Pretorneo de las ciudades

Los siguientes problemas formaron parte del Pretorneo de las ciudades, realizado en abril de 1993.

Problema 2 (nivel juvenil).

Probar que todo entero positivo m tiene un múltiplo M tal que la suma de las cifras de M es impar.

Solución.

Caso 1: Si m es coprimo con 10. El dígito de las unidades de m puede ser 1, 3, 7 ó 9 y por lo tanto uno de los siguientes números tiene un 9 en las unidades: $9m, 3m, 7m$ ó m. Llamemos a al múltiplo de m que tiene un 9 en las unidades.

a y 11a tienen 9 en las unidades, pero al menos uno de ellos no tiene un 9 en las decenas. Llamemos b al múltiplo de a (y por lo tanto, de m) que tiene 9 en las unidades y no tiene 9 en las decenas.

Si la suma de los dígitos de alguno de los múltiplos de m que consideramos hasta ahora es impar, no hay nada más que probar.

Supongamos entonces que la suma de los dígitos de todos los múltiplos de m que consideramos hasta ahora es par.

Consideramos el siguiente múltiplo de m : $c = 10^{n-1}b + m$, donde n es la cantidad de dígitos que tiene m. Observemos que $10^{n-1}b$ es b seguido de $n - 1$ ceros; entonces, al sumarle m, el dígito de la izquierda de m se posiciona para la suma con el dígito de las unidades de b (que es 9). Hay que llevarse 1, pero como el dígito de las decenas de b no es 9, de ahí en más no hay que llevarse nada. Entonces la suma de los dígitos de c es igual a la suma de los dígitos de b (que es par) más la suma de los dígitos de m (también par) menos 9. Por lo tanto la suma de los dígitos de c es impar.

Caso 2: Si $m = 2^i 5^j p$, con p coprimo con 10. Según vimos en el caso 1, hay un múltiplo de p, digamos q, que tiene la suma de los dígitos impar. Tomamos k = max $\{i; j\}$ y observamos que 10^k q es un múltiplo de m y la suma de sus dígitos coincide con la suma de los dígitos de q, que es impar.

Problema 3 (nivel juvenil).

Se tiene un tablero de nxn casillas que tiene escritos "1" en las casillas de una diagonal y "0" en todas las casillas restantes.

En cada paso se cambian algunos números del tablero de la siguiente manera:

> Se marca un "camino de torre" cerrado, o sea una línea quebrada cerrada que une centros de casillas, cuyos segmentos son paralelos a los bordes del tablero, y se le suma "1" a los números ubicados en las casillas del camino.

¿Es posible que después de varios pasos todas las casillas tengan escrito un mismo número?

Solución.

Pintemos las casillas de negro o blanco, al estilo del tablero de ajedrez. Los "1" iniciales están en casillas del mismo color, digamos negras. Entonces la suma de los números de las casillas negras es superior a la de las casillas blancas. Un "camino de torre" contiene igual cantidad de casillas negras y blancas, por lo tanto esta diferencia en las sumas se mantiene a lo largo del proceso. Por lo tanto, si n es par es imposible conseguir que todos los números sean iguales.

Probaremos que para tableros de 2 m+1 por 2 m+1 la tarea es posible. Más aún, también es posible si al comienzo los "1" de las esquinas se reemplazan por cualquier entero "a" y los ceros de los bordes se reemplazan por cualquier entero $b < \dfrac{a+1}{2}$.

Usaremos inducción en m. Para m = 1, tomamos a-b veces el "camino de torre" de la figura 1 y luego a-b veces el "camino de torre" de la figura 2. Con esto tenemos números iguales entre si en los bordes. A continuación, consideramos el borde como "camino de torre" a-2b+1 veces y de este modo en todas las casillas nos queda el número "2a-2b+1". (Notar que x=a-b+1; y = 2a-2b+1).

a	b	b
b	1	b
b	b	a

Figura 1

a	b	b
a	x	b
a	a	a

Figura 2

a	a	a
a	y	a
a	a	a

Figura 3

El caso m = 2 se ilustra en las figuras 4 a 6. Para valores mayores de m se procede de la misma manera. (x e y son como antes; z = a-b).

a	b	b	b	b
b	1	0	0	b
b	0	1	0	b
b	0	0	1	b
b	b	b	b	a

Figura 4

a	b	b	b	b
a	x	0	0	b
a	z	1	0	b
a	z	z	x	b
a	a	a	a	a

Figura 5

a	a	a	a	a
a	y	z	z	a
a	z	1	z	a
a	z	z	y	a
a	a	a	a	a

Figura 6

Como $a-b < \dfrac{2a-2b+1+1}{2}$, se puede repetir el argumento inductivo hasta obtener anillos concéntricos con los bordes del tablero, con casillas que tienen el mismo número.

Estos anillos concéntricos son "caminos de torre", de modo que es fácil completar la demostación.

Problema 4 (nivel juvenil).

Se da una línea quebrada $ABCD$ en el plano, con $AB = BC = CD = 1$ y $AD \neq 1$.

Las posiciones de B y C quedan fijas, pero A y D se cambian de acuerdo con la siguiente regla:

> Se refleja A respecto de la recta BD y se refleja D respecto de la recta AC (para la nueva posición de A). Luego se refleja el nuevo A respecto de la recta BD (para la nueva posición de D); se refleja el nuevo D respecto de la recta AC (para la nueva posición de A), etc.

Probar que después de varios pasos A y D coinciden con sus posiciones iniciales.

NOTA: los sucesivos cambios preservan la condición AB=BC=CD=1 y AD $\neq$ 1.

Solución.

Los puntos $C, A_0, A_1, A_2, \ldots$ están todos en una circunferencia ω de centro B y radio 1. Análogamente, los puntos $B, D_0, D_1, D_2, \ldots$ están todos en una circunferencia ω' de centro C y radio 1. La condición $A_0D_0 \neq 1$ asegura que $A_n \neq C$ y $D_n \neq B$ para todo n.

En el caso especial que A_0 es diametralmente opuesto a C y D_0 es diametralmente opuesto a B, tenemos directamente que $A_0 = A_1$ y $D_0 = D_1$.

En otro caso, sean E_0, E_1 y E_2 las intersecciones de D_0B, D_1B y D_2B con ω respectivamente, y sean F_1 y F_2 las intersecciones de A_1C y A_2C con ω' respectivamente. Denotemos (PQ) a la longitud del arco dirigido

PQ medido en sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces:

$$(A_0E_0) = (E_0A_1), (A_1E_1) = (E_1A_2), (D_0F_1) = (F_1D_1) \text{ y } (D_1F_2) = (F_2D_2)$$

$D_0\widehat{B}D_1$ es un ángulo central de la circunferencia de radio 1 y $E_0\widehat{B}E_1$ es un ángulo inscripto en la circunferencia de radio 1, como $D_0\widehat{B}D_1 = E_0\widehat{B}E_1$, tenemos que $(E_0E_1) = \dfrac{(D_0D_1)}{2} = (F_1D_1)$.
Análogamente, $(E_1E_2) = (D_1F_2)$ y $(F_1F_2) = (A_1E_1)$.
Ahora,

$$(A_0A_2) = (A_0E_0)+(E_0E_1)+(E_1A_2) = (E_0A_1)+(E_0E_1)+(A_1E_1) = 2(E_0E_1)$$

Por otro lado,

$$(E_1E_2) = (D_1F_2) = (D_1F_1) + (F_1F_2) = (E_1E_0) + (A_1E_1) = (A_1E_0)$$

y se sigue que:

$$(A_0E_2) = (A_0E_0)+(E_0E_1)+(E_1E_2) = (E_0A_1)+(E_0E_1)+(A_1E_0) = (E_0E_1)$$

Entonces $(A_0A_2) = 2(A_0E_2)$. Por lo tanto, E_2 es el punto medio del arco A_0A_2, de modo que $A_3 = A_0$.
Con argumentos similares se obtiene que $D_3 = D_0$.

Problema 2 (nivel mayor).
¿Para qué valores de n es posible construir un cubo de nxnxn cubitos de lado 1, de color blanco o negro, de tal modo que cada cubito comparta una cara en común con exactamente 3 cubitos del color opuesto al suyo?

Solución.
La construcción es posible para n par.
Veamos que si n es par la construcción es posible:

Si n = 2, los ocho cubitos son:

(1,1,1); (1,1,2); (1,2,1); (1,2,2); (2,1,1); (2,1,2); (2,2,1); (2,2,2).

Son negros:

(1,1,1); (1,2,2); (2,1,2); (2,2,1).

Son blancos:

(1,1,2); (1,2,1); (2,1,1); (2,2,2).

Si $n > 2$: Se arma primero un prisma de 2x2xn, apilando cubos de 2x2x2 de modo que en la cara común sean simétricos respecto de esa cara. Luego se arma un prisma de 2xnxn, apilando prismas de 2x2xn de modo que en la cara común sean simétricos respecto de esa cara. Por último, se arma el cubo de nxnxn con prismas de 2xnxn.

La condición de "simetría" hace que en cada paso no se modifique la cantidad de caras de color opuesto al suyo que cada cubito tiene en la estructura original.

Veamos que si n es impar la construcción es imposible:

Sea b la cantidad de cubitos blancos y g la cantidad de cubitos negros.

$$b + g = n^3$$

Para cada cubito blanco, contamos los cubitos negros que tienen cara común con él: son 3 para cada uno, lo que hace un total de 3b.

Cada cubito negro ha sido contado exactamente 3 veces. Por lo tanto:

$3b = 3g \Rightarrow b = g \Rightarrow n^3 = 2b$ ¡ Absurdo!

Problema 3 (nivel mayor).

Sea la sucesión a_n definida por:

$$a_1 = 1;\ a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}], n = 1, 2, 3, ...$$

¿Cuántos cuadrados perfectos menores o iguales que 1 000 000 hay en la sucesión?

NOTA: x Denota la parte entera del número x.

Solución.

Tenemos que $a_0 = (2^0)^2$, $a_4 = (2^1)^2$, $a_9 = (2^2)^2$ y $a_{18} = (2^3)^2$.

Afirmamos que los cuadrados en $\{a_n\}$ son exactamente los cuadrados de las potencias de 2.

Supongamos que $a_n = m^2$ con $m = 2^k$ para ciertos valores de m, n y k.

Probaremos por inducción en t que:

Si $0 \leq t \leq m, a_{n+2t+1} = (m+t)^2 + m - t < (m+t+1)^2$ y

$a_{n+2t+2} = (m+t)^2 + 2m < (m+t+1)^2$.

Para $t = 0$, $a_{n+1} = m^2 + m < (m+1)^2$ y $a_{n+2} = m^2 + 2m < (m+1)^2$.

Si suponemos que el resultado es cierto para un $t, 0 \leq t < m$, entonces

$a_{n+2(t+1)+1} = (m+t)^2 + 3m + t = (m+t+1)^2 + m - (t+1) < (m+t+2)^2$

Y por otro lado

$a_{n+2(t+1)+2} = (m+t)^2 + 4m + 2t + 1 = (m+t+1)^2 + 2m < (m+t+2)^2$

Con esto se completa el argumento inductivo.

Entonces ninguno de los números $a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{n+2m}$ es un cuadrado, y el siguiente cuadrado es $a_{n+2m+1} = (m+m)^2 = (2^{k+1})^2$.

Lo único que nos falta calcular es cuántos cuadrados que son potencias de 2 son menores que 10^6, o sea, cuantas potencias de 2 son menores que 10^3 : son 10, desde 2^0 hasta 2^9.