PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Los siguientes problemas corresponden a la primera prueba, de 4 hs. 30' de duración, de la **VI Olimpíada Iberoamericana de Matemática** realizada en Tanti-Carlos Paz, Córdoba en el mes de setiembre de 1991. Presentamos también las soluciones oficiales de los mismos

Problema 1. A cada vértice de un cubo se asigna el valor +1 ó -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

Solucion. Si en un vértice está el múmero a, entonces a aparece también en los productos de las tres caras que coinciden en dicho vértice. Luego el producto de todos los números es un producto de cuartas potencias $a^4b^4\ldots$ y por lo tanto igual a 1. Sigue que hay un número par de -1, digamos I, y un número par de 1, digamos P. Sea S la suma de los 14 números ubicados en vértices y caras. Tenemos entonces

$$P - I = S$$

y además

$$P + I = 14$$

En consecuencia $S = 2P - 14$.

Teniendo presente que P es par, digamos, $P = 2p$, resulta

$$S = 4p - 14 = 4(p - 4)+2,$$

de donde sigue que los posibles valores de S son

$$-14,\ -10,\ -6,\ -2,\ 2,\ 6,\ 10,\ 14.$$

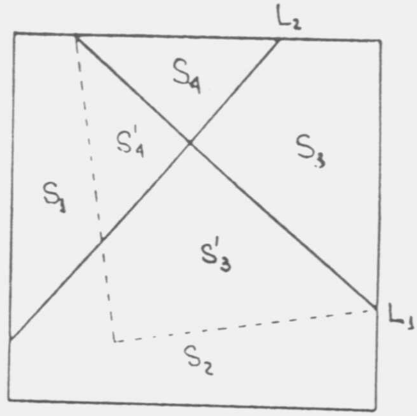
Afirmamos que S puede tomar todos los valores precedentes salvo 10 y -14. Consideramos en primer lugar los valores positivos de S. Con 1 en todos los vértices obtenemos S = 14. Si hay un -1 en un único vértice entonces las tres caras que son incidentes con dicho vértice tienen -1 y las caras y vértices restantes tienen 1, de donde sigue S = 10 - 4 = 6. Si hay dos -1 en dos vértices opuestos de una misma cara y 1 en los restantes vértices, las cuatro caras que tienen un único -1 en algún vértice toman el valor -1 y las dos caras restantes el valor 1, lo cual implica S = 8 - 6 = 2. El caso S = 10 no puede presentarse pues entonces habría exactamente dos -1 entre caras y vértices; por lo dicho previamente no puede ocurrir un -1 en un único vértice y tampoco -1 en dos vértices opuestos de una misma cara. Si hay -1 en dos vértices consecutivos de una cara resultaría I = 4 y si hay -1 en vértices opuestos de distintas caras tendríamos I = 8 lo cual contradice I = 2.

Para los valores negativos de S el razonamiento es semejante. El caso S = -14 es claramente imposible. La situación S = -2 se presenta cuando en todos los vértices (y sólo en ellos) hay -1. El caso S = -6 ocurre cuando hay un único vértice con 1, pues entonces las tres caras incidentes con dicho vértice tienen el valor -1 y 1 las restantes, con lo cual S = 4 - 10 = -6. Por último, S = -10 cuando en todos los vértices hay -1 salvo en los vértices opuestos de dos caras distintas; en ésta situación en todas las caras hay -1 y por tanto S = 2 - 12 = -10.

Problema 2. Dos rectas perpendiculares dividen un cuadrado en cuatro partes, tres de las cuales tienen cada una área igual a 1. Demostrar que el área del cuadrado es cuatro.

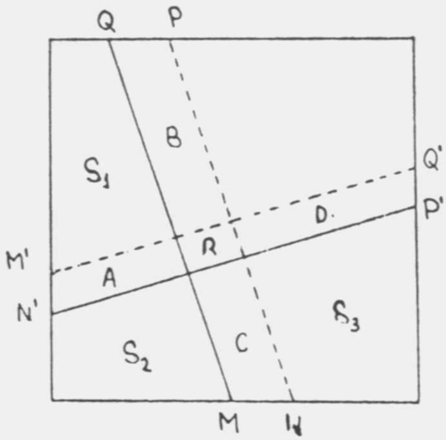
Solución. Si las dos rectas se cortan en el centro del cuadrado, lo dividen en cuatro regiones iguales y el área del cuadrado es cuatro.

Si una de las rectas forma un triángulo con dos de los lados



reflejando las regiones S_3 y S_4 según la recta L_1, obtenemos regiones S_3' y S_4', estrictamente contenidas en S_2 y S_1 respectivamente, salvo que L_1 sea una diagonal; en éste caso L_2 debe ser la otra diagonal y el área es 4.

Queda por analizar el siguiente caso



donde se han trazado los segmentos $\overline{M'Q'}$ y $\overline{PN}$ por el centro del cuadrado y paralelos a $\overline{N'P'}$ y $\overline{QM}$ respectivamente. R es un rectángulo y A, B, C, D son trapecios. Supongamos que S_1, S_2 y S_3 tienen área 1 y sea s el área del cuadrado. Las áreas de S_1, S_2 y S_3 pueden expresarse respectivamente:

$$\begin{cases} 1 = \frac{s}{4} - b + a \\ 1 = \frac{s}{4} - a - c - r \\ 1 = \frac{s}{4} - d + c \end{cases}$$

Luego

$a - b = c - d$, o sea $a + d = b + c$, de donde $a + d + r = b + c + r$.

Esto significa que los paralelogramos MNPQ y M'N'P'Q' tienen la misma área y como ambos tienen la misma altura sus bases son iguales, es decir $MN = M'N'$. Resulta que R es un cuadrado y consecuentemente $b = d$ y $a = c$. Igualando las dos primeras ecuaciones del sistema se tiene que $2a + r = b - a$, de donde $2a + a + r = b$. Pero $a + r = b$. Luego $a = 0$ y en consecuencia $a = b = c = d = 0$ y las rectas dadas pasan por el centro. Como observamos al principio, el área del cuadrado es 4.

PROBLEMAS

Los problemas 1, 2 y 3; 4, 5 y 6 corresponden respectivamente a dos pruebas para seleccionar los representantes de Inglaterra para la Olimpíada Internacional de 1991. Los restantes problemas son los de las Olimpíadas Británicas de 1991.

La duración de cada prueba fue de tres horas y media.

1. En un triángulo ABC, B es un ángulo recto y θ es el ángulo entre AC y la mediana trazada de C a AB. Probar que sen $\theta \leq \frac{1}{3}$.

2. Probar que si el perímetro de un triángulo con lados a, b y c es 2 entonces $a^2 + b^2 + c^2 + 2\,abc < 2$.

3. Sea x un número real positivo. Probar que al menos uno de los números x, 2x, 3x, ... , 20x contiene al dígito 2 en su expresión decimal.
Sea N el menor entero positivo tal que, para cualquier número real positivo x, al menos 1 de los números x, 2x, 3x, ..., Nx contiene el dígito 2 en su expresión decimal. Encontrar cotas superiores e inferiores para N y de ser posible encontrar N.

4. Doce enanos viven en el bosque. Cada uno usa un manto, de color azul de un lado y rojo del otro. Algunos enanos usan su manto con el lado rojo hacia afuera y otros con el lado azul. A fin de año se ponen de acuerdo en la siguiente resolución: En el n-ésimo día del nuevo año, el n-ésimo

enano (módulo 12) visitará a cada uno de sus amigos. Si éste encuentra a la mayoría de sus amigos usando el manto al revés de como lo usa él, entonces se dará vuelta el suyo; caso contrario se lo dejará como lo tenía.
Probar que tarde o temprano nadie volverá a dar vuelta su manto. (Las amistades son mutuas y no cambian).

5. Sea f la función definida en el conjunto de los enteros positivos por: $f(1) = 1$. $f(2n+1) = f(2n) + 1$ y $f(2n) = 3f(n)$.
Probar que no existe entero positivo n para el cual $f(n) = 1992$. ¿Cuán cerca de 1992 puede estar $f(n)$?.
Para cada entero positivo k, sea f_k la función definida en el conjunto de los enteros positivos por:

$$f_k(1) = 1,\ f_k(2n+1) = f_k(2n) + 1,\quad f_k(2n) = kf_k(n)$$

Encuentre todos los k para los cuales $f_k(n) = 1992$ tiene solución.

6. El vértice A de un triángulo ABC equidista del circuncentro O y del ortocentro H. Encuentre todos los posibles valores del ángulo A.

7. Mientras que los enanos del problema 4 usaban mantos rojos y azules, los de éste problema se distinguen entre si mediante un complejo orden de jerarquías. Este orden de jerarquías es complicado en el sentido de que si X manda a Y, e Y manda a Z, esto no necesariamente implica que X mande a Z. Sin embargo, este orden de jerarquías satisface tres simples reglas:

a) Dado cualquier par de enanos X e Y, ó bien X manda a Y ó Y manda a X.

b) Dado cualquier par de enanos X e Y, hay un único enano Z que es manda a ambos.

c) Dado cualquier par de enanos X e Y, hay un único enano Z que es mandado por ambos.

¿Cuántos enanos hay en ésta comunidad?

8. Probar que nunca el número $3^n + 2.17^n$, donde n es un entro no negativo, es un cuadrado perfecto.

9. Encontrar todos los enteros positivos k tales que el polinomio $x^{2k+1} + x + 1$ es divisible por el polinomio $x^k + x + 1$.

Para cada k encontrado especifique los enteros n tales que $x^n + x + 1$ es divisible por $x^k + x + 1$.

10. Sea ABCD un cuadrilátero inscripto en un círculo de radio r. Las diagonales AC y BD se cruzan en E. Probar que si AC es perpendicular a BD entonces $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4r^2$. (*)

¿Es cierto que si (*) es satisfecha entonces AC es perpendicular a BD? Justifique.

11. Encuentre el mínimo valor de $(x+y)(y+z)$ donde x, y, z son reales positivos que satisfacen $xyz(x+y+z) = 1$.

12. Encuentre el número de permutaciones $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ de 1,2,3,4,5,6 con la siguiente propiedad: $p_1, p_1, \ldots, p_n$ no es una permutación de $1, 2, \ldots, n$ para ningún $1 \le n \le 5$.

13. Mostrar que si x e y son enteros positivos tales que $x^2 + y^2 - x$ es divisible por 2xy entonces x es cuadrado perfecto.

14. Una escalera de longitud L se apoya en una pared vertical. Suponga que hay un escalón que dista D tanto de la pared como del piso. Encuentre explícitamente en términos de L y D la altura H a la que llega la escalera, apoyada sobre la pared.