ALGUNOS RESULTADOS SOBRE INTERPOLACION

Nora Bustingorri y Marta Urciuolo

Supongamos que un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme; conociendo su posición en dos instantes queda totalmente determinada su trayectoria. Esto no es otra cosa que decir: "por dos puntos distintos del plano pasa una única recta".

Supongamos tener ahora un móvil que se desplaza con movimiento uniformemente acelerado ¿Cuál es el número mínimo de "datos" que determinan su movimiento?. En general, si una función f(t) es polinómica de grado n, ¿Cuál es el número mínimo de valores de f(t) que debemos conocer para determinarla?.

Otra manera de enfocar el mismo problema es el siguiente: dados n puntos del plano $(t_1, x_1),\ldots, (t_n, x_n)$, nos interesa analizar la existencia y unicidad de polinomios $P(t)$ que los "interpolen", o sea tales que $P(t_i) = x_i \quad i = 1,\ldots, n$.

Veamos algunos ejemplos:

(1) Si $n = 1$ (Fig. 1), sea $(t_1, x_1) = (1,1)$ entonces,

a) Existe un único polinomio de grado cero tal que $P(1) = 1$; $P(t) = 1$.

b) Existen infinitos polinomios de grado mayor o igual que 1, por ejemplo $P(t) = a(t-1)^n + 1$, con $a \in \mathbb{R}$

(2) Si $n = 2$ (Fig. 2), sean $(t_1, x_1) = (0,0)$ y $(t_2, x_2) = (1,1)$

a) No existe polinomio P de grado cero que los interpole.

b) Existe único polinomio interpolatorio de grado 1, $P(t) = t$.

c) Existen infinitos polinomios interpolatorios de grado mayor o igual que 2, por ejemplo: $P(t) = t^n$

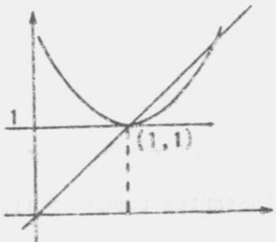

Fig. 1

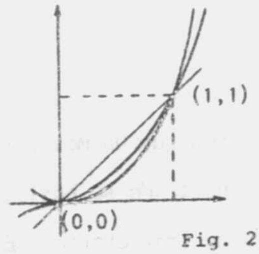

Fig. 2

Estos ejemplos sugieren que es natural esperar una relación entre el número de puntos dados y el grado del polinomio interpolatorio. Efectivamente, probaremos el siguiente:

Teorema 1:

Dados n puntos en el plano $(t_1, x_1), \ldots, (t_n, x_n)$ con $t_i \neq t_j$, si $i \neq j$, existe un único polinomio P tal que $P = 0$ ó grado $(P) < n$, que cumple $P(t_i) = x_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Demostración

Si $x_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ entonces $P = 0$ es un polinomio interpolatorio, y es único, pues si grado $(Q) < n$ entonces Q tiene a lo sumo n-1 raíces. Supongamos entonces que algún x_i es distinto de cero.

Existencia: para cada i construiremos un polinomio P_i de grado n-1 tal que:

$$(1) \qquad \begin{aligned} P_i(t_i) &= 1 \\ P_i(t_j) &= 0 \qquad \forall j \neq i \end{aligned}$$

Tomando entonces

$$P(t) = x_1 \; P_1(t) + \ldots + x_n \; P_n(t)$$

tenemos un polinomio interpolatorio de grado $\leq n-1$.

Es fácil verificar que

$$P_i(t) = \frac{(t-t_1) \ldots (t-t_{i-1}) \, (t-t_{i+1}) \ldots (t-t_n)}{(t_i-t_1) \ldots (t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1}) \ldots (t_i-t_n)}$$

satisface (1).

Unicidad: es una fácil consecuencia del teorema fundamental del álgebra el cual nos asegura que un polinomio de grado k tiene a lo sumo k raíces. Si P y Q son polinomios interpolatorios de grado $\leq n-1$ entonces

grado $(P-Q) < n$ y $(P-Q)(t_i) = 0$ $\quad i = 1, \ldots, n$

lo que implica que $P = Q$.

Nota: Puede darse que grado $(P) < n-1$, por ejemplo si tenemos tres puntos alineados.

Ejercicio 1: Encontrar el único polinomio P, con grado $(P) \leq 2$, que satisface $P(1) = 3$, $P(-1) = -1$, $P(0) = 1$

Ejercicio 2: Encontrar un polinomio Q con grado $(Q) \leq 2$ tal que $Q(0) = 1$, $Q(1) = 3$, $Q(-1) = 1$

Probaremos ahora que, sin la condición grado $(P) < n$, no podemos esperar unicidad en ningún caso.

Teorema 2:

Dados n puntos en el plano $(t_1, x_1), \ldots, (t_n, x_n)$, existen infinitos polinomios interpolatorios de grado mayor o igual que n.

Demostración

Sea P el polinomio que interpola los puntos $(t_1, x_1)\ldots(t_n, x_n)$, dado por el teorema anterior. A los n puntos dados le agregamos otro punto (t_{n+1}, x) con $t_{n+} \neq t_j \ \forall \ 1 \leq j \leq n$. Sea Q un polinomio de grado n, construido como en el teorema anterior, tal que

$$Q_x(t_{n+1}) = x \qquad y \qquad Q_x(t_i) = 0 \qquad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Entonces, $P + Q_x$ es un polinomio de grado n que interpola los n puntos dados y $P + Q_x(t_{k+1}) = x + P(t_{k+1})$.

Por consiguiente, para distintas elecciones del valor x obtenemos polinomios interpolatorios distintos y reiterando este procedimiento se pueden encontrar infinitos polinomios interpolatorios de cualquier grado mayor o igual que n.

Ejercicio 3: Encontrar un polinomio P con gr P = 3 tal que $P(0) = 1$ y $P(2) = 3$.

Hemos contestado al problema del móvil con aceleración constante: podemos determinar la trayectoria del mismo conociendo su posición en tres instantes y éste es el número mínimo de mediciones que debemos realizar, pues si tuviéramos menos de tres datos, existirían infinitos polinomios interpolatorios de grado dos (Teorema 2).

Ejercicio 4: Dar la aceleración de un móvil que se desplaza con movimiento uniformemente acelerado y tal que su posición en los tiempos 0,1 y 2 es 0,1 y 0 respectivamente.

Solución: La ecuación de la trayectoria es de la forma

$$X(t) = \frac{1}{2} a\, t^2 + v_o t + x_o$$

o sea es un polinomio de segundo grado en t y deseamos conocer su coeficiente de grado 2.

Los datos son: $(t_1, x_1) = (0,0)$; $(t_2, x_2) = (1, 1)$; $(t_3, x_3) = (2,0)$.

Por el teorema (1) sabemos que $X(t) = x_1 P_1(t) + x_2 P_2(t) + x_3 P_3(t)$

donde $P_1(t) = \frac{(t-1)(t-2)}{2}$, $P_2(t) = - t(t-2)$

y $P_3(t) = \frac{t(t-1)}{2}$.

Por lo tanto el coeficiente de segundo grado será $-x_2 = -1$ y así $a = -2$.

Otra forma, quizás más usual de encarar este problema es la siguiente: buscamos constantes a, v_o y x_o tales que el polinomio $X(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_o t + x_o$ tome los valores 0,1 y 0 en los puntos 0,1 y 2 respectivamente, o sea buscamos a, v_o y x_o soluciones del sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} x_o &= 0 \\ \tfrac{1}{2} a + v_o + x_o &= 1 \\ 2a + 2 v_o + x_o &= 0 \end{aligned}$$

o, en notación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ v_o \\ x_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\frac{a}{2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-2} = -1$$

El caso general de interpolación es totalmente análogo al planteado en el ejercicio 3, o sea, dados n puntos en el plano (t_1, x_1), ..., (t_n, x_n), encontrar un polinomio P de la forma $P(t) = a_1 + a_2 t + \dots + a_n t^{n-1}$, que los interpole, es equivalente a resolver el siguiente sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas

$$(1)\quad \begin{array}{l} a_1 + a_2\, t_1 + a_3\, t_1^2 + \dots + a_n\, t_1^{n-1} = x_1 \\ a_1 + a_2\, t_2 + a_3\, t_2^2 + \dots + a_n\, t_2^{n-1} = x_2 \\ \vdots \\ a_1 + a_2\, t_n^2 + a_3\, t_n^2 + \dots + a_n\, t_n^{n-1} = x_n \end{array}$$

o, en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definición: Dados n números reales $t_1, \dots, t_n$ se llama determinante de Vandermonde asociado a ellos al siguiente determinante

$$V(t_1, \dots, t_n) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Es un resultado del álgebra lineal que el sistema (1) tiene única solución $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

Entonces hemos probado,

Teorema 3:

Dados n puntos del plano $(t_1, x_1), \ldots, (t_n, x_n)$, existe un único polinomio interpolatorio P con $P = 0$ ó grado $(P) < n$ si y sólo si el determinante de Vandermonde asociado $V(t_1, \ldots, t_n)$ es no nulo.

Como consecuencia de ésto y del teorema 1 obtenemos un resultado clásico de la teoría de determinantes:

Corolario:

Si $t_1, \ldots, t_n$ son números reales distintos entonces $V(t_1, \ldots, t_n) \neq 0$.

Ejercicio 5: Sean $t_1, \ldots, t_n$ números reales, probar que $V(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i>j} (t_i - t_j)$

El problema de encontrar un polinomio que interpole ciertos datos se generaliza naturalmente al siguiente:
Sean $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ n funciones, y sean (t_i, x_i) $i = 1, \ldots, n$ datos, ¿existen constantes $a_1, \ldots, a_n$ tales que la función $f(t) = a_1 g_1(t) + \ldots + a_n g_n(t)$ sea una solución al problema de interpolación: $f(t_i) = x_i$ $i = 1, \ldots, n$
Generalmente, los números x_i son los valores en t_i de una función desconocida a la que se pretende aproximar. Notemos que, análogamente al caso ya analizado, $(g_1(t) = 1, g_2(t) = t, \ldots$ $\ldots, g_n(t) = t^{n-1})$ el problema de interpolación en n puntos con combinaciones lineales de las funciones $\{g_1(t), \ldots, g_n(t)\}$ es un problema de resolución de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas y por lo tanto se reduce al estudio del siguiente determinante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} g_1(t_1) & g_2(t_1) & \dots & g_n(t_1) \\ g_1(t_2) & g_2(t_2) & \dots & g_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1(t_n) \dots & g_2(t_n) & \dots & g_n(t_n) \end{vmatrix}$$

Ejercicio 6: ¿Es posible trazar una parábola con ecuación $P(t) = a\,t^2 + b$ que pase por los puntos $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 2)$?

Solución: En este caso las funciones son $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = t^2$ y planteamos el sistema

$$\begin{aligned} a\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + b &= 1 \\ a + b &= 2 \end{aligned}$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} \neq 0$$

Por lo tanto tenemos solución única dada por $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{2}{3}$

Ejercicio 7: Pruebe que si la función $a \cos t + b\,\mathrm{sen}\,t$ tiene dos ceros en $[0, \pi/2]$ entonces $a = b = 0$.

Solución: Sean t_1 y t_2 distintos tales que

$$\begin{aligned} a \cos t_1 + b\,\mathrm{sen}\,t_1 &= 0 \\ a \cos t_2 + b\,\mathrm{sen}\,t_2 &= 0 \end{aligned}$$

entonces (a,b) es solución de un sistema lineal cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} \cos t_1 & \mathrm{sen}\,t_1 \\ \cos t_2 & \mathrm{sen}\,t_2 \end{vmatrix} = \cos t_1\,\mathrm{sen}\,t_2 - \cos t_2\,\mathrm{sen}\,t_1 = \mathrm{sen}\,(t_2 - t_1)$$

Pero si $t_1, t_2 \in [0, \pi/2]$, $\mathrm{sen}\,(t_2 - t_1) \neq 0$ y por lo tanto la única solución del sistema es la trivial, $a = b = 0$.

Ejercicio 8: ¿Existe una función de la forma $f(t) = a + b \text{ sen } t + c \cos t$ que satisface $f(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 2$, $f(\frac{\pi}{4}) = 0$?

Ejercicio 9: ¿Para qué valores de t_1 y t_2 existe una función $f(t) = a + b\, e^t$ tal que $f(t_1) = 1$ y $f(t_2) = 2$

En el estudio de aproximación de funciones interesan aquellos conjuntos $\{g_1(t), \ldots, g_n(t)\}$ de funciones definidas en un intervalo $[a,b]$ tales que el determinante (2) sea distinto de cero para cualquier elección de $t_1, \ldots, t_n \in [a,b]$; estos conjuntos se denominan sistemas de Tchebycheff; o sea, $\{g_i\}_{i=1}^n$ es un sistema de Tchebycheff en $[a,b]$ si y sólo si para cada conjunto de datos $(t_1, x_1), \ldots, (t_n, x_n)$ con $t_i \in [a,b]$ y $t_i \neq t_j$ si $i \neq j$, existe una única combinación lineal $f(t) = a_1\, g_1(t) + \ldots + a_n\, g_n(t)$, tal que $f(t_i) = x_i \;\; \forall\, 1 \leq i \leq n$.

Por ejemplo, las funciones $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ forman un sistema de Tchebycheff en $\mathbb{R}$ (Corolario).

Ejercicio 10: $\{1, x^2\}$ es un sistema de Tchebycheff en $[0, 1]$ pero no lo es en $[-1, 1]$.

Ejercicio 11: Encontrar algún intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ donde las funciones $g_1(t) = t$ y $g_2(t) = t^2$ formen un sistema de Tchebycheff en $[a,b]$.

Ejercicio 12: Los sistemas de Tchebycheff generalizan propiedades de los polinomios, por ejemplo la siguiente: si $\{g_i\}_{i=1}^n$ es un sistema de Tchebycheff en $[a,b]$ entonces cualquier combinación no trivial $f(t) = a_1\, g_1(t) + \ldots + a_n\, g_n(t)$ tiene a lo sumo n-1 ceros en $[a,b]$.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.