PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Los siguientes problemas corresponden a las pruebas, de 4 hs. 30' de duración, de la VI Olimpíada Iberoamericana de Matemática realizada en Tanti-Carlos Paz, Córdoba en el mes de setiembre de 1991. Presentamos también soluciones oficiales de los mismos.

Problema 3. Sea F una función creciente definida para todo número real x, $0 \le x \le 1$, tal que

a) $F(0) = 0$

b) $F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}$

c) $F(1 - x) = 1 - F(x)$.

Encontrar $F\left(\frac{18}{1991}\right)$.

Solución: Probaremos que

$$F\left(\frac{18}{1991}\right) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}.$$

a) $F(1) = F(1 - 0) = 1 - F(0) = 1$

b) $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{F(1)}{2} = \frac{1}{2}$

y por inducción

$$F\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \geq 1$.

c) $F\left(\frac{2}{3}\right) = F\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Como F es creciente resulta

$$F(x) = \frac{1}{2} \text{ para todo } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

d) $F\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{F\left(\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{1}{4}$.

Luego

$$F(x) = \frac{1}{4} \text{ para todo } x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right].$$

Asimismo, $F\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{3}{4}$, de donde sigue

$$F(x) = \frac{1}{2^3} \text{ para todo } x \in \left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right].$$

Por inducción se puede ver que F(x) es constante en cada tercio medio que resulta al subdividir el intervalo [0,1] "a la Cantor".

e) $\frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^7} < \frac{18}{1991} < \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^7}$

f) Veamos ahora que F(x) es constante en $\left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^7}, \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^7}\right)$.

Tenemos

$$F\left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^7}\right) = F\left(\frac{1}{3^4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^3}\right)\right) = \frac{F\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^3}\right)}{2^4}$$

$$= \frac{F\left(\frac{19}{3^3}\right)}{2^4} = \frac{F\left(1 - \frac{8}{3^3}\right)}{2^4} = \frac{1}{2^4}\left(1 - F\left(\frac{8}{3^3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(-\frac{F\left(\frac{8}{9}\right)}{2}\right) = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}\,\frac{3}{4} = \frac{2}{2^5} - \frac{1}{2^5}\,\frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5}\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}\,.$$

falta ver que también

$$F\left(\frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^7}\right) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}\,.$$

Tenemos

$$F\left(\frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^7}\right) = \frac{1}{2^4}\,F\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^3}\right) = \frac{1}{2^4}\,F\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{1}{2^4}\,F\left(1 - F\left(\frac{7}{3^3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}\,F\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}\,\frac{3}{4} = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}.$$

Problema 4. Encontrar un número N de cinco cifras diferentes y no nulas, que sea igual a la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con las cinco cifras de N.

Solucion: El número buscado N = abcde habrá de ser igual a la suma abc + abd +...+cde; ésta suma tendrá $3\cdot4\cdot5 = 60$ sumandos; como primera cifra de los sumandos aparecerán igual número de veces las cinco cifras a, b, c, d y e, es decir habrá $60/5 = 12$ sumandos cuya primera cifra es a, 12 sumandos cuya primera cifra es b, etc. Igual ocurrirá con las segundas y terceras cifras de los sumandos, de modo que se tendrá

$$
\begin{aligned}
N &= (100a+10b+c)+(100a+10b+d)+\ldots+(100c+10d+e) \\
&= (1200a+120a+12a)+(1200b+120b+12b)+ \\
&= \qquad\qquad +\ldots+(1200e+120e+12e) \\
&= (1200+120+12)(a+b+c+d+e) \\
&= 12\cdot 111(a+b+c+d+e)
\end{aligned}
$$

Llamando

$$S = a + b + c + d + e$$

resultará $N = 12\cdot 111\cdot S.$ (*)

S será máximo cuando las cifras de N sean 9,8,7,6,5; entonces $S = 35$. S será mínimo cuando las cifras de S sean 1,2,3,4,5; entonces $S = 15$. Luego, S debe estar comprendido entre 15 y 35; pero la igualdad (*) nos dice que N debe ser múltiplo de 9, ya que tanto 12 como 111 son divisibles por 3. Por lo tanto, también debe ser múltiplo de 9 la suma S de las cifras de N. Ahora bien, los únicos múltiplos de 9 comprendidos entre 15 y 35 son 18 y 27. Para $S = 18$ resulta $N = 23976$, solución no válida pues tiene $S = 27 \neq 18$. Para $S = 27$ resulta $N = 35964$, que es la solución buscada pues $S = 27$.