EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1) Sean $0 < k_i < 1$ para $i = 1,2,3,\ldots$. Formamos la sucesión de sumas parciales

$$\begin{aligned} s_1 &= k_1 \\ s_2 &= k_1 + k_2(1-k_1) \\ &\vdots \\ s_{n+1} &= s_n + k_{n+1}(1-s_n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observar que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = k_1 + k_2(1-k_1) + k_3(1-k_1)(1-k_2) + \ldots$ es un número menor o igual a 1. Probar que este límite es 1 si y sólo si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i = \infty$. Como aplicación de este resultado mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \cdot \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)} \cdot \frac{1}{2n+3} = \frac{2}{3}$$

[Enviado por Hugo Cuenya y Miguel Marano - Departamento de Matemática, Universidad de Río Cuarto].

Los siguientes ejercicios han sido seleccionados entre aquellos, ya publicados, que no han recibido solución.

(2) Cuatro esferas de radio 1, tres apoyadas en el piso y la cuarta sobre ellas, son todas tangentes entre si.
Circunscríbase sobre ellas un tetrahedro equilátero de lado a. ¿Cuánto vale a?. [C. Sanchez] .

(3) Dados un número finito de puntos del plano con la propiedad que toda recta que une dos de ellos contiene otro punto de los dados, probar que los puntos son colineales. [E. Gentile] .

(4) En un triángulo dado inscribir un triángulo con sus tres lados paralelos a tres líneas dadas. [C. Sanchez] .

(5) Use los polinomios $x^2 - 2$, $x^2 - 3$, $x^3 - 2, \ldots$, etc. para deducir que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ son irracionales. [J. Vargas] .

(6) Consideremos un corral circular de radio conocido R. En él se encierra un caballo atándolo en un punto del perímetro con una cuerda de longitud L (ver figura). Se desea conocer L de modo que el caballo pueda moverse sólo en un área que sea la mitad del total. [O. Castellano] .