EL ROL DE LA MATEMATICA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Jorge Vargas

Entre los objetivos de la escuela secundaria están:

- preparar a sus egresados para analizar, comprender y desempeñarse en nuestra sociedad.
- tener confianza en sus actos o decisiones.
- proveer a un joven de una cultura general.

Para realizar estos objetivos, historia, geografía, castellano le permiten formarse una cultura general y expresarse correctamente.

Formación Cívica, o materias similares le permiten saber cuáles son las reglas de funcionamiento de nuestra sociedad.

Física, Química, Ciencias Biológicas, lo ayudan a "entender" la naturaleza y la tecnología, además de darle elementos para mejorar la tecnología.

Matemática le enseña a abstraer, lo introduce en técnicas de razonamiento, y analizar lógicamente razonamientos hechos por él o por otras personas, o sea a evaluar o autoevaluarse. Discernir entre lo correcto y lo incorrecto. Comprender lo real como parte de lo probable, es decir, hipotetizar, construir teorías. Interpretar modelos.

Estos objetivos de la enseñanza de la matemática analizados desde el punto de vista de la psicología evolutiva de Piaget se encuadran en la frase:

Un objetivo de la enseñanza de la matemática en la escuela media es lograr que el alumno acceda al pensamiento operatorio lógico formal.

¿Cómo hacemos para lograr estos objetivos?

Una manera es:

1) Averiguar el nivel de desarrollo intelectual en que se encuentra un educando al ingresar a la escuela secundaria.

2) Comprender el significado del pensamiento formal y en particular, ¿Cuál debería ser el nivel de desarrollo de un joven que transcurrió la escuela media?

3) En base a 1) y 2) hacer una lista de objetivos concretos de la enseñanza de la matemática.

4) Programar la enseñanza para lograrlos.

Disgresión de Psicología: Según Piaget el desarrollo intelectual de una persona está dividido en los períodos siguientes:

Sensoriomotor (hasta 2 años)

Preoperatorio (" 7 años)

Operaciones concretas (hasta 13 (15) años)

Operaciones formales (desde aproximadamente 13 a 15 años en adelante).

En el período de las operaciones concretas el alumno debe desarrollarse para ser capaz de:

- Conservar masa, longitud, peso, volumen.
- Agrupar, clasificar y ordenar.
- Representarse mentalmente la acción de medir.

Según Piaget, al concluir la escuela secundaria desde la perspectiva del desarrollo del pensamiento, el alumno deberá ser capaz de:

- Diferenciar lenguaje corriente del lenguaje matemático (uso del si, igual, etc.)
- Ensayar soluciones y/o resolver problemas.
- Proponer problemas.

- Hacer uso de analogías.
- Utilizar dibujos para analizar una situación (gráficos en estadística, etc.).
- Traducir del lenguaje verbal al simbólico y viceversa . Lógica formal.
- Traducir del lenguaje geométrico al numérico y viceversa.
- Realizar dibujos ilustrando relaciones matemáticas dadas y o problemas y recíprocamente, aprender a traducir y explorar la información matemática de un dibujo. (y/o problema).
- Interiorizar relaciones de equivalencia y de orden.
- Realizar razonamientos, aún basándose en hechos no obviamente justificables (Entender teorías axiomáticas).
- Abstraer.
- Evaluar y autoevaluarse.
- Interpretar modelos y crear modelos.
- Revertir procesos.
- Deducir, inferir, conjeturar, hipotetizar.
- Hacer clasificaciones de clasificaciones.

Por tanto, algunos de los propósitos de la enseñanza de la matemática en la escuela media son:

- Construir una lógica universal.
- Enseñar a utilizar la matemática en la vida práctica.
- Desplazarse en el plano y en el espacio. (comprender el ajedrez, el sistema planetario, etc.).
- Autoevaluarse.
- Evaluar.
- Estimar cantidades.
- Comprender el concepto de orden.
- Desarrollar la habilidad de calcular aproximadamente.
- Desarrollar hábitos de encontrar caminos propios al resolver situaciones.

- Desarrollar la competencia y habilidades para representar matemáticamente hechos de la vida real.
- Introducir la recursividad.
- Adquirir pensamiento cuantitativo.
- Ser capaz de construir modelos matemáticos para resolver problemas.
- Adquirir el hábito de verificar un resultado.
- Estructurar el contenido matemático y comprender sus términos, enunciados, ideas y métodos de trabajo.
- Utilizar métodos heurísticos para la resolución de problemas.

A continuación presentamos una lista de ejercicios y o sugerencias que permiten lograr algunos de estos objetivos.

1) Para ejercitar la capacidad de abstracción, lo más conveniente es hacer realizar razonamientos basados en objetos concretos y luego hacer probar teoremas tales que la estructura lógica de su prueba es la misma que la del razonamiento concreto.

2) Después de enseñar un teorema hacer plantear problemas que se puedan inventar a partir de su enunciado.

Por ejemplo: Después de enseñar el teorema de Pitágoras, preguntar ¿Pueden los lados de un triángulo rectángulo ser números impares?. En un triángulo rectángulo, ¿Pueden ser los catetos pares y la hipotenusa impar?. ¿Pueden los catetos y los lados de un triángulo rectángulo ser cubos de números naturales?

O después de enseñar un teorema, hacer inventar ejercicios a partir del enunciado. Por ejemplo, despues de enseñar el algoritmo de división decir:

Invente una división cuyo cociente es $x^2 + 1$ y cuyo resto es $2x + 1$.

Invente una división cuyo dividendo es $x^2 + 1$ y cuyo resto es $5x^2 + 1$.

3) Problemas de colorear:

Colorea un mapa con (n) colores; de manera tal que países limítrofes tienen distintos colores.

Si $n = 2$ el problema no tiene solución en general (mapa de Argentina)

Si $n = 3$ a veces hay solución, a veces no.

Para Centroamérica si, para Argentina no.

Si $n = 4$ siempre tiene solución. Conviene destacar que este problema fue planteado a mediados del siglo pasado y resuelto en 1974 usando computadoras.

En lugar de colorear mapas planos se puede sugerir colorear mapas en toros, esferas u otras superficies.

4) Matemática y arte:

1) Problemas de embaldosar el plano.

2) Conjuntos de Julia.

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica por ejemplo $f(z) = z$, $f(z) = z^2 + c$.

Sea F = conjunto de Fatou de $f = \cup\{V$: V es abierto en $\mathbb{C}$ y $\{f^n | V\}$ es una familia normal$\}$. $J = \mathbb{C} - F$ se llama el conjunto de Julia de f. Se prueba que,

J es compacto en $\mathbb{C}$ o $J \cup \{\infty\}$ es compacto en $\hat{\mathbb{C}}$.

La estructura del conjunto F (o J) puede ser muy complicada. Por ejemplo, F puede tener infinitas componentes conexas.

Un número complejo z es un punto de periocidad de f si $f^n(z) = f(f(\dots f(z)) = z$ para algún natural n (Ejemplo 0,1 son puntos de periocidad de $f(z) = z^2$)

Definición: Si z es un punto de periocidad de f de período N, z se dice repelente si $|(f^N)'(z)| > 1$

Teorema: J = clausura del conjunto de puntos periódicos repelentes.

(Ej. Si $f(z) = z^2$, J = circunferencia unidad)

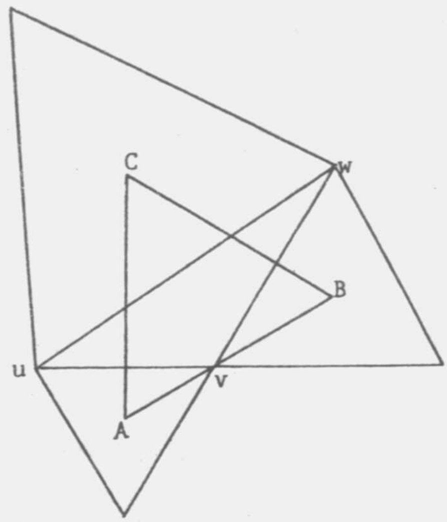
a) Con una computadora, mas recursividad, mas este teorema, se pueden dibujar conjuntos de Julia y de Fatou.

b) Por ejemplo para $f(z) = z^2 + c$ si se colorean las componentes conexas del conjunto de Fatou de f se obtienen dibujos muy lindos. Consultar The mathematical Intelligencer N° 3, 1983.

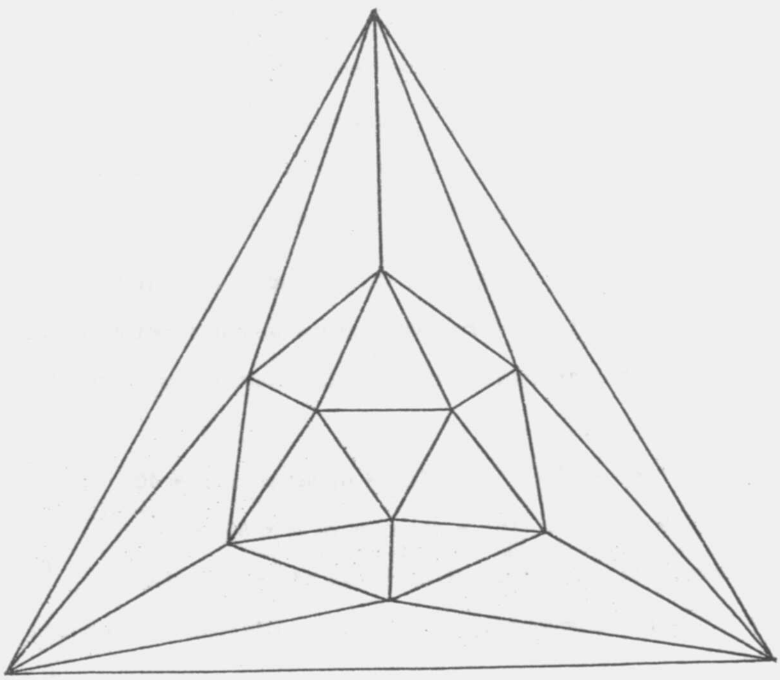
5) Después de enseñar el teorema que todo triángulo circunscribe una circunferencia hacer dibujar el centro para el caso de triángulos equiláteros. Triángulos isósceles. Para el caso de triángulos isósceles fijar el ángulo opuesto a la base, mover paralelamente la base y hacer observar que sucede con el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo.

6) Después de probar el teorema que todo triángulo se inscribe en una circunferencia. Hacer dibujar el centro de dicha circunferencia para triángulos equiláteros, isósceles, hacerlo comparar con la posición del centro de la circunferencia inscripta.
También hacer dibujar el centro de la circunferencia circunscripta de un triángulo oblicuángulo.

7) Para un triángulo $\overset{\Delta}{uvw}$ dado, dibujar triángulos equiláteros como indica la figura. Marcar los centros A,B,C de cada triángulo. Preguntar ¿Qué tipo de triángulo es ABC? La respuesta es, $\overset{\Delta}{ABC}$ es equilátero. O preguntar ¿Existe alguna relación entre los segmentos $\overline{Aw}$, $\overline{Cv}$ $\overline{Bu}$.



8) Plantear dibujos como el de la figura y hacer descubrir que triángulos son isósceles, equiláteros,. ¿Cuáles son congruentes?



9) Después de enseñar diferencia de cuadrados o racionalización de denominadores hacerles probar que $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ es positivo

Bosquejo: $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{3-2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

En general, $\sqrt{n} - \sqrt{m} > 0$ si $n > m$.

10) Después de probar un teorema que contiene varias hipótesis, sugerir eliminar alguna y derivar consecuencias que resulten. Por ejemplo después de probar el 4to. criterio de igualdad de triángulos hacer eliminar la hipótesis, los ángulos opuestos a los lados mayores son congruentes. La tesis entonces se transforma en:
Los triángulos son congruentes o el segundo triángulo es congruente al triángulo que se obtiene al reflejar el lado menor del primer triángulo con respecto a la altura del lado mayor.

11) Problemas que muestren la utilidad de teoremas de aritmética. Por ejemplo, si se pretende calcular 2^{65} a fuerza bruta tenemos que realizar 64 multiplicaciones mientras, si escribimos $2^{65} = 2((2^4)^4)^4$ solo tenemos que realizar $1 + 3 + 3 + 3 = 10$ multiplicaciones.

12) Hacer conjeturar; probar o desprobar conjeturas. Por ejemplo plantear el problema: Encontrar "fórmulas" que produzcan números primos. Una respuesta es: buscar función calculable f:naturales $\to$ naturales tal que $f(n)$ = primo para cada n.
Por ejemplo si $f(n) = n^2 - n + 41$, $f(n)$ = primo para $n \leq 40$
Si $f(n) = n^2 - 79\,n + 1601$, $f(n)$ = primo para $n \leq 80$
Aparece la pregunta, ¿Puede ser f polinómica? . Respuesta: No.
Si $f(m) = M$, es fácil probar que $f(r\,M + m)$ = múltiplo de M para cada r.

13) Hacer extraer consecuencias de las fórmulas que se enseñan: después

de dar los casos de factoreo hacer probar que $a^n + 1 =$ $= (a+1)(a^{n-1} + \ldots + 1)$ nunca es un número primo si n es impar y $a > 1$. Probar que $a^n - 1$, nunca es un número primo si $a > 1$ y $n > 1$.

14) Cuántos números se obtienen utilizando obligatoriamente cuatro veces el número 3 y las operaciones +, x, ÷ .

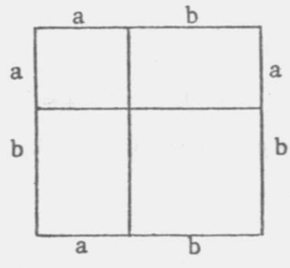
Por ejemplo: $3 \times 3 \times (3 - 3)$'

$(3 + 3) - (3 + 3)$.

15) Problemas que su solución requieran ideas usadas para resolver otros problemas. Por ejemplo presentar la solución que se presenta en Courant y Robins ¿Qué es la matemática? pagina 347 de : Encontrar el triángulo de menor perímetro inscripto en un triángulo rectángulo. Hacerle aplicar este método de solución al problema de los 3 pares. Consultar, Coxeter: Introducción a la geometría, página 89.

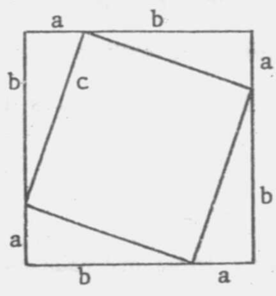
16) Problemas que hagan derivar fórmulas a partir de figuras geométricas por ejemplo,

i)



$(a + b)^2 = a^2 + 2\ ab + b^2$

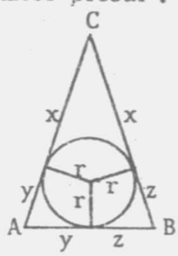
ii)



$(a+b)^2 = 4\ \frac{ab}{2} + c^2$, en consecuencia:

$a^2 + b^2 = c^2$

iii) Después de enseñar circunferencia inscripta en un triángulo y la proposición que las dos tangentes a una circunferencia que pasa por un punto exterior determinar segmentos congruentes, hacer probar :



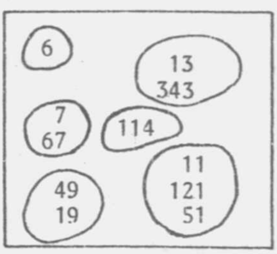
a) $x = s-a \qquad y = s-b$

$z = s-c \quad (s = \frac{1}{2}$ perímetro)

b) Area (ABC) = sr

c) abc = 4srR R = radio de la circunferencia que inscribe el $\overset{\triangle}{ABC}$.

iv) Las relaciones de equivalencia son útiles en esto, por ejemplo, presentan problemas del tipo: El dibujo indica una partición del conjunto $A = \{6,7,11,13,19,49,51,67,114,121,343\}$



Describir la relación de equivalencia que origina. La respuesta es: xRy ⇔ unidades (x) = unidades (y).

Destaco que para los problemas geométricos o aritméticos que hemos planteado una herramienta útil para conjeturar posibles soluciones es la computadora con lenguaje Basic o Logo.

17) Proponer problemas con datos que no conduzcan a la conclusión pretendida. Por ejemplo: construir un triángulo ABC tal que AB = 3, BC = 4, AC = 8. La respuesta es que no existe tal triángulo pués $8 > 3 + 4$, $\overline{AC} > (\overline{AB} + \overline{BC})$. Luego se puede pedir: Modificar los datos para que tal triángulo exista.

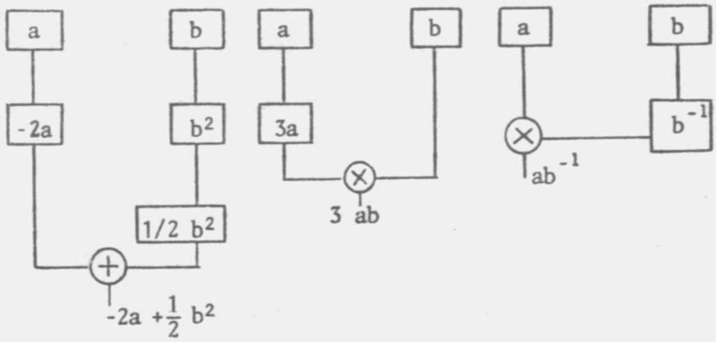
Respuesta: hacer por ejemplo $\overline{AC} = 5$

18) Una manera de ejercitar al alumno a pensar en forma ordenada es in

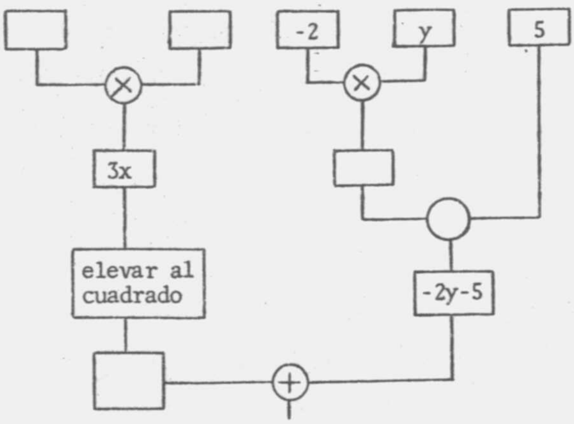
ducirlo a hacer diagramas de flujo.

Hacer un diagrama para calcular:

$-2a + \frac{1}{2} b^2$ $\quad\quad$ $3\ ab$ $\quad\quad$ ab^{-1}



19) Recíprocamente, dar al alumno diagramas de flujo incompletos. Ejemplo,



20) Hacer el diagrama de flujo de hechos reales. Como ser: Cepillarse los dientes, llamar por teléfono, leer un libro.

21) Introducir o hacer buscar paradojas. Por ejemplo.

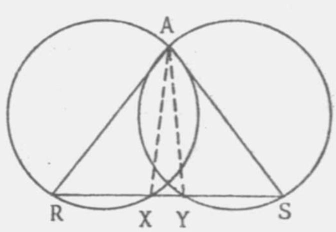
i) El peluquero de un pueblo afeita a todos los hombres que no se afeitan solos ¿Quién afeita al peluquero?

Lugares donde buscar paradojas son: El Quijote y Martín Fierro.

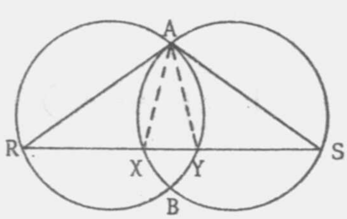
22) Problemas que conduzcan a diferenciar entre pruebas geométricas y demostración. Por ejemplo.

i) Considerar un triángulo inscripto en una circunferencia. Fijemos un punto de la circunferencia distinto de los vértices del triángulo. Trazar en la recta que contiene a cada lado el pie de la perpendicular a dicha recta por el punto marcado sobre la circunferencia. Probar que los tres puntos que resultan estan alineados.

ii) Pedir hacer el dibujo del enunciado: Trazar dos circunferencias secantes. Denotemos por A y B los puntos de intersección. Trazar en cada circunferencia el diámetro que termina en A. La mayoría de los alumnos harán:

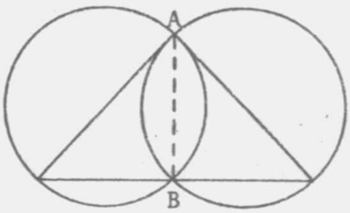


ó



Ahora les hacemos analizar:

Los ángulos $R\hat{X}A$, $A\hat{Y}S$ son inscriptos con ángulo central llano. Por tanto rectos, pero entonces tenemos que $\overleftrightarrow{AX}$ y $\overleftrightarrow{AY}$ son rectas distintas perpendiculares a $\overleftrightarrow{RS}$, y pasan por el punto A. Ciertamente esto es un absurdo ¿Qué es lo que ha pasado aquí?. Que hemos hecho el dibujo sin pensar. El dibujo correcto es,



Moraleja: Antes de dibujar hay que pensar.

Como estamos hablando de problemas, es conveniente destacar el siguiente párrafo debido a L. Euler sobre el rol que juega en la matemática *la observación*:

Las propiedades de los números que actualmente conocemos han sido usualmente descubiertas por observación y mucho tiempo antes que su validez se demostrara...

A esto se puede agregar que hoy en día, debido a la existencia de las computadoras, nuestras posibilidades de observar y especialmente experimentar en matemática se han incrementado notablemente. Una labor del docente es y será proporcionar preguntas o problemas al educando para incentivar su capacidad de observar y experimentar.

23) Problemas de tipo dinámico. Por ejemplo describir la curva que describe un punto que se mueve...
Consultar, Santaló - Rey Pastor - Balanzat: "Geometría Analítica" o la sección problemas de esta revista.

Para concluir esta sección sobre problemas sugerimos a cada docente o escuela, fundar y mantener su propio banco de problemas; que deberán ser clasificados según temas y si son de aplicación, comprensión, computación, análisis, interés y actitud etc.

Sobre como enseñar no diremos mucho pero recordemos que algunas de las etapas del aprendizaje son:

-descripción del concepto, percepción del concepto, formalización del concepto, uso del concepto.

Por tanto sugerimos al docente: 1) dar tiempo suficiente para la comprensión cuando se introducen ideas nuevas; 2) utilizar la técnica de aproximaciones sucesivas al presentar un concepto nuevo. Siempre se debe tener presente:

Construir un concepto es mas importante que memorizarlo

Antes de enseñar un concepto, o después de haberlo enseñado, una manera de evaluar en que etapa se encuentra el educando es por medio de las preguntas

Reproduzca, describa, represente, construya

Notemos que el orden en que hemos presentado las etapas del aprendizaje no significa que ocurran así en cada educando.

Como la observación, el análisis, la investigación, la abstracción de un razonamiento son mas importantes que una adquisición mecánica de conceptos, o memorización de una demostración, sugerimos que siempre que sea posible, presenten problemas de aplicación (tanto a la vida real o a la matemática). Esto no quiere decir que no se deban demostrar mensajes. Por otro lado, creemos que esto promueve el gusto por la matemática y/o la ciencia.

Sobre métodos de evaluación es difícil mejorar el artículo de Wilson publicado en Bloom - Hastings, Evaluación del aprendizaje Vol. 3. Ed. Troquel. Por tanto los remito allí. Nuestro pensamiento al respecto de evaluación es que al evaluar se debe poner énfasis en el proceso de aprendizaje y no en los contenidos. Los contenidos, son sólo un intermediario para desarrollar la estructura mental del educando.

En lo que resta de esta nota hablaremos de:

1) Uso de la computadora en la enseñanza.

2) Algunos problemas sobre educación que debemos investigar.

Desde hace unos años, debido a la existencia de las computadoras ha surgido una nueva relación en enseñanza, esta relación es triangular, aquí interactúan educador y educando por medio de la máquina.

Por razones obvias es claro que no llegaremos a que en las escuelas haya una computadora para cada alumno. Pero, sí es razonable pensar que cada escuela tenga una máquina.

Si esto sucede, se la puede usar así:

1) Para evaluar y/o reforzar conceptos, pués tiene la posibilidad de analizar instantáneamente las respuestas del alumno. Como la máquina es muy crítica sobre el nivel de los conocimientos del educando, además de ser un elemento neutro e imparcial, puede que conduzca al educando hacia una nueva actitud sobre el concepto de error y a reforzar la confianza en sí mismo. (No puede pensar: "esta me dice que está mal porque está enojada conmigo!"). Prácticamente, se la puede usar por ejemplo haciendo un programa que provea ejercicios de multiplicaciones graduadas, de acuerdo al grado que asiste el alumno. Entonces el alumno se sienta, indica en que grado está, la máquina le provee ejercicios, si le salen bien, la máquina le sugiere pasar de grado. Si le salen mal suena una chicharra y después de acumular cierta cantidad de errores, la máquina le sugiere bajar de grado. Se puede emplear una técnica similar pero en lugar de hacer multiplicaciones, hacer conjugar verbos, hacer sumar, hacer recordar fechas o personas o lugares en historia, Capitales de países, ríos en continentes, etc.

Se la puede usar:

2) Para evitar el fracaso en el aprendizaje escolar, puesto que en el aspecto psicológico, a diferencia de un curso habitual, aquí, el alumno juega un papel más activo (ya que está en permanente diálogo con la máquina).

3) Para simular y/o modelar.

4) Para acercar el arte a la matemática y recíprocamente. Por ejemplo, al dibujar los conjuntos de Julia.

5) Para ilustrar numéricamente igualdades o producir números con ciertas propiedades (Encontrar números primos de la forma $2^{2n} + 1$).

Consecuencias del uso de la computadora como elemento didáctico son:

a) Necesidad y refuerzo de la lógica (Debido a que para programar se debe construir diagramas de flujo).

b) Expresarse correctamente, puesto que cuando el alumno se relaciona con la máquina no puede decirle la conocida frase "bueno lo que quise decir es..."

c) Introduce y obliga a los alumnos a formalizar los distintos tipos de recursividad.

Algo que se debe hacer ante los alumnos es desmistificar la omnipotencia de la máquina. Esto es, debe mostrarseles que la computadora, no es capaz de hacer todo, sino las cosas para las cuales se la programó, no inventa nada. Para desmistificarla sugerimos: Para cualquier número natural n, se tiene que $(3^n - 1) - 3^n = -1$.

Sin embargo, si n es grande ($n \sim 60$ para calculadora de bolsillo) y hacemos la cuenta indicada con una máquina se obtiene 0. (cero!!).

Problemas a los que se debe prestar atención e investigarlos:

- Capacidad de construir una lógica universal.
- Relación entre la lógica de clases y la ocurrencia del número (cardinales).
- Dificultad de comprensión de definiciones o enunciados de teoremas que incluyen varios cuantificadores.
  (Definición de límite, continuidad, etc.)
- Dificultad de comprensión de sistemas axiomáticos.
- Uso de la computadora como elemento didáctico.
- La computadora y su influencia en la creatividad del educando.
- La computadora como elemento de evaluación.
- La computadora y el desarrollo de las estructuras del alumno.
- La computadora puede servir para disminuir el fracaso escolar?
- Con instrucción programada, ¿Cuáles estructuras del educando se activan?
- Se pueden preparar programas en Basic o en Logo que obligan al alumno a conservar longitudes, medida de ángulos, curvatura, en la pantalla.¿Es suficiente esta ejercitación para que se interioricen dichos conceptos?
- Medir las dificultades al substituir variables por otras variables o números (a cierta edad $3v + 5v = 8v$ se comprende, pero nó $3 + 5 = 8$)
- Dificultades del educando en comprender los símbolos =, -, +, ¿Cuál de ellos comprende primero?
- ¿Como se debe enseñar estadística y probabilidad en la escuela secundaria? Medir las obstrucciones psicológicas.

Algo de que no hemos hablado aquí es de estadística y probabilidad esto lo hará J. Martínez en un artículo específico.

Se invita a escribir artículos sobre los distintos tipos de recursividad, sugeriría cómo enseñarlos usando matemática u otra ciencia.

BIBLIOGRAFIA

-Aranega - Vargas. Didáctica de la matemática. A aparecer.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.

¡ES TRIVIAL!

El Profesor está dando su clase de Matemática. En un momento dado hace una afirmación. Piensa 10 segundos y exclama: ¡Es Trivial! ... Sigue su exposición. Minutos más tarde un estudiante insatisfecho lo interrumpe y le pregunta si esa afirmación era realmente trivial. El Profesor lo mira, mira la pizarra y contesta: Sí, ¡Es trivial!. Sigue la clase. Más tarde, cuando está por finalizar la hora de clase, el alumno vuelve a interrumpir con la misma pregunta, esta vez diciendo que no le parecía trivial. El Profesor se fastidia, le vuelve a decir que es trivial y deja la clase para un intervalo. Es hora de comenzar la segunda parte, pero el Profesor no aparece. Pasan 10 minutos, 20 minutos, y nada. A los 30 minutos aparece el Profesor. Se dirige a la clase y dice: ¡Era Trivial!