NOTAS SOBRE CUERPOS ORDENADOS

ENZO R. GENTILE

I. INTRODUCCION. CUERPOS ORDENADOS, REALES Y ARQUIMEDIANIDAD.

En toda la exposición designaremos por K a un cuerpo (conmutativo). Una relación binaria $\leq$ en K se denomina un <u>orden</u> si, cualesquiera sean $a, b, c \in K$, se satisfacen:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ a \leq a \\ 2.\ a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c \\ 3.\ a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b \end{array}\right\} \text{Axiomas de orden}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ a \leq b \text{ ó } b \leq a \end{array}\right\} \text{Axioma de orden total}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \\ 6.\ 0 \leq a,\ 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a.b \end{array}\right\} \text{Axiomas de compatibilidad}$$

Un cuerpo K se dice <u>ordenado</u> si posee alguna relación de orden. En un cuerpo pueden existir: ningún orden, un sólo orden, un número finito de órdenes, infinitos órdenes. Es posible dar ejemplos de todas esas situaciones. Por ejemplo si K es un cuerpo con la propiedad que $n.1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = 0$, para algún número natural n, entonces K no admite ningún orden. En particular ningún cuerpo finito ni ningún cuerpo de características finita posee órdenes.

Demos una demostración de este hecho. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.1 = 1 + \ldots + 1$ (n veces) $= 0$ en K. Se sigue de 4. y 6. que $0 \leq 1$. Por lo tanto

$$(n - 1).1 + 0 \leq (n - 1).1 + 1 = n.1$$

o sea

$$(n - 1).1 \leq 0.$$

Por otra parte

$$0 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 \leq 1 + 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + 1 \leq 1 + 1 + 1 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots 0 \leq (n - 1).1.$$

Concluímos que

$$(n - 1).1 = 0,$$

como

$$n.1 = 0,$$

se sigue finalmente que

$$1 = 0,$$

una contradicción.

El cuerpo complejo C no posee ningún orden. En efecto, como vimos antes se verifica que $0 \leq 1$. O sea $-1 \leq 0$. Sea $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$. Si $0 \leq i$ entonces $0 \leq i.i = -1$. Luego $-1 = 0$, o también $1 = 0$, un absurdo.

Sea $i \leq 0$, por lo tanto $0 \leq -i$ y también $0 \leq -i.-i = -1$. Otra vez se sigue $1 = 0$. Por lo tanto ningún orden es posible en C.

Pregunta: ¿Habrá relaciones binarias en $\mathbb{C}$ que satisfacen solamente 1. a 5.?

Sea K un cuerpo con una relación de orden $\leq$. Si $a \leq b$ y $a \neq b$ escribimos $a < b$. Dejamos a cargo del lector probar las relaciones:

i. $a \neq 0 \Rightarrow 0 < a^2$

ii. $0 < 1$,

iii. Sean $a_1, \ldots, a_n \in K$. Entonces $0 \leq a_1^2 + \ldots + a_n^2$, con $0 = a_1^2 + \ldots + a_n^2$ sí y sólo si $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Hablar de cuerpos ordenados significa pensar en los números reales. La relación de orden de este cuerpo es una de las características salientes. Por ejemplo, el orden en $\mathbb{R}$ define el valor absoluto $|r|$ y con este valor absoluto se define una <u>distancia</u> <u>o</u> <u>métrica</u> en $\mathbb{R}$, a saber, la distancia entre r_1 y r_2 es el número real $|r_1 - r_2|$. La importancia de poseer una distancia se traduce en todo un inmenso Capítulo de la Matemática: el <u>análisis</u> <u>real</u>.

Por supuesto que los subcuerpos de $\mathbb{R}$ heredan propiedades de orden y son también cuerpos ordenados. Ahora bien, en los subcuerpos de $\mathbb{R}$ y por supuesto el mismo $\mathbb{R}$ el orden tiene una peculiaridad: es <u>arquimediano</u>. O sea, se satisfacen las propiedades siguientes, equivalentes entre sí:

i. Para todo $r \in \mathbb{R}^+$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r < n$. ($\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} / 0 < r\}$).

ii. $\mathbb{N}$ no está acotado en $\mathbb{R}$.

iii. Para todo $r \in \mathbb{R}^+$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.r > 1$.

Una propiedad equivalente a la arquimedianidad en $\mathbb{R}$, es la <u>densidad</u> <u>de</u> $\mathbb{Q}$ (los números racionales) <u>en</u> <u>el</u> <u>orden</u> <u>de</u> $\mathbb{R}$: dados $r_1 < r_2$ en $\mathbb{R}$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $r_1 < q < r_2$. Gracias a la arquimedianidad del orden de $\mathbb{R}$ podemos probar, por ejemplo, que la sucesión $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ tiende a cero. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe un entero $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/\varepsilon < n$, o sea $1/n < \varepsilon$. Por lo tanto todo el segmento de sucesión $1/n, 1/n + 1, \ldots$ está contenido en $(0, \varepsilon)$.

La teoría muestra que para todo cuerpo ordenado K, arquimediano, existe un morfismo "ordenado" $f: K \to \mathbb{R}$, es decir un morfismo de cuerpos que respeta los órdenes: $x < y$ en $K \Rightarrow f(x) < f(y)$ en $\mathbb{R}$. O sea, todos los cuerpos ordenados arquimedianos son isomorfos a subcuerpos de $\mathbb{R}$.

Sea K un cuerpo ordenado con una relación de orden.

Notación: $x < y$ sii $x \leq y$ y $x \neq y$

$x > y$ sii $y < x$.

Se sigue de las propiedades de $\leq$ que:

i. $a \neq 0 \Rightarrow 0 < a^2$

ii. $a_1, \ldots, a_n \in K$, no todos cero $\Rightarrow 0 < a_1^2 + \ldots + a_n^2$

iii. $0 < 1$

iv. $0 < 1 + \ldots + 1$ (n veces) $= n.1$, con lo que K es un cuerpo de característica 0.

Se sigue de iv. que K contiene una "copia" de $\mathbb{N}$ y por supuesto de Q. O sea Q es subcuerpo de K. Podemos entonces analizar la propiedad de arquimedianidad de K, respecto de Q. Si K es un cuerpo con un orden $\leq$, diremos entonces que K es arquimediano, si para todo $x \in K$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $x < n$. En forma equivalente si Q es denso en el orden $\leq$, o sea $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow$ existe $q \in Q$ con $x_1 < q < x_2$. Notemos que en un mismo cuerpo K pueden existir distintos ordenes tales que K es arquimediano respecto de unos pero no de otros.

En general dado un cuerpo K y un subcuerpo F se define la propiedad de ser K arquimediano respecto de F si para todo $x \in K$, $0 < x$ existe $f \in F$ tal que $x < f$.

La propiedad ii. de más arriba dice que en un cuerpo ordenado una suma de cuadrados es cero sí y sólo si todos los sumandos son ceros. Es interesante señalar un célebre Teorema de Artin-Schreier que establece la recíproca, es decir, si K es un cuerpo con la propiedad que suma de cuadrados es igual a cero sólo si todos los sumandos son ceros entonces existe en K una relación de orden y K es un cuerpo ordenado. Un resultado análogo establece que si K es un cuerpo y a es un elemento en K con la propiedad de ser positivo en <u>todos</u> los ordenes de K, entonces a es una suma de cuadrados en K.

Los cuerpos K con la propiedad que $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$, se denominan <u>cuerpos formalmente reales</u> o simplemente <u>cuerpos reales</u>. El Teorema de Artin-Schreier establece una equivalencia entre cuerpos ordenados y cuerpos reales. Señalemos que la teoría de cuerpos reales es una rama importante de la teoría de cuerpos y donde se desarrolla una intensa labor de investigación. Las derivaciones más importantes de esta teoría son la geometría algebraica <u>real</u>, el álgebra real y el análisis no arquimediano o no normal (Non-standard Analysis).

El objeto de estas Notas es mostrar "otra" cara de la moneda, a saber, cuerpos <u>no arquimedianos</u>. Esto no es una curiosidad, es un campo de intensa investigación. Vinculado a esto está el llamado Análisis No Normal que no solamente es una nueva rama del análisis sino que introduce profundos principios dentro de la Matemática al considerar modelos no normales de los modelos tradicionales.

En un cuerpo K pueden existir muchos órdenes y entonces es conveniente utilizar otra formalización. Introduciremos la noción de <u>cono de positividad</u> o simplemente <u>cono</u> para definir un orden. Entonces un subconjunto $P \subset K$ se dirá <u>cono de positividad</u> si verifica las propiedades siguientes:

$P + P \subset P$ es decir $p_1, p_2 \in P \Rightarrow p_1 + p_2 \in P$

$P.P \subset P$ es decir $p_1, p_2 \in P \Rightarrow p_1 . p_2 \in P$

$-1 \notin P \Longleftrightarrow P \cap -P = \{0\}$ es decir $p_1, p_2 \in P, p_1 = = -p_2 \Rightarrow p_1 = p_2 = 0$

$P \cup -P = K$ es decir $x \in K \Rightarrow x \in P$ ó $-x \in P$.

Si $\leq$ es una relación de orden en K entonces $P := \{x \in K \mid 0 \leq x\}$ es un cono de positividad. Recíprocamente si P es un cono de positividad la relación binaria $a \leq b$ si $b - a \in P$, es una relación de orden en K.

Hay pues correspondencia biyectiva entre órdenes en K y conos de positividad de K.

<u>Ejercicio</u>. Sean K y L cuerpos y sea $t: K \to L$ un isomorfismo. Sea P un cono de positividad en K. Probar que $t(P)$ es un cono de positividad en L.

<u>Ejercicio</u>. Sea P un cono de positividad de K. Sea $P^{\cdot} := P \setminus \{0\}$. $P^{\cdot}$ no es otra cosa que la totalidad de elementos positivos del orden asociado.

Probar que $P^{\cdot}$ es un subgrupo de $K^{\cdot} := K \setminus \{0\}$ de índice 2. Recíprocamente, los subgrupos $G \subset K^{\cdot}$, de índice 2 tales que $G + G \subset G$ y $-1 \notin G$ definen conos de positividad de K.

<u>Ejercicio</u>. i) Sea K un cuerpo real. Sea $\mathbb{F}$ la familia de subconjuntos $T \subset K$ que satisfacen: $T + T \subset T$, $T.T \subset T$, $-1 \notin T$. Probar que $\mathbb{F} \neq \phi$. Ordenamos $\mathbb{F}$ por la relación de inclusión. Probar la existencia en $\mathbb{F}$ de un P maximal respecto de ese orden. Deducir que P es un cono de positividad de K.

ii) Sea K un cuerpo y sea $a \in K$ con la propiedad que a es positivo en todos los ordenes de K. Probar que a es suma de cuadrados en K.

<u>Nota</u>: Razonar también el caso en que K no posee ningún orden.

iii) Sea K un cuerpo con un único orden. Probar que todo elemento positivo es suma de cuadrados.

Un problema general de la teoría es el siguiente: dado un cuerpo K determinar todos sus órdenes. En esta Nota daremos un ejemplo de cuerpo K con un conjunto no numerable de órdenes. Se trata del cuerpo de funciones racionales reales $\mathbb{R}(X)$ que no es otra cosa que el cuerpo de cocientes del anillo de polinomios $\mathbb{R}[X]$. Es este un ejemplo obligado para entender los principios de la teoría de cuerpos ordenados. Otro ejemplo un poco más complicado es $\mathbb{Q}(X)$. Veamos algunos ejemplos corrientes fáciles.

i. $K = \mathbb{Q}$, el cuerpo racional. Posee un único orden cuyos elementos positivos $P^{\cdot}$ son las fracciones representables por cocientes $\frac{m}{n}$ con $n, m \in \mathbb{N}$.
Dado que $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m = 1 + \ldots + 1 = 1^2 + \ldots 1^2$, de $\frac{m}{n} = \frac{m.n}{n^2}$ se sigue que todo elemento de P es suma de cuadrados.

ii. $K = \mathbb{R}$ el cuerpo real. Posee un único orden cuyos elementos positivos $P^{\cdot}$ son los cuadrados $x \in P^{\cdot} \Leftrightarrow x = y^2$, con $y \in R^{\cdot}$.

iii. Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ el cuerpo de números
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{r + s.\sqrt{2} \ / \ r, s \in Q\}$.
En $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ hay dos únicos ordenes:

$$P^{\cdot}_1 = \{r + s.\sqrt{2} \ / \ r + s.\sqrt{2} > 0 \text{ "en } \mathbb{R}\text{"}\}$$

$$P^{\cdot}_2 = \{r + s.\sqrt{2} \ / \ r - s.\sqrt{2} > 0 \text{ "en } \mathbb{R}\text{"}\}$$

Notar que la aplicación en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: $r + s.\sqrt{2} \longrightarrow r - s.\sqrt{2}$ es un automorfismo y transforma P_1 en P_2.

<u>Nota para el lector informado</u>. Sea F una extensión del cuerpo $\mathbb{Q}$ obtenida adjuntando la raíz θ de un polinomio irreductible $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Si F es un cuerpo ordenado entonces es arquimediano respecto a ese orden y por lo tanto admite una inmersión en $\mathbb{R}$, o sea existe un isomorfismo de F en $\mathbb{R}$.

Recíprocamente cada isomorfismo de F en $\mathbb{R}$ induce un orden en F por la simple condición que un elemento en F es positivo sí y sólo si su imagen por el isomorfismo así lo es. Por lo tanto hay una correspondencia biyectiva entre ordenes definidos en F e inmersiones de F en $\mathbb{R}$. Puesto que cada innmersión aplica θ en otra raíz de $f(X)$, se concluye que hay tantos ordenes en F como raices reales tiene $f(X)$. En particular el número de ordenes es menor o igual que el grado de $f(X)$.

Es interesante señalar que dentro del esquema de la Matemática Moderna lo que corresponde estudiar es la totalidad $X(K)$ de ordenes en K. Esta idea ha sido fructífera dado que es posible introducir en $X(K)$ una topología en forma completamente natural. Para los conocedores de nociones topológicas digamos que una sub-base de esta topología se obtiene considerando, para cada $a \in K$, los subconjuntos de $X(K)$,

$$H(a) := \{P \in X(K) \ / \ a \in P\}$$

y tomando intersecciones finitas de éstos. O sea, los abiertos de $X(K)$ son las uniones de intersecciones finitas de $H(a)$. Dado que $H(a) \cup H(-a) = X(\mathbb{R})$, los conjuntos $H(a)$ son abiertos y cerrados. La topología es totalmente disconexa. Por ejemplo en el cuerpo numérico $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots)$ obtenido adjuntando a $\mathbb{Q}$ las raíces cuadradas de los primos positivos, los órdenes están en correspondencia biyectiva con las sucesiones numerables de 1 y -1. El espacio $X(K)$ de órdenes de K es "homeomorfo" al conjunto ternario de Cantor!

Todo esto ha permitido introducir métodos topológicos en el estudio de órdenes de un cuerpo.

II. ASPECTOS HISTORICOS.

Algunas consideraciones históricas en la teoría de cuerpos ordenados son las siguientes. A fines del siglo pasado el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) en su axiomatización de la geometría euclídea en su obra Fundamentos de la Geometría introduce la noción de cuerpo ordenado: "un cuerpo K dotado de una relación binaria que satisface las propiedades:

i. Tricotomía: $a \neq b \Rightarrow a > b$ ó $b > a$,

ii. Transitividad: $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$,

iii. $a > b \Rightarrow a + c > b + c$,

iv. $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$" .

Hilbert exhibe también allí el primer ejemplo de anillo de división ordenado no conmutativo y demuestra que todo anillo de división ordenado arquimediano es conmutativo. La contribución más importante de Hilbert a esta teoría está en su famoso problema 17, uno de los 23 problemas que presentó en su conferencia en la Reunión Matemática Internacional de París del año 1900. Es un ejemplo de algo que insistimos contínuamente referente al devenir matemático. La matemática es una ciencia que resuelve problemas creando teorías. Hilbert fue un verdadero maestro en el arte de formular problemas con ese fin. Su problema 17 pregunta si es cierto que en el cuerpo $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$ de funciones racionales, o sea de cocientes de polinomios reales en n indeterminadas, un polinomio $f(X_1, \ldots, X_n)$ tal que

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \text{ para toda n-upla } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

es necesariamente <u>suma de cuadrados</u> en $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$.

En la década del 20, Emil Artin y Otto Schreier iniciaron el desarrollo de una teoría de cuerpos ordenados y fue Artin quien resolvió finalmente el problema 17 en la afirmativa.

La Teoría de Artin-Schreier proveyó el bagaje fundamental para el desarrollo de la Teoría de Cuerpos Ordenados. Por ejemplo la introducción de los <u>cuerpos reales cerrados</u>, objetos enteramente análogos a los números reales. Un cuerpo real K se dice <u>real cerrado</u> si no posee ninguna <u>extensión algebraica</u> que sea un cuerpo real. Entonces si K es un cuerpo real cerrado y L es una extensión algebraica propia de K debe ocurrir que en L, -1 es suma de cuadrados. Los cuerpos reales cerrados poseen la siguiente caracterización: un cuerpo K es real cerrado sí y sólo si K(i), donde $i^2 = -1$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Exactamente la propiedad de $\mathbb{R}$. Además Artin-Schreier probaron que si K es un cuerpo con un orden P, existe, salvo K-isomorfismos, un único cuerpo $\mathbb{R}$ que es una extensión algebraica de K, que extiende el orden de K y que es real cerrado. $\mathbb{R}$ se denomina la <u>clausura real</u> de K (respecto de P).

Los trabajos de E. Artin y O. Schreier aparecen publicados en las famosas Notas del Seminario de Hamburgo (Hamburger Abhandlungen) del año 1926. Ellos trataron de incorporar su teoría de cuerpos reales a la teoría abstracta de cuerpos iniciada por E. Steinitz (Algebraische Theorie der Algebraischen Körper, Journal de Crelle, 137 (1910)). Recordemos que este trabajo de Steinitz contiene el primer estudio sistemático de cuerpos desde un punto de vista "algebraico", o sea como modelo de los axiomas de cuerpo. La meta de Steinitz fue dar una descripción constructiva de todos los cuerpos, salvo isomorfismos. Los resultados sobre cuerpos algebraicamente cerrados son de gran relevancia. En efecto, demuestra que todos los cuerpos algebraicamente cerrados quedan completamente determinados, salvo isomorfismos, por dos invariantes: la característica del cuerpo y el grado de trascendencia sobre el cuerpo primo. Por ejemplo si $|K| > \chi_0$, entonces el grado de trascendencia coincide con el cardinal de K y el teorema de Steinitz dice que para característica fija, un cuerpo algebraicamente cerrado está completamente determinado (salvo isomorfismo) por su cardinalidad.

Un hecho relevante y curioso a la vez a destacar de los trabajos de Artin y Schreier es que no plantean el problema de clasificar los cuerpos reales cerrados, salvo isomorfismos. Esto sería un análogo a la clasificación de Steinitz de los cuerpos algebraicamente cerrados. Sin embargo hasta hoy esto no ha sido posible de llevar a cabo.

No hay ninguna teoría satisfactoria de clasificación de cuerpos reales cerrados salvo isomorfismos. La conclusión resulta ser que: la clasificación por isomorfismo no es importante y menos aún útil. Precisamente Artin y Schreier enunciaron en uno de los trabajos que "los teoremas del álgebra real son válidos en cualquier cuerpo real cerrado. Por ejemplo, teoremas tales como:

-Continuidad uniforme de polinomios reales en todo intervalo cerrado [a,b].

-Teorema de Rolle

-Teorema del valor medio del cálculo diferencial

-Teorema de Sturm sobre el número de ceros de un polinomio en un intervalo.

-Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes en un cuerpo real cerrado P, tal que para valores $a, b \in P$, $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, existe $c \in P$, $a < c < b$ tal que $f(c) = 0$.

-etc....

La lógica matemática, principalmente la teoría de modelos, brindó una salida a esta situación planteada la utilización de otra noción mucho más adaptada a la investigación algebraica que la de isomorfismo, es la noción de equivalencia elemental.

En la teoría de modelos una teoría T se dice completa si todos los modelos de T son elementalmente equivalentes. O sea, si una sentencia, formulada en el lenguaje de primer orden, es verdadera en un modelo, es verdadera en todos los modelos. Otra noción relevante es la de completitud-modal.

Una teoría T se dice modal-completa si toda extensión de modelos de T es una extensión elemental.

Se tiene los siguientes resultados fundamentales:

1) La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica $p \geq 0$ es completa y modal-completa. (En característica 0 se conoce como principio de Lefschetz).
2) La teoría de cuerpos reales cerrados es completa y modal-completa. (Principio de Tarski).

La idea de hacer uso de la teoría de modelos en las formulaciones anteriores se debe originalmente a Abraham Robinson. Estas ideas y otros desarrollos lo llevaron a formular el Análisis-No normal. (Referencia bibliográfica: Robinson, A., Introduction to model algebra and Metamathematics of Algebra. North Holland (1963)).

III. EJEMPLO CLAVE.

Sea K, $\leq$ un cuerpo ordenado. Sea la función <u>valor absoluto</u> en K (respecto de $\leq$)

$$|k| = \begin{cases} k \text{ si } 0 \leq k \\ -k \text{ si } k < 0 \end{cases}$$

Ya vimos que $Q \subset K$. Diremos que $x \in K$ es <u>infinitamente</u> <u>pequeño</u> (respecto de Q) ó infinitesimal (respecto de Q) si para todo $q \in Q^+$ es $|k| < q$ (Q^+ denota los racionales positivos). Un elemento $k \in K$ se dice <u>finito</u> (respecto de Q) si existe $q \in Q^+$ tal que $|k| < q$. Un elemento $k \in K$ se dice infinitamente grande (respecto de Q) si $q < |k|$, para todo $q \in Q^+$.

Notar que si el orden < en K es arquimediano entonces todo elemento de K es finito. Recíprocamente si todo elemento de K es finito el orden es arquimediano.

Sea $K = \mathbb{R}(X)$ el cuerpo de funciones racionales en X, es decir el cuerpo de cocientes del anillo de polinomios $\mathbb{R}[X]$. Los elementos de $\mathbb{R}(X)$ se expresan como cocientes $\frac{p(X)}{q(X)}$ de polinomios, con $q(X) \neq 0$.

Vamos a definir en $\mathbb{R}(X)$ un orden tal que X es positivo e infinitamente pequeño respecto de $\mathbb{R}$. Es decir: <u>$0 < X < r$</u>, <u>para todo $r \in \mathbb{R}^+$</u>. Consecuentemente se seguirá, que en este orden, <u>$\mathbb{R}$ está acotado en $\mathbb{R}(X)$</u>. En efecto, si $r \in \mathbb{R}^+$, se verifica $0 < X < r^{-1}$ o sea $r < 1/X$.

La definición de este orden es canónica, o sea hay sólo un orden con esas dos propiedades.

Sea $f(X) = a_n X^n + \dots + a_k X^k$, $a_k \neq 0$. Dado que $0 < X$, podemos suponer que $f(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, $a_0 \neq 0$. Factoricemos $f(X)$ en $\mathbb{R}[X]$. Se tiene

$$f(X) = a_n.(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_r).g_1(X) \dots g_s(X),$$

donde las raíces α_i son reales y eventualmente se repiten. Los polinomios $g_i(X)$ son de grado 2, mónicos e irreductibles, o sea

$$g_i(X) = X^2 + bX + c, \qquad b^2 - 4c < 0,$$

por lo tanto

$$g_i(X) = \left[X + \frac{b}{2}\right]^2 + \left[\sqrt{\frac{4c - b^2}{4}}\right]^2$$

y es $g_i(X) > 0$. El signo de $f(X)$ (ser positivo o negativo) depende pues sólo del producto

$$a_n.(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_r).$$

Ahora $X - \alpha_i > 0$ sí y sólo si $X > \alpha_i$, sí y sólo si $\alpha_i < 0$, sí y sólo si $-\alpha_i > 0$. Por lo tanto

$a_n.(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_r) > 0$ sí y sólo si
$a_n.(-\alpha_1) \dots (-\alpha_r) > 0.$

Sabemos que si

$$\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_r, z_1, \ \bar{z}_1, \ \ldots, \ z_h, \bar{z}_h$$

son todas las raíces de f(X), reales o complejas, se tiene

$$\alpha_1 . \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_r . (z_1 \ \bar{z}_1) \ \ldots \ (z_h \bar{z}_h) = (-1)^n . \frac{a_0}{a_n}.$$

Dado que $z_i \ \bar{z}_i > 0$, se tiene que

$$a_n . (-\alpha_1) \ \ldots \ (-\alpha_r) > 0 \iff (-1)^{n+r} . a_0 > 0$$

pero puesto que n = r + 2h, concluimos que

$$a_n . (-\alpha_1) \ \ldots \ (-\alpha_r) > 0 \iff a_0 > 0.$$

En definitiva

$$0 < f(X) = a_n X^n + \ldots + a_k . X^k, \ a_k \neq 0 \iff a_k > 0.$$

Además queda clara la unicidad del orden con la propiedad que X es > 0 e infinitamente pequeño respecto de $\mathbb{R}$.
El orden en $\mathbb{R}(X)$ resulta:

$$\frac{p(X)}{q(X)} > 0 \iff \frac{p(X)q(X)}{q(X)^2} > 0 \iff p(X)q(X) > 0.$$

o sea

$$\frac{a_n X^n + \ \ldots \ + a_k X^k}{b_m X^m + \ \ldots \ + b_s X^s} , \ a_k \neq 0, \ b_s \neq 0, > 0, \iff a_k b_s > 0.$$

La discusión precedente muestra claramente que los órdenes en $\mathbb{R}(X)$ quedan determinados cuando se conoce el orden relativo de X con los números reales. Más precisamente, dado un orden $<$ en $\mathbb{R}(X)$ quedan determinados dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, o sea secciones de $\mathbb{R}$:

$$I = \{r \mid r \in \mathbb{R} \text{ y } r < X\}$$
$$D = \{r \mid r \in \mathbb{R} \text{ y } X < r\}.$$

Esto nos recuerda las cortaduras. Aquí pueden ser $I = \phi$ ó $D = \phi$. Lo que es cierto es que $I \cup D = \mathbb{R}$ e $I \cap D = \phi$. Indiquemos estos pares con (I, D). Las posibilidades son:

i. $I = \phi$, $D = \mathbb{R}$

ii. $I = \mathbb{R}$, $D = \phi$

iii. $I = (-\infty, a]$, $D = (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

iv. $I = (-\infty, a)$, $D = [a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

Los órdenes asociados corresponden a

i.	$X < r$, $\forall\, r \in \mathbb{R}$	$X^{i}[$――――――
ii.	$r < X$, $\forall\, r \in \mathbb{R}$	――――――$]X$
iii.	$a < X < a + e$, $\forall\, e \in \mathbb{R}^{+}$	―――$a]X$―――
iv.	$a - e < X < a$, $\forall\, e \in \mathbb{R}^{+}$	―――$X[a$―――

Veamos la existencia de estos órdenes en $\mathbb{R}(X)$ sin repetir el razonamiento anterior. Vamos a utilizar el hecho general que establece que si P es un cono de positividad de un cuerpo K y $t\colon K \to K$ es un automorfismo de K entonces $t(P)$ es un cono de positividad de K. Habrá pues que investigar los automorfismos de $\mathbb{R}(X)$. Una forma de obtener automorfismos de $\mathbb{R}(X)$: es por "substitución o especialización de X". Por ejemplo la substitución $X \to X + a$ produce un automorfismo de $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{p(X)}{q(X)} \to \frac{p(X+a)}{q(X+a)}$$

cuyo morfismo inverso está dado por la substitución $X \to X - a$.

Notemos que en estos morfismos el cuerpo $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}(X)$ queda fijo. O sea estos morfismos quedan caracterizados por las dos condiciones

$$X \to p(X)$$
$$r \to r, \; r \in \mathbb{R}.$$

Estos morfismos (que fijan $\mathbb{R}$) son llamamos $\mathbb{R}$-morfismos.

Es posible demostrar que <u>todos</u> los $\mathbb{R}$-automorfismos de $\mathbb{R}(X)$ se obtienen por las substituciones

$$X \to \frac{aX + b}{cX + d}; \; a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc \neq 0.$$

El resultado a probar es que todos los órdenes en $\mathbb{R}(X)$ se obtienen vía $\mathbb{R}$-automorfismos, a partir del orden introducido más arriba por la sección

(1) $$0 < X < e, \; \forall\, e, \; e \in \mathbb{R}^{+}$$

Por ejemplo, sea el automorfismo de $\mathbb{R}(X)$ obtenido por la substitución

$$t\colon X \to -\frac{1}{X}.$$

Sea P el cono de positividad asociado al orden dado por (1).

Entonces

$$
\begin{aligned}
X \in P,\ e - X \in P \ &\Rightarrow -\frac{1}{X},\ e + \frac{1}{X} \in t(P) \\
&\Longleftrightarrow 0 < -\frac{1}{X} < e \\
&\Longleftrightarrow 0 > \frac{1}{X} > -e \\
&\Longleftrightarrow X < -\frac{1}{e} \\
&\Longleftrightarrow X < r,\ \forall r \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el orden derivado de $t(P)$ coincide con el orden definido por la sección i. de más arriba.

Análogamente probamos que los órdenes inducidos por ii., iii., iv. resultan de las substituciones:

$$
\begin{aligned}
&X \to \frac{1}{X} \\
&X \to X - a \\
&X \to a - X
\end{aligned}
$$

respectivamente. Los órdenes enumerados en i., ii., iii., iv. son todos los órdenes posibles de $\mathbb{R}(X)$. Es interesante notar que todos son <u>no arquimedianos</u>, no solamente respecto de $\mathbb{Q}$ sino de $\mathbb{R}$. Además todos resultan de un orden particular aplicando automorfismos de $\mathbb{R}(X)$. Se suele decir que todos los órdenes de $\mathbb{R}(X)$ son <u>conjugados</u>. Un ejemplo análogo interesante de estudiar es el cuerpo $\mathbb{Q}(X)$. Aquí pueden aparecer órdenes arquimedianos y no arquimedianos (respecto de $\mathbb{Q}$). Por ejemplo dado que $\mathbb{Q}(X) \subset \mathbb{R}(X)$, por restricción obtenemos órdenes no arquimedianos en $\mathbb{Q}(X)$.

Para obtener un orden arquimediano, consideramos dentro de $\mathbb{R}$ el cuerpo $\mathbb{Q}(\pi)$, donde π es cualquier número trascendente sobre $\mathbb{Q}$. Es claro que $\mathbb{Q}(X)$ y $\mathbb{Q}(\pi)$ son isomorfos. El orden en $\mathbb{Q}(\pi)$ resulta por restricción del orden de $\mathbb{R}$ y el orden en $\mathbb{Q}(X)$ se obtiene por "transporte"

$$\frac{p(X)}{q(X)} > 0 \text{ en } \mathbb{Q}(X) \iff \frac{p(\pi)}{q(\pi)} > 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

NOTAS. 1. Sea $\mathbb{R}(X)$ con el orden determinado por la condición $0 < X < r$ para todo $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$. Utilizando el valor absoluto determinado por este orden se define una métrica en $\mathbb{R}(X)$: $d(a,b) = |b - a|$, como es habitual. Notar que los valores que toma esta distancia no son números reales sino elementos de $\mathbb{R}(X)$. Con respecto a esta métrica la sucesión de números racionales

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

no tiende a 0. En efecto,

$$\frac{1}{n} > X > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Más aún, por la misma razón ni siquiera es sucesión de Cauchy!

2. Sea el cuerpo $\mathbb{R}(X)$ con el orden inducido por la condición $0 < X < r$, para todo $r \in \mathbb{R}^+$. Dado que el anillo de polinomios $\mathbb{R}[X]$ es un dominio de factorización única y $\mathbb{R}(X)$ es cuerpo de cocientes de $\mathbb{R}[X]$, se sigue fácilmente que todo elemento $t \neq 0$ en $\mathbb{R}(X)$ se escribe unívocamente en la forma

$$t = X^m . \frac{f(X)}{g(X)} \ ,$$

con $f(X)$, $g(X)$ coprimos, $g(X)$ mónico, $m \in \mathbb{Z}$ y además $f(0) \neq 0$, $g(0) \neq 0$.

Entonces se verifica que, respecto del orden en $\mathbb{R}(X)$ ya señalado,

t es finito sí y sólo si $m \geq 0$

t es infinitésimo sí y sólo si $m > 0$

t es infinito sí y sólo si $m < 0$.

Dejamos a cargo del lector probar que para todo elemento $t \in \mathbb{R}(X)$ <u>que sea finito</u> existe un único <u>número real</u> r tal que $t - r$ sea infinitésimo.

3. Sea $\mathbb{R}(X)\hat{}$ (respectivamente $\mathbb{C}(X)\hat{}$) el cuerpo de series formales (series de Puiseux),

$$\sum_{i=k}^{+\infty} a_i X^{i/q}, \text{ con } k \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}).$$

Se demuestra (Ver Walker, R.J., Algebraic Curves, Dover, (1962) p. 98) que $\mathbb{C}(X)\hat{}$ es algebraicamente cerrado. Puesto que $\mathbb{C}(X)\hat{} = \mathbb{R}(X)\hat{}[i]$, resulta $\mathbb{R}(X)\hat{}$ real cerrado. El cuerpo $\mathbb{R}(X)$ se sumerge canónicamente como subcuerpo del cuerpo de series $\mathbb{R}(X)\hat{}$. La condición $0 < X < \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ es válida en $\mathbb{R}(X)\hat{}$ pues $X = (X^{1/2})^2$ en $\mathbb{R}(X)\hat{}$, o sea $0 < X$, y además si $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, la serie $\varepsilon - X + 0X^2 + 0X^3 + \ldots$ es un cuadrado en $\mathbb{R}(X)\hat{}$ por lo tanto $X < \varepsilon$. Se sigue que el orden de $\mathbb{R}(X)\hat{}$ extiende el orden señalado de $\mathbb{R}(X)$. La clausura real de $\mathbb{R}(X)$ es entonces la totalidad $\mathbb{R}(X)\hat{}_{alg}$ de series de Puiseux algebraicas sobre $\mathbb{R}(X)$.

IV. EJERCICIOS.

1. Sea $K = \mathbb{R}(X)$ y consideremos en $\mathbb{R}(X)$ los órdenes definidos por las secciones ii., iii. y iv. de nuestra discusión precedente.

i. Sea $f(X) = a_n X^n + \ldots + a_k X^k$, $a_k \neq 0$ en $\mathbb{R}(X)$. Probar que respecto del orden asociado a ii.

$$f(X) > 0 \iff a_n > 0.$$

ii. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $\leq$ el orden en $\mathbb{R}(X)$ determinado por la sección $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$. Sea $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ y sea $f(X) = (X - a)^k.\ g(X), g(a) \neq 0$. Probar que en el orden $\leq$,

$$f(X) > 0 \iff g(a) > 0.$$

iii. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $\leq$ el orden en $\mathbb{R}(X)$ determinado por la sección $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$. Sea $f(X) \in R[X]$ y sea $f(X) = (X - a)^k.g(X), g(a) \neq 0$. Probar que en el orden $\leq$,

$$f(X) > 0 \iff (-1)^k.g(a) > 0.$$

2. Sea K un cuerpo con un orden P y sea $F \subset K$ un subcuerpo. Probar las siguientes afirmaciones:

i. $V = V(K/F, P) := \{x \mid x \in K$ y existe $a \in F$ con $|x| \leq |a|\}$

= totalidad de elementos de K <u>finitos</u> respecto de F, <u>es un subanillo de K</u>.

ii. $V = K$ sí y sólo si P es arquimediano respecto de F.

iii. $I = I(K/F,P) := \{x \mid x \in K$ y para todo $a \in F$, $a \neq 0$, $|x| \leq |a|\}$

= totalidad de elementos de K infinitamente pequeños respecto de F, <u>es un ideal de V</u>.

iv. V es un anillo <u>local</u> con ideal maximal I, o equivalentemente:

I es el único ideal maximal de V. Todo elemento de $V \setminus I$ es inversible.

<u>NOTA</u>: el contenido de este ejercicio es el principio de una vinculación entre la teoría de cuerpos reales y el álgebra conmutativa real. Específicamente relaciona la propiedad de orden con la propiedad de existencia de una valuación. Esto tiene profunda significación para la geometría algebraica de manera tal de preparar el terreno para una geometría algebraica <u>real</u>. Citemos someramente un resultado clave en esta teoría. Sea K un cuerpo de funciones algebraicas sobre $\mathbb{R}$, o sea K es un cociente de $\mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ por un ideal Cr de ese anillo. Si V es un modelo de K (por ejemplo la totalidad de n-uplas en $\mathbb{C}^n$ que son ceros de Cr) denotemos con $V(\mathbb{R})$ la totalidad de puntos reales de V (o sea las n-uplas con componentes reales). El problema es saber si existe un modelo de K que contiene un <u>punto real simple</u>. Vinculada a esta pregunta hay 3 propiedades involucradas equivalentes entre sí:

i. Existencia de un punto simple en $V(\mathbb{R})$.

ii. Existencia de un orden en K.

iii. Existencia de un puesto real (real place) (en la notación del ejercicio 2. significa que V/I es un cuerpo real).

En lo referente a valuaciones reales citemos un trabajo pionero de R. Baer de 1927, sobre cuerpos ordenados no arquimedianos.

V. APENDICE. EL ANALISIS NO NORMAL (NON-STANDARD ANALYSIS).

En el siglo XVII, I. Newton (1642-1727) y W.G. Leibniz (1646-1716) fundaron el cálculo infinitesimal con una precaria fundamentación de lo que hoy se entiende por esta rama de la Matemática. La noción de "infinitésimo" fue el medio utilizado para construir el cálculo diferencial e integral. La tradición matemática atribuye en general a Leibniz la creencia en la existencia real de cantidades infinitamente pequeñas. Una cantidad infinitesimal es una que no es cero, pero sin embargo es más pequeña que todo número real positivo. No obstante Leibniz no parece comprometido sobre la existencia real de infinitésimos y por momentos expresa sus dudas. En cualquier forma él reconoce que la cuestión de la existencia de infinitésimos es independiente de la cuestión de si el cálculo con infinitésimos, llevado a cabo con las reglas ordinarias de cálculo, llevan a contradicción. Consecuentemente existen éstos o nó, los mismos pueden servir como "ficciones útiles" para abreviar o hablar en forma universal.

En 1696 el Marques de L'Hôpital (1661-1704) publicó lo que se considera el primer texto en cálculo diferencial basado en manuscritos inéditos de John Bernoulli (1667-1748). El título del libro es <u>Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes</u> (Análisis de los infinitamente pequeños para el entendimiento de curvas). El libro comienza con dos definiciones: "magnitudes variables son aquellas magnitudes que crecen o decrecen en forma contínua", "Las partes infinitamente pequeñas con que esas magnitudes crecen o decrecen se denominan diferenciales de esa magnitud". Agrega dos postulados: "Dos magnitudes que difieren en magnitud infinitamente pequeña, puden ser utilizadas en forma indistinta", y "Una curva puede ser considerada como un polígono con un número infinito de lados, cada uno de ellos de longitud infinitamente pequeña, quedando la curvatura de la curva determinada por los ángulos entre lados consecutivos". Sobre esta base se desarrollan en el texto las fórmulas básicas para diferenciales de funciones algebraicas y se aplican a problemas que involucran tangentes, máximos y mínimos, curvatura, etc. Agreguemos que este texto es en la actualidad recordado particularmente por la inclusión de un resultado de Bernoulli conocido como la regla de L'Hôspital para el límite indeterminado: Sean f(x),g(x) dos funciones diferenciables con f(a) = g(a) = 0. Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el límite de la derecha existe.

El Análisis No Normal (ANN) es una nueva rama de la Matemática inventada por Abraham Robinson (1918-1974). Con esta teoría Robinson revivió la noción de "infinitésimo" utilizados extensamente por Leibniz y Newton para fundar el análisis infinitesimal. Como ya señalamos, Leibniz concebía los infinitésimos como números, positivos o negativos, infinitamente pequeños que poseen las mismas propiedades de los números corrientes. Aún para Leibniz esa concepción era contradictoria en sí misma: ¿cómo pueden tener las mismas propiedades de ser positivos y a la vez menores que cualquier número positivo? La utilización de un lenguaje formal permitió a Robinson resolver esta paradoja.

Robinson mostró cómo construir un sistema conteniendo infinitésimos que a su vez era "idéntico" al conjunto de los números reales con respecto a todas las propiedades expresables en un cierto lenguaje formal. La propiedad de ser positivo y menor que cualquier número real positivo no resultaba expresable en este lenguaje y por lo tanto la paradoja se desvanecía. Análogamente la propiedad de que todo conjunto de números reales acotado superiormente posee un supremo tampoco es expresable en este lenguaje. Las propiedades "expresables" se suelen llamar "elementales" y se formulan en la llamada lógica de predicados de primer orden. Concretamente Robinson construyó en 1960 una extensión, denotada $^*\mathbb{R}$, de los números reales $\mathbb{R}$, que extiende el orden de $\mathbb{R}$ y contiene elementos infinitamente pequeños (respecto de $\mathbb{R}$). Hay entonces en $^*\mathbb{R}$, elementos a tales que $|a| < r$, cualquiera sea $r \in \mathbb{R}^+$. Los elementos de $^*\mathbb{R}$ llamados finitos, son aquellos a tales que $|a| < r$, para algún número real positivo r. En el estudio de $^*\mathbb{R}$ se introduce una relación de equivalencia $\simeq$, definida por: $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ se dicen <u>equivalentes</u> <u>o</u> <u>comparables</u> si la diferencia es un infinitésimo. Por ejemplo $\delta \simeq 0$, para todo infinitésimo δ. Sea <u>inf</u> la totalidad de infinitésimos de $^*\mathbb{R}$. Un resultado clave en esta teoría es que todo elemento a de $^*\mathbb{R}$ que <u>sea finito</u> es comparable a un único número real r, o sea existe un único $r \in \mathbb{R}$ tal que $a \simeq r$. Se dice entonces que r es la <u>parte</u> <u>normal</u> (o standard) <u>de</u> <u>a</u>. La base del ANN es hacer análisis en ${}^*\mathbb{R}$ utilizando los infinitésimos. El hecho de máxima relevancia, especialmente para la lógica, es la validez de un Principio de Transferencia por el cual una sentencia, expresada en el lenguaje de primer orden, es verdadera en $\mathbb{R}$ sí y sólo si es verdadera en ${}^*\mathbb{R}$.

La construcción de Robinson permite extender naturalmente funciones $\mathbb{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funciones ${}^*\mathbb{F}: {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. Por lo tanto podemos considerar para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $\delta \in \underline{inf}$ el valor ${}^*\mathbb{F}(x+\delta)$. De inmediato se puede obtener un criterio No-Normal de continuidad de $\mathbb{F}$ en x.

A saber, $\mathbb{F}$ es contínua en x sí y sólo si ${}^*\mathbb{F}(x+\delta) \simeq \mathbb{F}(x)$ para todo $\delta \in \underline{inf}$. Podemos definir también en ${}^*\mathbb{R}$ un diferencial de $\mathbb{F}$ en a, $a \in \mathbb{R}$:

$$d_{a,\delta} := {}^*\mathbb{F}(a + \delta) - \mathbb{F}(a), \qquad \delta \in \underline{inf}.$$

La función es entonces derivable en a sí y sólo si el cociente

$$\frac{{}^*\mathbb{F}(a + \delta) - \mathbb{F}(a)}{\delta} \in {}^*\mathbb{R}, \; \delta \in \underline{inf}, \; \delta \neq 0$$

es independiente de δ y además finito. En este caso se verifica:

$$\mathbb{F}'(a) \simeq \frac{{}^*\mathbb{F}(a + \delta) - \mathbb{F}(a)}{\delta}.$$

Veamos una demostración "no normal" de la regla de L'Hospital que mencionamos en la Introducción. Con la notación e hipótesis allí mencionadas se tiene para todo $\delta \in \underline{inf}$, $\delta \neq 0$:

$$\frac{{}^{*}f(a+\delta)}{{}^{*}g(a+\delta)} = \frac{{}^{*}f(a+\delta) - f(a)}{{}^{*}g(a+\delta) - g(a)} = \frac{\dfrac{{}^{*}f(a+\delta) - f(a)}{\delta}}{\dfrac{{}^{*}g(a+\delta) - g(a)}{\delta}} \simeq \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

por lo tanto si $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ existe, entonces coincide con $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Una exposición del desarrollo no normal del análisis se expone en el libro de Keisler, H.J., Foundations of Infinitesimal Calculus. Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976.

El hecho fundamental es que todo el análisis clásico se puede formular en este contexto No Normal y esto ha significado la resolución de problemas abiertos, formulaciones más claras de teoremas clásicos y múltiples aplicaciones. La primera exposición del ANN es el texto de A. Robinson: Nonstandard Analysis, North-Holland (1966) y (1974). Hay una variedad muy grande de textos sobre el tema. Por citar un título: An Introduction to Nonstandard Real Analysis, A.E. Hurd y P.A. Loeb, Academic Press (1985).