Department of Mathematics, North Carolina A&T State University, Greensboro, NC 27411, U.S.A.
e-mail:Kurepaa@athena.ncat.edu