EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1) Analizar la validez del siguiente razonamiento

"Sea $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 .$$

Por lo tanto $1^2 = -1 - 1$, o sea $1 = -2$, o sea $3 = 0$". (Gentile)

2) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \frac{n}{2} \quad \text{si } n \text{ es par}$$

$$f(n) = 3n + 1 \quad \text{si } n \equiv 1 \ (4)$$

$$f(n) = 3n - 1 \quad \text{si } n \equiv 3 \ (4)$$

Probar que cualquiera sea n, iterando

$$n \to f(n) \to f(f(n)) \to \dots$$

en algún momento se obtiene 1. Por ejemplo:

$$14 \to 7 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nota. Señalemos un famoso problema *abierto*: el llamado *algoritmo de Siracusa* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$S(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

"Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, repitiendo la aplicación s se llega alguna vez a 1". Por ejemplo

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20$$
$$\to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 .$$

No se sabe hasta el presente si la afirmación es correcta, ha sido verificada su validez por computadoras para todo $n \leqslant 2^{50}$. A manera de ejercicio aplicar el algoritmo a $n = 31$. Notar que si en algún paso se obtiene una potencia de 2 el algoritmo "converge" a 1. (Gentile)

3) Sean $x, y \in \mathbb{R}$

a) Probar que i- $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

ii- vale = si y sólo si $x = y = 0$

b) Probar que $x^2 - xy + y^2 \geq 0$ con = si y sólo si $x = y = 0$.

c) Probar que $x^2 \pm x + 1 > 0$.

¡Mire qué solución a 1):

$$2(x^2 + xy + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + y^2$$

$$= (x+y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0 \text{ , con } = \iff x = y = 0.$$

(Gentile).

4) Probar que $\forall \ a \in \mathbb{Z}$, a impar $16 / a^4 - 1$.

5) $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Probar

$a^2 + b^2 = 7ab \Rightarrow \log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$.

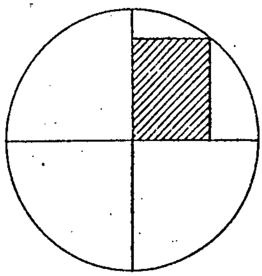
6) En la figura dados:

a: radio de la circunferencia

A: área del rectángulo.

Calcular: el perímetro del rectángulo.

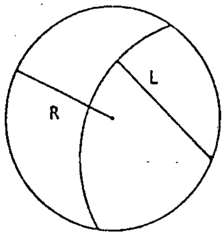
(Gentile).



7) Sean m y n impares, $m < n$, $\text{mcd}(m,n) = 1$. Se tienen tres recipientes C_1, C_2, C_3 con capacidad para m, n y $m+n$ litros, respectivamente. El recipiente C_3 se encuentra lleno de líquido, C_1 y C_2 estando vacíos. Se desea distribuir el contenido de C_3, usando sólo los tres recipientes, de manera que C_2 y C_3 contengan, cada uno, $\frac{m+n}{2}$ litros. Cómo hacerlo? (Sugerencia: considere primero el caso en que $m = 3$, $n = 5$). (R. Miatello)

8) Consideremos un corral circular de radio conocido R. En él se en

cierra un caballo atándolo en un punto del perímetro con una cuerda de longitud L. Se desea conocer L de modo que el caballo pueda moverse sólo en un área que sea la mitad del total. (O. Castellano)



9) Si dos cuerdas de una circunferencia se intersectan en ángulos rectos, la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro segmentos determinados es igual al cuadrado del diámetro. (C. Sánchez)

10) Sean a, b, c, d números racionales. A un número irracional. ¿Cuando es el número $\frac{aA+b}{cA+d}$ racional? (J. Vargas)

11) Construir ejemplos de números irracionales. (J. Vargas)

12) Encontrar criterios distintos de los cuatro usuales para decidir cuando dos triángulos isósceles son congruentes. (J. Vargas)

13) Sea $f_1 = f_2 = 1$ y f_n $(n \geqslant 3)$ tal que

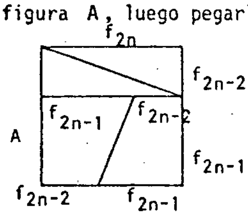
$$f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$$

i) Probar por inducción que

$$f_n^2 = f_{n-1}\, f_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

ii) Dibujar un cuadrado de lado f_{2n} y recortarlo como indica la figura A, luego pegarlo como indica la figura B.

Fig. A



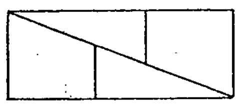


Fig. B

El rectángulo de la figura B tiene base $(f_{2n-1} + f_{2n})$ y altura f_{2n-1}, por tanto su área es una unidad menor que la del cuadrado de la figura A. Explicar. (J. Vargas)