EL METODO DE ITERACION EN UN PROBLEMA DE MATEMATICA FINANCIERA

Norberto A. Fava

Un problema que se presenta con frecuencia en las transacciones comerciales (compras a plazos y amortización de préstamos) es el siguiente: una persona contrae una deuda D que debe amortizar en n cuotas iguales que supondremos mensuales para fijar ideas, con un importe fijo de valor a. El problema consiste en calcular la tasa efectiva de interés mensual que el vendedor o el prestamista, según el caso, le está cobrando. Hemos elegido este problema por su innegable valor práctico y porque su solución matemática puede resultar interesante.

Llamando i al interés mensual por cada unidad de capital, el monto de la deuda al cabo de un mes (descontada la primera cuota de amortización) será

$$D_1 = D(1+i) - a.$$

Al cabo del segundo mes el monto de la deuda (descontada la segunda cuota de amortización) se habrá convertido en

$$D_2 = D_1(1+i) - a = D(1+i)^2 - a(1+i) - a$$

y al cabo de n meses, el monto de la deuda estará dado por la fórmula

$$D_n = D(1+i)^n - a(1+i)^{n-1} - a(1+i)^{n-2} - \dots - a(1+i) - a. \tag{1}$$

La demostración rigurosa de (1) se realiza por inducción, sobre la base de la fórmula recursiva $D_{K+1} = D_k(1+i) - a$.

En virtud de la fórmula que da la suma de los términos de una progresión geométrica, podemos escribir la igualdad (1) en la forma

$$D_n = D(1+i)^n - a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

y teniendo en cuenta que al cabo de n meses la deuda D_n debe ser igual a cero obtenemos para la incógnita i la ecuación

$$D(1+i)^n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} ,$$

que puede a su vez escribirse de la manera siguiente:

$$i = \frac{a}{D}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

Considerando ahora la función

$$f(x) = \frac{a}{D}\left[1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right]$$

es claro que nuestro problema consiste en encontrar un número positivo s tal que $s = f(s)$.

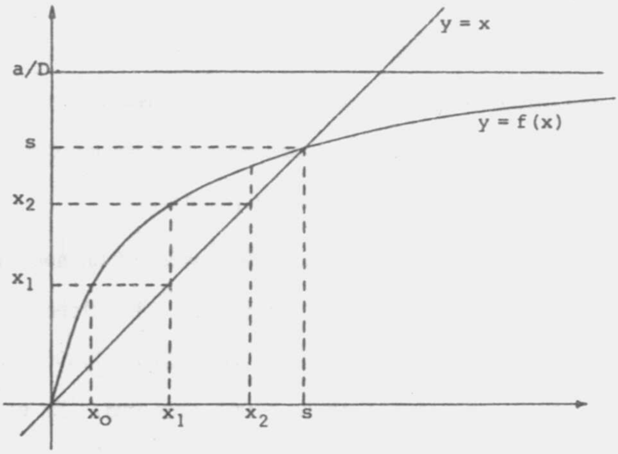
Para convencernos de que existe un único número s con dichas propiedades y ver el modo de calcularlo, es conveniente que estudiemos la variación de f sobre la semirrecta $x \geq 0$.

En primer lugar se ve directamente que f es creciente, toma el valor cero en el origen, y tiende al valor a/D cuando x tiende a infinito. Por otro lado, la derivada de f se calcula fácilmente:

$$f'(x) = \frac{na}{D}\,\frac{1}{(1+x)^{n+1}} .$$

Esta fórmula nos muestra que f' es positiva y decreciente sobre la semirrecta considerada y tiende a cero cuando x tiende a infinito;en particular, esto muestra que el gráfico de f es cóncavo. Además puesto que $f'(0) = na/D$, la derivada de f en el origen es mayor que uno,salvo que nos hayan prestado sin interés o nos hayan regalado dinero, lo que es infrecuente.

Las consideraciones precedentes nos permiten trazar en forma aproximada el gráfico de f teniendo en cuenta su ubicación con respecto a la recta y = x, como se ilustra en la figura siguiente.



La curva $y = f(x)$ encuentra a la recta $y = x$ en el origen y también en el punto $x = s$ que es la solución del problema. Veamos ahora cómo calcular s.

Eligiendo como valor inicial un número positivo cualquiera, al que llamaremos x_o, consideremos la sucesión (x_k) definida por la fórmula recursiva

$$(2) \qquad x_{k+1} = f(x_k) \qquad (k = 0,1,2,\ldots),$$

es decir, $x_1 = f(x_o)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, etc.

Una simple inspección al gráfico sirve para convencerse de que la sucesión así generada es monótona (creciente si $x_o < s$ y decreciente si $x_o > s$) y acotada, pues f es acotada sobre la semirrecta $x \geqslant 0$. La demostración formal de estas afirmaciones se realiza fácilmente por inducción, teniendo en cuenta que f es una función creciente que verifica $f(x) > x$ para cada x entre 0 y s, y también que $s < f(x) < x$ para todo $x > s$.

En estas condiciones podemos afirmar que existe un número positivo t que verifica $t = \lim x_k$, y haciendo que k tienda a infinito en la igualdad (2), obtenemos $t = f(t)$, es decir, $t = s$. De modo que $s = \lim x_k$.

Resumiendo: la sucesión (x_k) generada por la fórmula (2) a partir de un número positivo cualquiera x_o converge monótonamente hacia el número s que es la solución del problema planteado.

Ejemplo. El ejemplo siguiente ha sido extraído de un anuncio comercial del diario "La Nación" del día 14 de agosto. En dicho anuncio se ofrece en venta un artículo cuyo precio al contado es 71800 con un anticipo de 21540 y 10 cuotas mensuales de 11060 cada una. En este caso tenemos $n = 10$, $a = 11060$ y $d = 50260$. La sucesión generada a partir del valor inicial $x_o = 1$ es la siguiente:

k	x_k
0	1
1	0.2198408122
2	0.1898908688
3	0.1813779493
4	0.1784987246
5	0.1774721985
6	0.1770994935
7	0.1769632873
8	0.1769133918
9	0.1768950981
10	0.1768883887
11	0.1768859277
12	0.1768850249
13	0.1768846938
14	0.1768845723
15	0.1768845277
16	0.1768845114
17	0.1768845054
18	0.1768845032
19	0.1768845024
20	0.1768845021
21	0.1768845020
22	0.1768845019
23	igual a la anterior

El grado de precisión alcanzado es absurdo para este problema y se ha usado solamente para observar el decrecimiento de la sucesión. La má quina utilizada no puede distinguir entre los valores x_{23} y x_{22} ya que la diferencia entre ambos se encuentra por debajo del error con que trabaja dicha máquina.

Sea e un número positivo tal como 10^{-3}, 10^{-4}, etc. El siguiente algoritmo interrumpe el cálculo cuando el valor absoluto de la diferencia entre x_{k+1} y x_k es menor que e, y exhibe el último valor calculado.

Datos n, a, D, e

$y \leftarrow 1$

$x \leftarrow y$

$y \leftarrow (a/D)(1 - 1/(1+x)^n)$

$|y - x| \geqslant e$?

exhibir y

detenerse

ESTIMACION DEL ERROR. Puesto que el algoritmo se detiene en un valor x que verifica $|x - f(x)| < e$ y por otro lado la solución s verifica $s = f(s)$, tendremos

$$|x - s| \leqslant |x - f(x)| + |f(x) - f(s)|.$$

Por el teorema del valor medio, $f(x) - f(s) = (x - s).f'(u)$, donde u es un número comprendido entre s y x. Luego,

$$|x - s| < e + f'(u)|x - s|,$$

de donde, poniendo $y = f(x)$, resulta:

$$|y - s| \leqslant |x - s| < \frac{e}{1 - f'(u)}$$

El número $f'(u)$ es muy cercano a $f'(y)$, por lo que en primera aproximación puede substituirse por este último en la desigualdad anterior.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Universidad de Buenos Aires.
Departamento de Matemática