Funciones trigonométricas generalizadas

Noemí. P. Kisbye

Abstract

Las funciones trigonométricas sen (ax) y cos (ax), $a \in \mathbf{R}$, satisfacen las propiedades descriptas en i) – iii). Según el trabajo de A. Kurepa, [1], si se pide que sean continuas éstas son esencialmente las únicas funciones que satisfacen dicha ecuación funcional.

El presente trabajo pretende mostrar que si no se pide continuidad, existen otros pares de funciones $(c(x), s(x))$ que las cumplen y que las de la forma $(cos\ (ax), sen\ (ax))$ son sólo una pequeña parte de la totalidad.

Dar un tal par de funciones $(c(x), s(x))$ equivale a dar un homomorfismo de grupos de $\mathbf{R}$ en el círculo unitario S^1. Es por eso que para entender la prueba de la existencia de otros homomorfismos se requieren conocimientos básicos sobre espacios vectoriales, homomorfismos de grupos y cardinalidad de conjuntos.

Al final del trabajo se exhibe un ejemplo de un homomorfismo de $\mathbf{R}$ en S^1 que no proviene de un par de funciones trigonométricas clásicas. Este ejemplo puede ser generalizado y demuestra entonces la gran cantidad de funciones que verifican las propiedades i) – iii) y que no son de la forma $(cos\ (ax), sen\ (ax))$.

Consideremos los pares de funciones $\big(c(x), s(x)\big)$ que satisfacen las ecuaciones funcionales:

(i) $c(x + y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$

(ii) $s(x + y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$

(iii) $(s(x))^2 + (c(x))^2 = 1$

para todo x, $y \in \mathbf{R}$. Un ejemplo son todos los pares de funciones de la forma $e_a(x) = \big(\cos\ (ax), \text{sen}\ (ax)\big)$, para cada $a \in \mathbf{R}$. Más aún, en [1] está probado que si se pide que c y s sean funciones continuas, entonces esas son todas las soluciones posibles.

El objetivo del trabajo es probar que si no se pide continuidad, hay infinidad de pares $\big(c(x), s(x)\big)$ que satisfacen (i), (ii) y (iii), y que los del tipo $e_a(x)$ son sólo una pequeña parte de la totalidad. Antes de probar esto, recordaremos la definición de grupo y de homomorfismo de grupos.

Un *grupo* es un par $(G, \cdot)$ donde G es un conjunto no vacío y $(\cdot)$ es una operación binaria en G tal que se cumplen las siguientes propiedades:

g1) Clausura: $g \cdot h \in G$, para todo $g, h \in G$.

g2) Asociatividad: $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$, para todo $g, h, x \in G$.

g3) Identidad: Existe $1 \in G$ tal que $g \cdot 1 = 1 \cdot g = g$ para todo $g \in G$.

g4) Inverso: Para todo $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$.

Los pares $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{R} - \{0\}, \cdot)$ son ejemplos de grupos. Si $(G, \cdot)$ y $(H, *)$ son grupos, un *homomorfismo* de G en H es una función $f : G \mapsto H$ tal que

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2) \qquad \text{para todo } g_1, g_2 \in G$$

Identifiquemos entonces el par $\big(c(x), s(x)\big)$ con la función $e : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ dada por

$$e(x) = c(x) + is(x).$$

Entonces (i) y (ii) son equivalentes a

$$e(x + y) = e(x)\, e(y) \tag{1}$$

Luego e es un homomorfismo de $(\mathbf{R}, +)$ en $(\mathbf{C}, \cdot)$. Si además se agrega la condición (iii), se tiene un homomorfismo de $(\mathbf{R}, +)$ en $(S^1, \cdot)$ donde S^1 es el grupo multiplicativo de números complejos $z = x + iy$ tales que $x^2 + y^2 = 1$.

El problema se traduce entonces en hallar el conjunto $\mathcal{H}$ de homomorfismos de $\mathbf{R}$ en S^1 y caracterizar el subconjunto de homomorfismos continuos $\mathcal{H}_c$.

Recordemos brevemente algunas propiedades del grupo S^1. Dado $z \in \mathbf{C}$, se define el *módulo* de z como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{si } z = x + iy.$$

Gráficamente, S^1 está representado en el plano por la circunferencia de radio 1. Puesto que $|z\,w| = |z|\,|w|$, S^1 es un grupo con la operación de multiplicación y elemento neutro $1 = 1 + i\,0$.

Todo elemento $z \in S^1$ es de la forma $z = \cos\,\alpha + i\text{sen}\,\alpha$, para algún $\alpha \in \mathbf{R}$. Usaremos entonces la notación

$$e^{i\alpha} = \cos\,\alpha + i\text{sen}\,\alpha. \tag{2}$$

De las propiedades del seno y del coseno respecto de la suma de ángulos, se sigue que la función $\exp(\alpha) = e^{i\alpha}$ satisface (1), y por lo tanto, $\exp : \mathbf{R} \mapsto S^1$ es un homomorfismo de grupos.

Analicemos ahora los homomorfismos de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Es fácil ver que $(\mathbf{R}, +)$ es un grupo y que $\mathbf{R}$ es un $\mathbf{Q}$-espacio vectorial. Si $\phi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ es un homomorfismo de grupos, entonces

$$\phi(p\,x) = \phi(\overbrace{x + \cdots + x}^{p \text{ veces}}) = \overbrace{\phi(x) + \cdots + \phi(x)}^{p \text{ veces}} = p\,\phi(x) \tag{3}$$

$$\phi(x) = \phi(q\,\frac{1}{q}\,x) = q\,\phi(\frac{1}{q}\,x) \tag{4}$$

para todo p, $q \in \mathrm{N}$. Luego

$$\phi(\frac{p}{q}\,x) = \frac{p}{q}\,\phi(x) \qquad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}.$$

Es decir, ϕ es un homomorfismo de $\mathbf{Q}$-espacios vectoriales. Lo que probaremos ahora es que todo homomorfismo de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ determina un homomorfismo de $\mathbf{R}$ en S^1, y que dos homomorfismos distintos no pueden determinar el mismo.

Teorema 1 *Sea $\phi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ un homomorfismo de grupos. Entonces*

$$\tilde{\phi} = \exp \circ \phi : \mathbf{R} \mapsto S^1$$

también es homomorfismo. Además, $\tilde{\phi} \equiv 1$ si y sólo si $\phi \equiv 0$.

Prueba:

Puesto que ϕ y exp son homomorfismos, su composición también lo es. Además, si $\tilde{\phi} \equiv 1$ y $\phi \not\equiv 0$, entonces existe $r \in \mathbf{R}$ tal que $\phi(r) = 2\pi m$, para algún $m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$. Ahora

$$\phi(\frac{r}{2m}) = \frac{1}{2m}\phi(r) = \pi,$$

pero $\pi \neq 2\pi k$, para cualquier $k \in \mathbf{Z}$, luego $\tilde{\phi}(\frac{r}{2m}) \neq 1$. La contradicción resulta de suponer que $\phi \not\equiv 0$.

Recordemos ahora la noción de continuidad de una función:

Definición 1.1 *Sea $f : X \mapsto Y$ una función, y sea $x_0 \in X$. Entonces f es* continua *en x_0 si y sólo si para toda sucesión $\{x_n \mid n \in \mathrm{N}\} \subset X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} = x_0$ se cumple que*

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

f se dice continua *si es continua en todo $x \in X$.*

Notemos que si además $f : X \mapsto Y$ es un homomorfismo de grupos, entonces para cualquier sucesión $\{x_n \mid n \in \mathrm{N}\} \subset X$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f((x_n - x_0) + x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n - x_0) + f(x_0)$$

para cualquier $x_0 \in X$. Dado que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n - x_0 = 0$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n - x_0) = 0,$$

es decir que f es continua en X si y sólo si f es continua en 0.

Del trabajo de A. Kurepa, [1], sabemos que todo homomorfismo continuo de $\mathbf{R}$ en S^1 es de la forma $\phi(t) = \exp(iat)$, para algún $a \in \mathbf{R}$. Un resultado análogo se tiene para los homomorfismos continuos de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$:

Teorema 2 *Si* $\Phi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ *es un homomorfismo continuo, entonces existe* $b \in \mathbf{R}$ *tal que* $\Phi(x) = b\,x$*, para todo* $x \in X$.

Prueba: Sea Φ continua y sea $q \in \mathbf{Q}$. Entonces $\Phi(q) = q\,\Phi(1)$. Además, para todo $r \in \mathbf{R}$, existe una sucesión $\{r_n\} \subset \mathbf{Q}$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} r_n = r$$

Como Φ es continua, resulta que

$$\Phi(r) = \lim_{n \to \infty} \Phi(r_n) = \lim_{n \to \infty} r_n \Phi(1) = r\Phi(1).$$

Poniendo $b = \Phi(1)$, el teorema queda probado.

De este teorema y de los resultados de [1] es fácil concluir que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathcal{H}_c$ de homomorfismos continuos de $\mathbf{R}$ en S^1 y el conjunto de homomorfismos continuos de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Del teorema 1 solo podemos concluir que el conjunto de todos los homomorfismos de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ se puede incluir en el de todos los homomorfismos de $\mathbf{R}$ en S^1, aunque en principio este último conjunto podría ser más grande.

Para darle más rigurosidad a este comentario, introduciremos algunas nociones sobre cardinalidad de conjuntos.

De manera intuitiva, el cardinal mide el tamaño de un conjunto. Si un conjunto A tiene 20 elementos, decimos que el cardinal de A es 20, y los denotamos por $|A| = 20$.

Si A y B son dos conjuntos arbitrarios, no necesariamente finitos, decimos que $|A| \leq |B|$ si existe una función $f : A \mapsto B$, inyectiva. A y B tienen el mismo cardinal si existe $f : A \mapsto B$ biyectiva, y $|A| < |B|$ si existe $f : A \mapsto B$ inyectiva pero no existe ninguna f biyectiva.

Decimos que A es *numerable* si $|A| = |\mathrm{N}|$, y que es *no numerable* si $|\mathrm{N}| < |A|$.

Ejemplos:

- $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$ son conjuntos infinitos numerables,
- $\mathbf{R}$ y $\mathcal{P}(\mathbf{R}) = \{A \subset \mathbf{R}\}$ son conjuntos no numerables.

Todo espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ tiene una base, y dos bases de V sobre $\mathbf{K}$ tienen el mismo cardinal. Se llama *dimensión* de V sobre K y se denota por $dim_{\mathbf{K}}V$ al cardinal de una tal base.

Por ejemplo, $dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ es no numerable, de lo contrario $\mathbf{R}$ sería numerable.

Con esta noción de cardinalidad, los resultados obtenidos hasta ahora se resumen de la siguiente manera: sean

$$\begin{aligned} Hom(\mathbf{R},\mathbf{R}) &= \{f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} \mid f \text{ homomorfismo de grupos}\} \\ Hom_c(\mathbf{R},\mathbf{R}) &= \{f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} \mid f \text{ homomorfismo continuo }\}. \end{aligned}$$

Del teorema 1 concluimos que

$$|Hom(\mathbf{R},\mathbf{R})| \leq |\mathcal{H}|$$

y de los resultados de A. Kurepa y el teorema 2 obtenemos:

$$|\mathbf{R}| = |Hom_c(\mathbf{R},\mathbf{R})| = |\mathcal{H}_c|.$$

Además, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbf{R}$ sobre $\mathbf{Q}$, dar un homomorfismo $f \in Hom(\mathbf{R},\mathbf{R})$ es equivalente a dar una función $\hat{f} : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}$. Dado que $|\mathcal{B}| = |\mathbf{R}|$:

$$|Hom(\mathbf{R},\mathbf{R})| = |\{f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} \mid f \text{ es función}\}|.$$

Ahora bien, para cualquier subconjunto A de $\mathbf{R}$, se tiene la función característica $\chi_A : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, donde

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Luego, si $\mathcal{P}(X) = \{A \subset X\}$, es fácil ver que

$$\mathcal{P}(\mathbf{R}) \subset \{f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} \mid f \text{ es función}\}$$

y entonces

$$|\mathcal{P}(\mathbf{R})| \leq |Hom(\mathbf{R}, \mathbf{R})|.$$

Sólo nos falta ver que $|\mathbf{R}| < |\mathcal{P}(\mathbf{R})|$, y esto se prueba en el siguiente lema:

Lema 2.1 *Sea X un conjunto arbitrario, $X \neq \emptyset$. Entonces $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

Prueba:

Es claro que la función $g : X \mapsto \mathcal{P}(X)$, $g(x) = \{x\}$ es inyectiva, y por lo tanto $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. Supongamos por el absurdo que existe $h : X \mapsto \mathcal{P}(X)$ biyectiva. Entonces, para cada $A \subset X$, existe $x \in X$ tal que $h(x) = A$. Sean U y V los siguientes subconjuntos de X:

$$U = \{x \in X \mid x \in h(x)\}$$

$$V = \{x \in X \mid x \notin h(x)\}$$

Es fácil ver que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$. Además debe existir $v \in V$ tal que $h(v) = V$.

Si $v \in U$, por definición de U, $v \in h(v) = V$, lo cual es imposible, y si $v \in V$, por definición de V, $v \notin V$, que también es un absurdo. Luego el elemento v no puede existir.

Concluimos finalmente que

$$|\mathcal{H}| \geq |Hom(\mathbf{R}, \mathbf{R})| \geq |\mathcal{P}(\mathbf{R})| > |\mathbf{R}| = |\mathcal{H}_c|$$

Es decir que la gran mayoría de los homomorfismos de $\mathbf{R}$ en S^1 no son de la forma $\phi(x) = e^{iax}$ sino más raros.

Culminamos este trabajo dando un ejemplo de un morfismo de $\mathbf{R}$ en S^1 que no proviene de un endomorfismo de $\mathbf{R}$:

Consideremos a $\mathbf{R}$ como $\mathbf{Q}$-espacio vectorial, y sea $\beta = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una base de $\mathbf{R}$, podemos suponer que $1 \in \beta$. Esto significa que si $x \in \mathbf{R}$, x se escribe de manera única de la forma

$$x = q + q_1\, x_1 + q_2\, x_2 + \cdots + q_n\, x_n$$

para ciertos $q, q_1, q_2, \cdots, q_n \in \mathbf{Q}$, y $x_1, x_2 \cdots, x_n \in \beta$.

Luego, si f es un morfismo de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$,

$$f(x) = f(q)\, f(q_1\, x_1) f(q_2\, x_2) \cdots f(q_n\, x_n).$$

Para un tal x definimos

$$f(x) = f(q)$$

es decir que $f(x) = 1$ si x "no tiene parte racional". Puesto que f es homomorfismo,

$$f(\frac{a}{b}) = (f(\frac{1}{b}))^a \qquad a,\ b \in \mathbf{Z},$$

luego basta definir a f en las fracciones del tipo $\frac{1}{b}$. En realidad bastará con definir f en las fracciones del tipo $\frac{1}{p^m}$, con p un número primo. Para ver que esto puede dar una buena definición de f, veremos primero el siguiente lema:

Lema 2.2 *Sea p un número primo, y sean S y T los siguientes subconjuntos de $\mathbf{Q}$:*

$$\begin{aligned} S &= \{\frac{a}{p^m} \mid a \in \mathbf{Z},\ m \geq 0\} \\ T &= \{\frac{r}{s} \mid r,\ s \in \mathbf{Z},\ p \text{ no divide a } s\}. \end{aligned}$$

Entonces $S \cap T = \mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q} = S + T$.

Prueba: Si $\frac{a}{p^m} = \frac{r}{s}$, entonces $a\, s = r\, p^m$. Luego p^m/a y s/r, o lo que es lo mismo, $\frac{a}{p^m} \in \mathbf{Z}$ y $\frac{r}{s} \in \mathbf{Z}$.

Que $\mathbf{Q} = S + T$, significa que todo racional $q = \dfrac{a}{b}$ se puede escribir de la forma $q = s + t$, $s \in S$ y $t \in T$. Sea p^m la mayor potencia de p que divide a b. Entonces $b = k\,p^m$, $(k,p) = (k,p^m) = 1$. Luego existen enteros u y v tales que

$$1 = u\,k + v\,p^m.$$

Multiplicando ambos miembros por $q = \frac{a}{b}$ obtenemos

$$q = \frac{au}{p^m} + \frac{av}{k} \qquad \frac{au}{p^m} \in S,\ \frac{av}{k} \in T.$$

Fijemos entonces un número primo p, y consideremos $\{a_n \mid n \geq 0\}$ una sucesión de números enteros tales que $0 \leq a_n < p$, y definimos

$$f(\frac{1}{p^m}) = exp(2\pi \frac{a_0 + a_1\,p\ \cdots\ a_{m-1}\,p^{m-1}}{p^m}) = \prod_{i=0}^{m-1} exp(2\pi a_i \frac{p^i}{p^m}).$$

y si $q = \dfrac{a}{p^m} + \dfrac{r}{s}$,

$$f(q) = f(\frac{a}{p^m}) = \left(f(\frac{1}{p^m})\right)^a.$$

No es difícil comprobar que, si

$$\frac{a}{p^m} + \frac{r}{s} = \frac{a_1}{p^k} + \frac{r_1}{s_1}$$

entonces $s = s_1$ y $k = m$. De aquí también se deduce que p^m divide a $(a - a_1)$. Luego, si $t \in \mathbf{Z}$

$$\exp(2\pi t \frac{a}{p^m}) = \exp(2\pi t \frac{a_1 + (a - a_1)}{p^m}) = \exp(2\pi t \frac{a_1}{p^m}).$$

Resumiendo, para definir f elegimos un número primo p y una sucesión de enteros $\{a_n \mid n \geq 0\}$ tales que $0 \leq a_n < p$. Entonces, siguiendo con la misma notación de antes, si $x \in \mathbf{R}$,

$$x = q + q_1\,x_1 + q_2\,x_2 + \cdots + q_n\,x_n \qquad \text{y}$$

$$q = \frac{a}{p^m} + \frac{r}{s},$$

definimos

$$f(x) = f(q) = f(\frac{a}{p^m}) = \left(f(\frac{1}{p^m})\right)^a.$$

Dejamos como ejercicio para el lector comprobar que efectivamente f resulta un homomorfismo y que f no es de la forma $\exp \circ \phi$, para ningún homomorfismo $\phi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, a menos que exista un $M > 0$ tal que $a_n = 0$ para todo $n \geq M$.

Referencias:

[1] Alexandra Kurepa, *Ecuaciones funcionales involucrando funciones trigonométricas y exponenciales*, vol. 1, 1994.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.